常微分方程学习指导与习题解答

主编　张晓梅　张振宇　张立柱

復旦大學出版社

目 录

第一章 绪 论

一、主要内容

1. 微分方程

联系自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**.

2. 常微分方程与偏微分方程

如果微分方程中自变量的个数只有一个,则称该方程为**常微分方程**;如果微分方程中自变量的个数有两个或两个以上,则称该方程为**偏微分方程**.

3. 微分方程的阶数

在一个微分方程中,未知函数最高阶导数的阶数称为该方程的**阶数**.

一阶常微分方程的显式形式为 $y' = f(x,y)$;

一阶常微分方程的隐式形式为 $F(x,y,y') = 0$;

***n* 阶常微分方程的显式形式为** $y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$;

***n* 阶常微分方程的隐式形式为** $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$.

4. 线性与非线性微分方程

如果 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 的左端函数 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是关于 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的一次式,则称之为 ***n* 阶线性微分方程**,否则称之为 ***n* 阶非线性微分方程**.

一般的 *n* 阶线性微分方程的形式为

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x),$$

其中 $a_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 和 $f(x)$ 是 x 的已知函数.

5. 方程的解

设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 (a,b) 上连续,且有直到 n 阶的导数,如果下面的式

子恒成立

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,\ a<x<b,$$

则称 $y=\varphi(x)$ 为方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间(a,b) 上的一个**解**.

如果关系式 $F(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解,则称 $F(x,y)=0$ 是该方程的一个**隐式解**.

注: 方程的解可分为显式解、隐式解及参数形式的解等不同形式.

6. 通解和特解

如果微分方程的解中含有一个或多个任意常数,且其所含相互独立的任意常数的个数等于该方程的阶数,称这样的解为方程的**通解**.

一般的 n 阶微分方程的通解可以表示为 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是独立的任意常数.

满足某些条件的解称为微分方程的**特解**.常见的条件是**初始条件**.

一般的 n 阶微分方程的初始条件可表为 $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

7. 初值问题

求微分方程满足初始条件的解的问题称为**初值问题**.

初值问题也常称为 **Cauchy** 问题.

n 阶微分方程的初值问题可以表示为

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

二、疑难解析

1. 微分方程与一般方程的区别是什么?

一般方程通常指已知数(函数)和未知数(函数)之间的关系式.如二次方程 $2x^2-5x+2=0$、指数方程 $3^x=5$ 和超越方程 $\sin 2x+\cos 3x=1$ 等.而微分方程是未知函数对自变量施加了导数(或微分)的关系式.

2. 一阶微分方程解的几何意义是什么?

对一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$,假设 $f(x,y)$ 定义在平面区域 R 上.过一点$(x_0,y_0)\in R$,若方程有特解 $y=\varphi(x)$,则这个解在平面R上就是一条曲线,我们

称它为方程的一条积分曲线,该曲线上任一点$(x,\varphi(x))$处切线斜率$\varphi'(x)$正好等于函数$f(x,y)$在该点的值$f(x,\varphi(x))$.

3. 通解与全部解的关系是什么?

通解一定包含全部解么?不一定. 例如微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$有通解$y=\sin(\arcsin x+c)$,另外,该方程还有常数解$y=\pm 1$,但不包含在此通解中.

4. 任何一个微分方程是否都有通解?

任何一个微分方程都有通解么?不一定. 例如,微分方程$y'^2+y^2=0$只有解$y=0$,而没有含任意独立常数的通解.

三、典型例题

例 1　验证给出的函数是否为相应微分方程的解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{5}x^2+x$,$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$,其中$c$为任意常数;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-1}{2x-y+7}$,$y=2\sqrt{4+x}-1$;

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2tx-x^2}{tx-1}$,$tx-\ln x-t^2=0$;

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y$,$y=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$,$p(x)$连续;

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|}$,$y=\begin{cases}-\frac{(x-c_1)^2}{4}, & -\infty<x<c_1,\\ 0, & c_1\leqslant x\leqslant c_2,\\ \frac{(x-c_2)^2}{4}, & c_2<x<+\infty,\end{cases}$ 其中$c_1\leqslant 0$,$c_2\geqslant 0$为任意常数;

(6) $x^2+(y')^2=1$,$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}.\end{cases}$

解　(1) 是,因为函数$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$的导数为$y'=\frac{3}{5}x^2+x$,显然满足方程. 所以函数$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$是微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{5}x^2+x$的解.

