复旦大学附属中学
数学教学讲义

复旦大学附属中学数学教研组 编

（一分册）

MATH

复旦大學出版社

B

复旦大学附属中学
数学教学讲义

（一分册）

复旦大学附属中学数学教研组　编

復旦大學出版社

序

经过近60年坚韧不拔的努力，复旦大学附属中学已经初步发展成为一所特色鲜明、国际闻名的示范性品牌高中.很多国内外著名学校的师生、校长来复旦附中交流访问，在听课、座谈、参观之后，都提出希望能得到一套复旦附中的校本教材，以深入研究“复旦附中现象”.确实，通过教材，可以了解我们的办学思想、课程设置以及教学的设计、结构、内容与要求等等.在2005年，我们曾经出过一套六本“校本课程选辑”，受欢迎的程度还是比较乐观的.在此基础上，我们计划在2008—2009年里再出一批.其目的主要有三：一、编写的过程就是笔者学习思考的过程，可以提炼教师的专业水平和研究教学的能力，把他们个体手中的备课笔记整合成教研组集体的“讲义”(学校不可能出版“教材”)，同时可以解决上课时多媒体技术使用日益频繁给学生记笔记带来不便等新问题，更方便他们自主学习(如预习和复习等)；二、在提倡对通用教材二次开发的今天，各学校自编的校本教材五花八门、千姿百态，为便于同兄弟学校交流、分享教改成果，我们也应该出版一些基本成型的“讲义”；三、我们认为，这也是在记录我校教育发展的历程，透过这些书面的资料，促使我们自身理性地观察和对待学校近年的教育教学改革，积极推动高中素质教育的振兴，帮助我们不断迈向卓越.

已经或将陆续出版的这套《复旦大学附属中学“大视野”教育书系》，其宗旨在于“凸显教育眼光的开阔和深远，体现通识教育的理念”，也是对复旦附中教师长年教育教学实践智慧的总结，是真正意义上的“校本”.尤其是展现了复旦附中师生的教与学水平和教育方式方法，可以说，呈现给大家的是一份真切的“实惠”.但对某些学校而言未必适用，仅供参考之用.另外，限于编辑时间和各自的理解能力，我们展现给大家的只是部分思考心得，更多的切入点有待我们进一步挖掘，这是我们的愿望及努力方向.书中的疏漏之处，还望读者指正！

谢应平

2008年7月22日

目录

第一篇　代　　数

第二篇　三　　角

第一篇　代　　数

第 1 章 集合与命题

1.1 集合

1.1.1 集合概念及其表示

在日常生活和科学研究中，经常要考虑某些对象全体的情况．例如，我校每年都要对当年高一新生全体的素质水平（包括道德品质、学习基础、健康水平等等）与历年高一新生全体的情况作比较研究．像这样，研究某些确定的对象的全体所具有的性质是科学研究的一个重要方面，用数学语言来说，就是研究集合及其某些性质．

那么什么是集合呢？集合的含义是全体，什么性质对象的全体就说是什么性质对象的集合．具体地说，集合就是指具有某种性质的、确定的、可区分的事物的全体．这里需要指出以下几点．

其中所说的事物，可以是具体的，如书本、铅笔、人、牛羊等等，也可以是抽象的，如数、定理、三角形、直线等等．在数学中，我们喜欢把可供思维的对象看做事物，称为**元素**．

说到全体就要明确是什么对象的全体，对象不明确，所谓的全体就失去意义．说到具有某种性质对象的全体，全体中就应包含具有该性质的所有对象而且不包含不具有该性质的对象，亦即符合的都在其中，在其中的都是符合的，没有遗漏，没有混入，不多不少．

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．也就是说，集合中任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算做这个集合的一个元素．因此，集合中是没有相同元素的．

例 1　考虑下列各个说法的含义：

（1）非负整数集合（自然数集合），记做 $\mathbf{N}$；

（2）正整数集合，记做 $\mathbf{N}^*$；

（3）整数集合，记做 $\mathbf{Z}$；

（4）有理数集合，记做 $\mathbf{Q}$；

（5）实数集合，记做 $\mathbf{R}$；

（6）正实数集合，记做 $\mathbf{R}^+$.

习惯上，用大写字母来记集合，如集合 A, B, C 等；用小写字母来记元素，如 a, b, c 等. 若 a 是集合 A 的元素，则记做 $a \in A$，读做 a 属于集合 A. 若 a 不是集合 A 的元素，则记做 $a \notin A$，读做 a 不属于集合 A. 集合的具体表示方法，常用的有列举法和描述法.

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**.

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**. 这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，右边写上这个集合的元素的公共属性.