（2）是，因为将函数 $y=2\sqrt{4+x}-1$ 及其导数 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$ 分别代入方程的左、右两端，方程右端为 $\dfrac{2\sqrt{4+x}-2}{2x-2\sqrt{4+x}+8}=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$.

所以函数 $y=2\sqrt{4+x}-1$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-1}{2x-y+7}$ 的解.

（3）是，将方程 $tx-\ln x-t^2=0$ 两边同时对 t 求导，得 $x+t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t=0$，于是有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2tx-x^2}{tx-1}$. 所以方程 $tx-\ln x-t^2=0$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2tx-x^2}{tx-1}$ 的隐式解.

（4）是，因为 $y'=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot p(x)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot p(x)=p(x)y$. 因此函数 $y=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y$ 的解.

（5）是，因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}-\dfrac{(x-c_1)}{2}, & -\infty<x<c_1,\\ 0, & c_1\leqslant x\leqslant c_2,\\ \dfrac{(x-c_2)}{2}, & c_2<x<+\infty.\end{cases}$

$$\sqrt{|y|}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(x-c_1)^2}{4}}=-\dfrac{(x-c_1)}{2}, & -\infty<x<c_1,\\ 0, & c_1\leqslant x\leqslant c_2,\\ \sqrt{\dfrac{(x-c_2)^2}{4}}=\dfrac{(x-c_2)}{2}, & c_2<x<+\infty.\end{cases}$$

所以函数 $y=\begin{cases}-\dfrac{(x-c_1)^2}{4}, & -\infty<x<c_1,\\ 0, & c_1\leqslant x\leqslant c_2,\\ \dfrac{(x-c_2)^2}{4}, & c_2<x<+\infty\end{cases}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|}$ 的解.

（6）是，因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2t}{2}\right)\times\left(\dfrac{1}{\cos t}\right)=\cos t$，代入微分方程的左端恒等于 1，所以 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}\end{cases}$ 是微分方程 $x^2+(y')^2=1$ 的参数形式的解.

例 2 验证函数 $y=ce^{-3x}+e^{-2x}$(c 为任意常数)是方程 $\frac{dy}{dx}=e^{-2x}-3y$ 的通解,并求出满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解 将函数 $y=ce^{-3x}+e^{-2x}$ 及其导数 $\frac{dy}{dx}=-3ce^{-3x}-2e^{-2x}$ 分别代入方程的左右两端,显然等式成立,且该解中有一个取任意值的常数,故函数 $y=ce^{-3x}+e^{-2x}$ 为方程 $\frac{dy}{dx}=e^{-2x}-3y$ 的通解. 根据初始条件 $y|_{x=0}=0$,知 $c=-1$,所求特解为 $y=-e^{-3x}+e^{-2x}$.

例 3 指出下列微分方程的阶数,并判断它们是线性方程还是非线性方程:

(1) $x^3y'''+x^2y''+xy'+2y=\sin x$; (2) $(1+y^2)y''+xy'+y=e^x$;

(3) $y''+\sin(x+y)=f(x)$; (4) $y^{(n)}=f(x,y)$;

(5) $y'+xy^2=0$; (6) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$.

解 (1) 三阶,线性方程;(2) 二阶,非线性方程;(3) 二阶,非线性方程;(4)n 阶,若 $f(x,y)$ 关于 y 是一次的,则方程为线性方程,否则,方程为非线性方程;(5) 一阶,非线性方程;(6) 二阶,线性方程.

例 4 构造下列函数满足的阶数最低的微分方程,其中 c,c_1,c_2 为任意常数:

(1) $y=cx+c^2$; (2) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$;

(3) $y=c_1+c_2e^x$; (4) $y^2=c_1(c_2^2-x^2)$.

解 (1) 两端对 x 求导,得 $y'=c$,代入原式,则所求的微分方程为 $y=xy'+(y')^2$.

(2) 两边对 x 连续求导两次,得 $2(x-c_1)+2(y-c_2)y'=0$,和 $2+2y'^2+2(y-c_2)y''=0$,于是 $y-c_2=-\frac{y'^2+1}{y''}$,进而 $x-c_1=\frac{y'(y'^2+1)}{y''}$. 将 $x-c_1$ 及 $y-c_2$ 的表达式代回 $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$ 中,整理得所求的微分方程为 $y''^2=(y'^2+1)^3$.

(3) 两边对 x 连续求导两次,得 $y'=c_2e^x$, $y''=c_2e^x$,于是所求的微分方程为 $y''=y'$.

(4) 两边对 x 连续求导两次,得 $y\cdot y'=-c_1x$, $y'^2+yy''=-c_1$,于是所求的微分方程为 $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

注: n 阶微分方程的通解含有 n 个独立常数,它在几何上表示一个有 n 个参数的曲线族. 反之,一个含有 n 个独立参数的曲线族必伴随一个 n 阶微分方程. 此微分方程可以由所给 n 个参数的曲线族微分 n 次,然后从 $n+1$ 个方程中消去

n 个独立的参数而得到.

例 5 求下列两个微分方程的公共解：

(1) $y' = y^2 + 2x - x^4$；(2) $y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$.

解 根据题意 $y^2 + 2x - x^4 = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$，可得 $2x^4 - 2y^2 + x^2 - y = 0$，即 $(2x^2 + 2y + 1)(x^2 - y) = 0$. 所以 $y = x^2$ 或 $y = -\dfrac{1+2x^2}{2}$.

代入检验可知：$y = -\dfrac{1+2x^2}{2}$ 不满足，舍去，因此两方程的公共解为 $y = x^2$.

例 6 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线解.

解 设方程的直线解为 $y = ax + b$，则 $y' = a$，代入方程得 $a + xa^2 - ax - b \equiv 0$，即 $x(a^2 - a) + (a - b) \equiv 0$，故 $\begin{cases} a^2 - a = 0, \\ a - b = 0. \end{cases}$ 于是有 $a = b = 0$ 或 $a = b = 1$，所求直线解为 $y = 0$ 或 $y = x + 1$.

例 7 求初值问题 $y'' + 4y = 0$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ 的解. 已知其通解为 $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$，$c_1, c_2$ 为任意常数.

解 对通解求导，得 $y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$，代入初始条件，得 $y(0) = 0 = c_2$，$y'(0) = 1 = 2c_1$. 于是初值问题的解为 $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

例 8 利用上题，求边值问题 $y'' + 4y = 0$，$y(\frac{\pi}{8}) = 0$，$y(\frac{\pi}{6}) = 1$ 的解.

解 将边值条件代入通解中，得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}c_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}c_2 = 0$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \dfrac{1}{2}c_2 = 1$，于是有 $c_1 = -c_2 = \sqrt{3} + 1$. 边值问题的解为 $y = (\sqrt{3} + 1)(\sin 2x - \cos 2x)$.

例 9 设 $x = \varphi(t)$ 是微分方程 $F\left(x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上的解，试证明对于任意常数 c，$x = \varphi(t + c)$ 也是这个微分方程的解，并确定它的定义区间.

解 因为 $F\left(\varphi(t), \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n\varphi(t)}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$，又因为 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t+c)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t+c)}{\mathrm{d}(t+c)}$，$\cdots$，$\dfrac{\mathrm{d}^n\varphi(t+c)}{\mathrm{d}t^n} = \dfrac{\mathrm{d}^n\varphi(t+c)}{\mathrm{d}(t+c)^n}$，所以 $F\left(\varphi(t+c), \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t+c)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n\varphi(t+c)}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$.

即 $x = \varphi(t + c)$ 也是方程 $F\left(x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0$ 的解，定义于 $a - c \leqslant t \leqslant b - c$.

例 10 设一曲线，其上每一点的切线的斜率为该点横坐标的两倍，且通过点 $P(3, 4)$，试建立这条曲线所满足的微分方程.

解　设曲线方程为 $y=y(x)$，曲线上任一点 (x,y) 的切线的斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，于是所求的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\\ y(3)=4.\end{cases}$$

例 11　设一曲线，其上各点处的切线，切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形（以 x 轴为底），且通过点 $(1,2)$，试建立该曲线所满足的微分方程.