例 2　将下列各集合表示出来：

（1）小于 10 的正奇数集合；　　（2）小于 10 的质数集合；

（3）正奇数集合；

（4）不等式 $3x+2>0$ 的解的集合（解集）；

（5）设 A、B 是平面内不同的两点，问集合 $\{点\ P \mid PA = PB\}$ 表示什么？

（6）正偶数集合.

解　（1）$\{1, 3, 5, 7, 9\}$；

（2）$\{2, 3, 5, 7\}$；

（3）$\{1, 3, 5, \cdots, (2n-1), \cdots\}$ 或 $\{x \mid x = 2n-1, n \in \mathbf{N}^*\}$；

（4）$\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$ 或 $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$；

（5）表示线段 AB 的垂直平分线上的点所组成的集合；

（6）$\{x \mid 3x+2>0, x \in \mathbf{R}\}$.

若所研究的对象只有一个，设其为 a，则 a 的全体就是集合 $\{a\}$，是只含一个元素的集合. 为表达方便，引入“空集”概念，若某种对象不存在，就说这种不存在的对象的全体为**空集**，记为 $\varnothing$，并规定任何空集都是同一个集，任何对象都不是空集的元素，空集 $\varnothing$ 中没有元素，亦可简单定义空集为不含任何元素的集合.

若一个集合元素的个数不超过（大于）某一个正数，则称该集合为**有限集**（意为其元素个数是有限制的）；不是有限集的集合称为**无限集**（意为其元素个数是无限制的）.

练习

1. 判断下面各组对象是否组成集合：

（1）大于 0 的偶数；　　（2）绝对值小于 0 的实数；

（3）我班学习成绩好的学生；　　（4）很小的数的全体.

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 所有正偶数组成的集合；　　(2) 中国古代的四大发明；

(3) 大于 0 且小于 3 的实数的全体；　　(4) 小于 10 的质数的全体.

3. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

1 ____ $\mathbf{N}^*$，　-3 ____ $\mathbf{N}$，　$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{N}$，　0.1 ____ $\mathbf{N}$；

1 ____ $\mathbf{Z}$，　-3 ____ $\mathbf{Z}$，　$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Z}$，　0.1 ____ $\mathbf{Z}$；

1 ____ $\mathbf{Q}$，　-3 ____ $\mathbf{Q}$，　$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$，　0.1 ____ $\mathbf{Q}$；

1 ____ $\mathbf{R}$，　-3 ____ $\mathbf{R}$，　$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}$，　0.1 ____ $\mathbf{R}$.

1.1.2　集合之间的关系：子集、相等、真子集

1. 子集

我们知道，任何一个自然数都是一个整数，就是说，自然数集 $\mathbf{N}$ 的任何一个元素都是整数集 $\mathbf{Z}$ 的一个元素. 同样，自然数集 $\mathbf{N}$ 的任何一个元素都是有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 的一个元素.

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记做 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），读做“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

我们规定，空集是任何集合的子集.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以 $A \subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集.

2. 相等

对于两个集合 A、B，如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，那么我们就说这两个集合相等，记做 $A = B$，读做“集合 A 等于集合 B”.

例如，$A = \{2, 3\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，则 $A = B$.

3. 真子集

$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$. $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{N}$ 的子集，$\mathbf{N}$ 也是 $\mathbf{Z}$ 的子集，但它们是有区别的，$-1 \in \mathbf{Z}$，但 $-1 \notin \mathbf{N}$.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集. 记做 $A \subsetneqq B$，读做“A 真包含于 B”.

空集是任何非空集合的真子集.

例 1　写出集合 $\{a, b\}$ 的所有：(1) 子集，(2) 真子集.

解　(1) 集合 $\{a, b\}$ 的所有子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$；

(2) 集合 $\{a, b\}$ 的所有真子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

例 2　已知 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，求证：$A \subseteq C$.

证明　任取 $x \in A$，因为 $A \subseteq B$，所以 $x \in B$.

因为 $B \subseteq C$，所以 $x \in C$，

于是 $A \subseteq C$.

同样可知,对于集合 A,B,C,如果 $A \subsetneqq B$,$B \subsetneqq C$,那么 $A \subsetneqq C$.

例 3 判断下面两个集合之间的关系:

(1) $A=\{x \mid x=2k+1,\ k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{x \mid x=2k-1,\ k\in \mathbf{Z}\}$;

(2) $A=\{x \mid x=2k+1,\ k\in \mathbf{N}\}$,$B=\{x \mid x=2k-1,\ k\in \mathbf{N}\}$.

解 (1) 任取 $x\in A$,存在 $k\in \mathbf{Z}$,使得 $x=2k+1=2(k+1)-1$,$k+1\in \mathbf{Z}$,

所以 $x\in B$,因此:$A\subseteq B$;

任取 $x\in B$,存在 $k\in \mathbf{Z}$,使得 $x=2k-1=2(k-1)+1$,$k-1\in \mathbf{Z}$,

所以 $x\in A$,因此:$B\subseteq A$;

综上所述:$A=B$.