解　如图 1.1 所示，设曲线方程为 $y=y(x)$. $A(x,y)$ 为曲线上任意一点，则过点 A 的切线方程为

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x),$$

所以点 B 的坐标为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. 由题意 $|AO|=|AB|$，于是所求的微分方程为

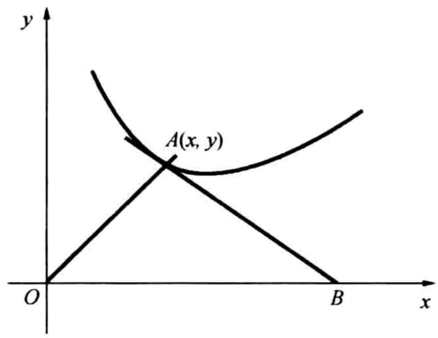

图 1.1　曲线与切线及向径围成的等腰三角形

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2+y^2},\\ y(1)=2.\end{cases}$$

例 12　一物体放在温度为 τ 的恒温介质中冷却. 设在冷却过程中降温速率随物体与介质的温度差成正比，比例系数 $k>0$ 可以由实验确定. 设物体的初始温度为 T_0，$T_0>\tau$，求从实验开始算起，物体的温度变化规律 $T=T(t)$ 所满足的微分方程及初始条件.

解　物体冷却过程中降温速率就是 T 对 t 的变化率，即 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. 于是由已知条件可列出方程 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-\tau)$，这里等号右端添负号的原因是，$T>\tau$ 时，物体在介质中冷却，于是 T 随 t 的增长而减少，故 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$.

又因 $k>0$，故右端应添负号. 要求的函数 $T=T(t)$ 除了满足上述方程外，还应满足 $T|_{t=0}=T_0$.

例 13　考虑一物质 A 经化学反应，全部生成另一物质 B，设 A 的初始质量为 10kg，在一小时内生成 B 物质 3kg，试求物质 B 的质量所满足的微分方程.

解　这是一个化学问题，它遵守质量作用定律：化学反应的速度跟参与反应的物质的有效质量或浓度成正比.

设 $x(t)$ 表示在 t 时刻所生成 B 物质的质量，则 $M_A = 10 - x$ 是 t 时刻 A 物质参与反应的有效质量. 按上述定律 $\frac{\mathrm{d}M_A}{\mathrm{d}t} = -kM_A$，得物质 B 的质量 $x(t)$ 所满足的微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = k(10-x), \\ x(0) = 0, x(1) = 3. \end{cases}$$

例 14　一容器内盛有 200gal 的盐水，含盐 S_0 磅，设 $t = 0$ 开始以 4gal/min 的速度向容器内注入含盐 0.5lb/gal 的盐水，经充分搅拌后，又以同样的速度流出容器，求容器内含盐的总量与时间 t 的关系所满足的微分方程及初始条件.

解　此为混合溶液的问题. 若以 $S(t)$ 表示 t 时刻容器内含盐的总量，则它的变化率 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 等于注入盐的速度－流出盐的速度，注入盐的速度为 $0.5(\mathrm{lb/gal}) \times 4(\mathrm{gal/min}) = 2(\mathrm{lb/min})$，而流出盐的速度是 $\frac{S(t)}{200} \times 4 = \frac{S(t)}{50}(\mathrm{lb/min})$，因此 $S(t)$ 满足下列微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2 - \dfrac{S}{50}, \\ S(0) = S_0. \end{cases}$$

例 15　有一房间容积为 $100\mathrm{m}^3$，CO_2 的浓度为 0.12%，现在用一台风量为 $10\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的排风机向房间通入含 0.04% 浓度 CO_2 的空气，同时以相同的风量将混合均匀的空气排出. 试建立房间中 CO_2 浓度所满足的数学模型.

解　设 t 时刻 CO_2 的含量为 $x(t)\%$，则在 $[t, t+\Delta t]$ 时间，进入房间的 CO_2 的含量为 $10 \times 0.04\% \times \Delta t$，排出房间的 CO_2 的含量为 $10 \times x(t)\% \times \Delta t$，房间中 CO_2 的改变量为 $x(t+\Delta t) - x(t) = (0.004 - 0.1x) \cdot \Delta t$，于是 $x(t)$ 满足下列微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.004 - 0.1x, \\ x(0) = 0.12. \end{cases}$$

例 16　某人的食量是每天 2 500cal，其中 1 200cal 用于基本的新陈代谢（即自动消耗）. 在每天的健身训练中，他所消耗的大约是 16cal/kg. 假设以脂肪形式储藏的热量 100% 地有效，而每 1kg 脂肪含热量 10 000cal. 试建立此人的体重随

时间变化的数学模型.

解　设 w_0 表示第一天的体重，$w(t)$ 表示第 t 天的体重. 则每天身体重量的变化为输入 − 输出. 输入 = 总热量 − 基本新陈代谢热量 = 2 500cal − 1 200cal，输出 = 训练时消耗 = 16(cal/kg) × $w(t)$. 因此 $w(t)$ 满足下列微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1\,300 - 16w}{10\,000}, \\ w(0) = w_0. \end{cases}$$

例 17　一水池充满 10 000L 清水，设它与 A,B,C 三管相连. 从 A 管注入清水的速度是 1L/min，从 B 管注入糖水的速度是 1L/min，其含糖量为 50g/L. 假定流进的水经充分混合后由 C 管流出的速度是 2L/min，求 t 时刻水池中含糖量 $x(t)$ 所满足的微分方程.

解　设 t 时刻水池中含糖量为 $x(t)$，则在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内水池中含糖量的改变量为 $x(t+\Delta t) - x(t) = \left(50 - \dfrac{x(t)}{10\,000} \times 2\right) \cdot \Delta t$，于是 $x(t)$ 满足下列微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 50 - \dfrac{2x}{10\,000}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

四、习题精选

1. 判断下列微分方程的阶数：

(1) $y''' - 5xy' = \mathrm{e}^x + 1$；

(2) $ty'' + t^2 y' - (\sin t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = y^2 + 1$；

(4) $y^{(4)} + xy''' + x^2 y'' + xy' - \sin y = 0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 + 12xy = 0$；

(6) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = 0$.

2. 判断函数 $y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$ 是否是方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的一个解.

3. 判断 $y(x) \equiv 1$ 是否为方程 $y'' + 2y' + y = x$ 的一个解.

4. 验证函数 $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是方程 $\frac{dy}{dx}=|xy|(x<0)$ 的适合初始条件 $y(-\sqrt{2})=\frac{1}{e}$ 的特解.

5. 验证二元方程 $x^2-xy+y^2=c$ 所确定的函数为微分方程 $(x-2y)y'=2x-y$ 的解.

6. 验证所给函数是否为相应的微分方程的解：

(1) $\frac{d^2x}{dt^2}=t^2+x^2$，$x=\frac{1}{t}$；

(2) $(x+y)dx+xdy=0$，$y=(c^2-x^2)/(2x)$；

(3) $xy''+y'=4x$，$y=x^2+\ln x$；

(4) $y=(y'-1)e^{y'}$，$\begin{cases}x=e^p-c,\\ y=(p-1)e^p.\end{cases}$（$c$ 是常数，p 是参数）

7. 求初值问题 $y'+y=0$，$y(3)=2$ 的解，已知其通解为 $y=ce^{-x}$，其中 c 为任意常数.

8. 求下列曲线所满足的微分方程：

(1) $y=\sin(x+c)$（c 为参数）；

(2) $y=Ax^2$（A 为参数）；

(3) $y=ae^x+be^{-x}+x-1$（a,b 为参数）；

(4) $(x-a)^2+(y-b)^2=1$（a,b 为参数）.

9. 对下面的每个方程分别求 r 的值，使得 $y=x^r$ 是它的解：

(1) $x^2y''+4xy'+2y=0$；

(2) $x^2y''-4xy'+4y=0$.

10. 对下面的每个方程分别求 r 的值，使得 $y=e^{rx}$ 是它的解：

(1) $y'+2y=0$；

(2) $y''-y=0$；

(3) $y''+y'-6y=0$；

(4) $y'''-3y''+2y'=0$.

11. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2$ 的通解，并分别求满足下列条件的特解：

(1) 通过点 $(2,1)$；

(2) 与直线 $y=x$ 相切；

(3) 与直线 $y=-3x+1$ 正交.

12. 设某个特解满足初值问题 $\begin{cases} y' = x + y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ 它能否满足另一个初值问题 $\begin{cases} y'' = 1 + 2xy + 2y^3, \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases}$

13. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点的切线与该点的向径夹角为零；

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l；

(3) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分被切点平分；

(4) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的面积等于常数 a^2；

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方.

14. 设 $y = \varphi(x)$ 是微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = y(a - by)$ 的解，其中 a 和 b 是正常数.

(1) 求出该微分方程的两个常数解；

(2) 从微分方程确定 y 的区间，使得解 $y = \varphi(x)$ 单调增加或单调减少.

15. 在某一人群中推广技术是通过其中已掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N，在 $t = 0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例系数为 $k > 0$，求 $x(t)$ 所满足的微分方程及定解条件.