(2) 任取 $x\in A$,存在 $k\in \mathbf{N}$,使得 $x=2k+1=2(k+1)-1$,$k+1\in \mathbf{N}$,

所以 $x\in B$,因此:$A\subseteq B$;

又 $-1\in B$,但 $-1\notin A$;

综上所述:$A\subsetneqq B$.

练习

1. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 所有的子集及其真子集.

2. 用适当的记号($\in$,$\notin$,$=$,$\subsetneqq$)填空:

$\{a\}$____$\{a, b, c\}$; a____$\{a, b, c\}$; d____$\{a, b, c\}$;

$\{a, b, c\}$____$\{b, c, a\}$; $\{3, 5\}$____$\{1, 2, 3, 5\}$;

$\{2, 4, 6, 8\}$______$\{2, 4\}$; $\varnothing$____$\{1, 2\}$.

3. 判断下列说法是否正确:

(1) 任何一个集合至少有两个子集:空集和自身;

(2) 若 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,则 $B=C$;

4. 确定 x,y 的值,使得 $A=\{1, x\}$,$B=\{2, 3, y\}$ 满足:$A\subseteq B$.

5. 判断下列各式是否正确,并说明理由.

(1) $3\in\{x \mid x<10\}$; (2) $3\subseteq\{x \mid x<5\}$;

(3) $\{4\}\in\{1, 2, 3, 4\}$; (4) $\{4\}\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$;

(5) $\varnothing\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$; (6) $\varnothing\in\{X \mid X\subseteq A\}$(其中 A 是一个给定的集合).

1.1.3 集合的交、并、补运算

1. 交集

已知 6 的正约数的集合为:$A=\{1, 2, 3, 6\}$,10 的正约数的集合为 $B=\{1, 2, 5, 10\}$,那么 6 和 10 的正公约数的集合为$\{1, 2\}$.容易看出集合$\{1, 2\}$是由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的.

一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A,B 的交集,记做“$A\cap B$”,读做“A 交 B”,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}.$$

简而言之，交集即为几个集合的公共或共有部分的集合.

在讨论几个集合之间的关系及其运算的时候，我们常用图形来直观地表示. 如图 1-1 中的阴影部分，表示集合 A、B 的交集 $A \cap B$.

由交集的定义容易知道：

$$A \cap A = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B.$$

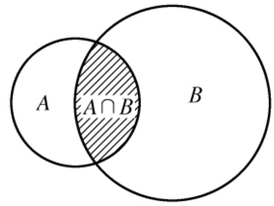

图 1-1

例 1　设 $A = \{x \mid x > 2\}$，$B = \{x \mid x < 3\}$，求 $A \cap B$.

解　$A \cap B = \{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 3\}$

$= \{x \mid 2 < x < 3\}$.

例 2　设 $A = \{(x, y) \mid 2x + y = 1\}$，$B = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$，求 $A \cap B$.

解　$A \cap B = \left\{(x, y) \middle| \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}\right\} = \{(1, -1)\}$.

2. 并集

已知方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集为：$A = \{1, -1\}$，方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集为：$B = \{2, -2\}$，方程 $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ 的解集为：$\{1, -1, 2, -2\}$. 容易看出集合 $\{1, -1, 2, -2\}$ 是由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的.

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A，B 的并集，记做“$A \cup B$”，读做“A 并 B”，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}.$$

图 1-2 中的阴影部分，表示集合 A，B 的并集 $A \cup B$. 注意，我们知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次，算做一个.

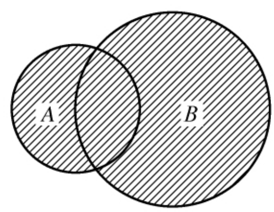

图 1-2

由并集的定义容易知道：

$$A \cup A = A,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cup B = B \cup A;$$

$$A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B.$$

例 3　已知 $A = \{x \mid x > 1\}$，$B = \{x \mid x < 2\}$，求 $A \cup B$.

解　$A \cup B = \{x \mid x > 1\} \cup \{x \mid x < 2\} = \mathbf{R}$.

3. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，常有讨论的前提，即这些集合都是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用记号 U 表示. 也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素，例如，在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

已知全集 U,集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在集合 U 中的补集,记做 $C_U A$, 读做"A 补",即

$$C_U A = \{x \mid x \in U, 且\ x \notin A\}.$$

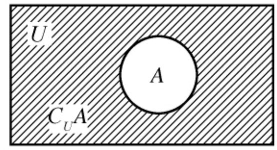

图 1-3

图 1-3 中的长方形表示全集 U,圆内表示集合 A,阴影部分表示集合 A 在全集 U 中的补集.