16. 某物质含有 3kg 水分，现把它放置在容积为 100m^3 的室内. 假定开始时刻室内湿度为饱和湿度的 25%，且在同一温度下，空气的饱和湿度为 0.12kg/m^3. 如果经过一天后该物体失掉所含水分的一半，求该物体在时刻 t 的含水量所满足的微分方程及定解条件.

五、答案或提示

1. (1)三阶；(2)二阶；(3) n 阶；(4)四阶；(5)二阶；(6)一阶.

2. 是.

3. 不是.

4. 略.

5. 略.

6. (1)不是；(2)是；(3)是；(4)是.

7. $y = 2e^{3-x}$.

8. (1) $y'^2+y^2=1$; (2) $xy'=2y$;

(3) $y-y''=x-1$; (4) $(y'')^2=(y'^2+1)^3$.

9. (1) $r=-1$ 或 $r=-2$; (2) $r=1$ 或 $r=4$.

10. (1) $r=-2$; (2) $r=\pm 1$;

(3) $r=2$ 或 $r=-3$; (4) $r=0$ 或 $r=1$ 或 $r=2$.

11. (1) $y=x^3-7$; (2) $y=x^3\pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$;

(3) $y=x^3+\dfrac{55}{27}$ 或 $y=x^3-\dfrac{1}{27}$.

12. 第一个初值问题中的方程关于 x 求导,得 $y''=1+2xy+2y^3$, $y'(0)=1$,因此,这是可能的.

13. (1) $y'=\dfrac{y}{x}$; (2) $\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$;

(3) $xy'+y=0$; (4) $\left|(y-xy')\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$;

(5) $y-xy'=x^2$.

14. (1) $y=0$, $y=\dfrac{a}{b}$;

(2)函数单调增加, $y(a-by)\geqslant 0$, 解得 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{a}{b}$; 函数单调减少, $y(a-by)\leqslant 0$, 解得 $\left(y\geqslant\dfrac{a}{b}\right)\cup(y\leqslant 0)$.

15. $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x),\\ x(0)=x_0.\end{cases}$

16. 解 物体中所含水分挥发到周围空气中的速度,与该物体的含水量成正比,与空气的饱和湿度和周围空气湿度之差成正比.

令 $W(t)$ 表示该物体在时刻 t 的含水量(kg),则 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ 是在 t 时刻的挥发速度. 已知空气的饱和湿度是 0.12kg/m^3,开始时室内湿度是它的 25%,即为 0.03kg/m^3. 因此, t 时刻空气饱和湿度与周围空气的湿度差为 $0.12-\left(\dfrac{3-W(t)}{100}+0.03\right)=0.06+\dfrac{W}{100}=\dfrac{1}{100}(W+6)$, 于是所求微分方程为 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-kW(W+6)$, ($k>0$ 为比例常数)及边值条件 $W(0)=3, W(1)=1.5$.

第二章 初等积分法

一、主要内容

1. 分离变量法

分离变量法是初等积分法中最基本的一种方法，主要用来求解变量可分离的方程.

变量(可)分离方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$ 的方程，称为**变量(可)分离方程**，其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 均为某区间上的连续函数.

解法

(1) 如果有 y_0，使 $h(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 是该方程的常数解；

(2) 如果 $h(y) \neq 0$，就分离变量，将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x,$$

再将上式两边同时积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x + c,$$

这就是该方程的通解.

2. 变量替换法

变量替换法是通过一次或几次变量替换，将所给方程化为变量分离方程或容易求解方程的一种方法. 主要用来求解齐次方程、可化为齐次的方程、一阶线性方程及 Bernoulli 方程等.

(1) 齐次方程.

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为**齐次方程**.

解法

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则该方程可化为变量可分离方程 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$.

(2) 可化为齐次的方程.

形如 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 的方程称为**可化为齐次的方程**，其中 a_1,b_1,c_1 和 a_2,b_2,c_2 都是常数.

解法

若 $c_1=c_2=0$，方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right),$$

这是一个齐次方程；

若 $c_1^2+c_2^2\neq 0$，且 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，可设 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right).$$

再令 $u=a_2x+b_2y$，则方程进一步化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right),$$

这是一个变量分离方程；

若 $c_1^2+c_2^2\neq 0$，且 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，求代数方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 的解，设为 (α,β). 令

$$\begin{cases} X=x-\alpha, \\ Y=y-\beta, \end{cases}$$

则方程可化为

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right),$$

这是关于 X,Y 的齐次方程.

(3) 一阶线性微分方程.

形如 $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ 的方程为**一阶线性微分方程**.