由补集的定义容易知道:

$$A \cup C_U A = U, A \cap C_U A = \varnothing, C_U(C_U A) = A.$$

例 4 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$, 求 $C_U A$, $C_U B$, $C_U(A \cap B)$, $C_U(A \cup B)$, $C_U A \cap C_U B$, $C_U A \cup C_U B$.

解 $C_U A=\{1, 7, 8, 9\}$, $C_U B=\{1, 2, 3, 9\}$, $C_U(A \cap B)=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$,

$C_U(A \cup B)=\{1, 9\}$, $C_U A \cap C_U B=\{1, 9\}$, $C_U A \cup C_U B=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.

练习

1. 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, d, e, f, g\}$, 求 $A \cap B$.
2. 设 $A=\{(x, y) \mid 3x+2y=5\}$, $B=\{(x, y) \mid x+y=2\}$, $C=\{(x, y) \mid 2x+2y=1\}$, 求 $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$.
3. 如图 1-4, A, B, C 表示集合,把图中各个阴影部分表示的集合表示出来,并用适当的记号表示它们同 A, B, C 之间的关系.

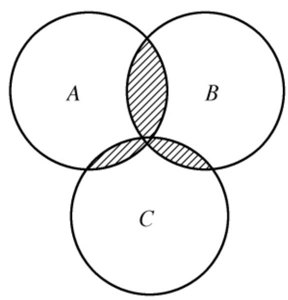

图 1-4

4. 求 $\mathbf{Q} \cup \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \cup \mathbf{R}$.
5. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.
6. (1) 如果全集 $U=\mathbf{Z}$, 求 $C_U \mathbf{N}^*$;

   (2) 如果全集 $U=\mathbf{N}$, 求 $C_U \mathbf{N}^*$.
7. 设 $U=\{a, b, c, d, e\}$, $A=\{a, c, d\}$, $B=\{b, d, e\}$, 求 $C_U A$, $C_U B$, $C_U(A \cap B)$, $C_U(A \cup B)$, $C_U A \cap C_U B$, $C_U A \cup C_U B$. 看看求出的后四个集合中有没有相等的集合. 如果有,说明是否能推广到一般的情形.
8. 图 1-5 中 U 是全集, A, B 是 U 的两个子集,用阴影表示:

   (1) $C_U A \cap C_U B$;

   (2) $C_U A \cup C_U B$.

(1) (2)

图 1-5

1.2　命题

1.2.1　命题及其四种形式

命题是用陈述语句表示对事物有所肯定或否定的判断(满足排中律,是或不是).简单地说,命题即判断.因为判断要有依据(条件)和被判断的对象(结论),所以说我们所讨论的命题都是由条件和结论组成的.

例 1　判断下面命题的真假,并说明理由.

(1) 个位数是 5 的自然数能被 5 整除;

(2) 互为补角的两个角不相等.

解　(1) 这个命题是真命题.

因为个位数是 5 的自然数都可以写成 $10k+5(k\in\mathbf{N})$,又因为 $10k+5=5(2k+1)$,并且 $2k+1$ 是正整数,所以 $10k+5$ 能被 5 整除.即“个位数是 5 的自然数能被 5 整除”是真命题.

(2) 这个命题是假命题.

因为取一个角为 90°,另一个角也为 90°,它们是互补的,但它们也是相等的,所以“互为补角的两个角不相等”是假命题.

从例 1 可以看出,要说明一个命题是假命题,只要举出一个满足条件但不满足结论的例子就可以了,这在数学中称为举反例.

要说明一个命题是真命题,必须证明由命题的条件一定能推出命题的结论.一般地,如果 α 这件事成立可以证出 β 这件事也成立,那么就说 α 可以证出 β,用记号 $\alpha\Rightarrow\beta$ 表示.

一个命题用条件 P.结论 Q 表示就是:若 P 则 Q.将一个命题的条件和结论的肯定或否定重新配置可构成无矛盾的另三种形式的命题,共四种形式.

例如,对凸四边形就关于“内接于圆”(记为 P)和“对角互补”(记为 Q)的肯定与否定作为条件和结论组成命题有四种形式.

(1) 若内接于圆,则对角互补;

(2) 若对角互补,则内接于圆;

(3) 若不内接于圆,则对角不互补;

(4) 若对角不互补,则不内接于圆.

像(1)、(2)两个命题那样,一个命题的条件和结论是另一个命题的结论和条件,我们把这样的两个命题叫做互逆命题.如果把其中一个叫做原命题,那么另一个就叫做它的逆命题.

像(1)、(3)两个命题那样,一个命题的条件和结论是另一个命题的条件的否定和结论的否定,我们把这样的两个命题叫做互否命题.如果把其中一个叫做原命题,那么另一个就叫做它的否命题.