吴振奎 吴旻 吴彬

品数学

清华大学出版社

吴振奎 吴旻 吴彬

品数学

清华大学出版社
北京

内容简介

这是一本数学普及读物，书中汇集了曾在一些杂志上发表的小品文数十篇．这些文章介绍了数学中的一些知识、趣闻、轶事．文章的内容可为大、中学校师生开拓数学视野、了解数学的内容、方法、意义提供某些素材．

图书在版编目(CIP)数据

品数学/吴振奎，吴旻，吴彬．--北京：清华大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-302-22082-4

Ⅰ.①品…　Ⅱ.①吴…②吴…③吴…　Ⅲ.①数学—普及读物　Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第065977号

责任编辑：刘　颖
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：140×203　**印　张**：13.125　**字　数**：327千字
版　　次：2010年5月第1版　**印　　次**：2010年5月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：25.00元

产品编号：033495-01

前　言

十几年前,《中等数学》杂志开设"数海拾贝"栏目,笔者应邀陆续为该栏目撰写了一些数学小品;其间,笔者又相继为台湾《数学传播》杂志写了些东西;此外,还在《自然杂志》、《科学》、《科学世界》、《数学通讯》等杂志发表了一些短文.这些文章涉及了数学中的诸多方面或领域,它们或古典但不失新潮、或前沿却很现实、或抽象但又生动、或深奥但却有趣.这样积少成多、集腋成裘,累计下来已有五十余篇小作见刊.

笔者一直盼望能有机会将它们汇集成册,只是机缘未至.

数学是一片深奥的海洋,一座美丽的花园,一个奇妙的世界.这短短几十篇小文只能作为遨游其中的走马看花般的速览,也仅能算作管中窥豹式的猎奇而已.

若说"数海拾贝"、"数坛揽胜"、"数园撷英"都似乎有些夸张,这里的"贝"、"胜"、"英"或许只能是雾里看花,水中望月般的观赏,单凭这些(本书诸文)要想把它(数学)看得清清楚楚、明明白白、真真切切,似乎有点难(这要凭借您的功力和悟性,以及您的数学功底了).然而慢慢读来,再细细品嚼,您也许会从中尝出些许芳香与甘甜,只要不是苦涩,这便是收获.

当下文坛流行一个"品"字,思来想去本书干脆取名《品数学》以附庸风雅、赶回时髦.

鉴于笔者的学识与功力,此书的草就只能算作是了却我们的一桩心愿而已,尽管我们已经努力,尽管我们十分小心,但错误与缺点在所难免,只有祈望读者的赐教了.

作　者

于 2009 年元旦

数学之美(代序)

社会的进步就是人类对美的追求的结晶.

——马克思

数学,如果正确的看,不但拥有真理,而且也具有至高无上的美.

——罗　素

美是自然.

由于数学是上帝用来书写宇宙的文字(伽利略),因而它们不仅含有真理,也蕴含"至高无上的美"(罗素).大物理学家狄拉克说"上帝使用了美丽的数学来创造这个世界".他称数学是美丽的.

"美"是一个哲学概念.美学是一门社会科学.对于山水、风景、体形、相貌这类自然形成的事物,可以依据大多数人的审美观点直观地说"真美!"或"真丑!";然而对文学、艺术、建筑、园林这类带有人工雕琢痕迹的物件,人们再去欣赏它时,美与不美便是一种抽象的思维、判断过程了,比如欣赏毕加索的画作(图1),这不仅需要观赏者有较高的艺术修养,还要有抽象思维的能力,因为这类所谓立体派画作是将自然物像分解成几何块面,从而从根本上摆脱传统绘画的视觉规律和空间概念(也有人认为这是画家在4维空间作画,即将4维空间的物像用二维图形表现出来).

数学——人类进化过程中创造的学问,它是智慧的积累、知识的升华、技巧的创新,其中也自然不乏美.因为数学正是在不断追求美的过程中发展的.诚然,人类的进步、社会的发展,正是人类不断追求"美"、创造"美"的结晶.

自然界的美可通过眼、耳直接感受,而数学美像其他艺术、文学作品一样,需通过心灵去思维琢磨,发幽探微.

数学之美到底美在哪里?

玛丽·泰瑞勒的画像(毕加索)

窗边的女子(毕加索)

图 1

数学的和谐之美

所谓"数学的和谐"不仅是宇宙的特点,原子的特点,也是生命的特点、人的特点.

——高尔泰

和谐是美妙的.宇宙是和谐的,因而也是美妙的(宇宙的和谐正是宇宙自身不断完善的结果).无论中国古代的哲人庄子,还是古希腊的学者毕达哥拉斯、柏拉图等,皆把宇宙的和谐比作音乐的和谐.

数学的严谨自然流露出它的和谐,为了追求严谨、追求和谐,数学家们一直在努力以消除其中不和谐的东西.比如悖论,它是指一个自相矛盾或与广泛认同的见解相反的命题或结论(一个反例),一种误解,或看似正确的错误命题及看似错误的正确结论.

在很大程度上讲,悖论对数学的发展起着举足轻重的作用,数学史上被称作"数学危机"的现象,正是由于某些数学理论不和谐所致.通过消除这些不和谐问题的研究,反过来却导致数学本身的和谐且促进了数学的发展.这正如数学家贝尔和戴维斯指出的那样:数学过去的错误和未解决的困难为它未来的发展提供契机.

古希腊毕达哥拉斯学派认为宇宙间一切数字现象都能归结为整数或整数之比,然而希伯斯发现腰长为 1 的等腰直角三角形的斜边长不

能用两个整数之比表示(见图 2),这一发现引起毕达哥拉斯学派的恐慌(也使希伯斯为此付出了生命代价),但它却导致了一类新数——无理数的诞生.

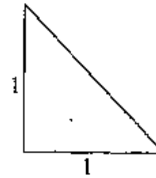
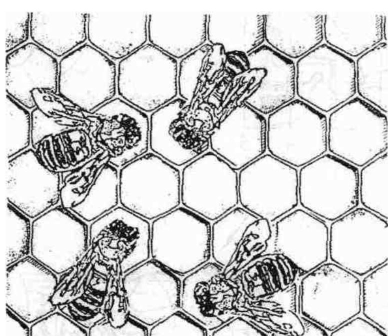


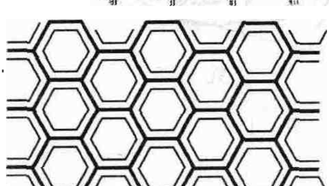
图 2

《几何原本》两千多年来一直被放在绝对几何的地位,哲学家康德等人甚至认为:关于空间的原理是人们先验的综合判断,物质世界必然是欧几里得式的,欧几里得几何是唯一的、必然的、完美的.

当有人试图将欧几里得几何中的第五公设(过直线外一点只能作一条直线与之平行)用其他公理去证明时(以求公设体系简化),不幸都失败了.德国数学家高斯首先意识到:用欧几里得的其他公设去证明第五公设是办不到的.然而俄国学者罗巴切夫斯基和匈牙利的波尔约认为:在选择与平行公设相矛盾的其他公设后,也能建立起逻辑上无矛盾的几何学——非欧几何.尔后,德国数学家克莱因、法国数学家庞加莱等人的工作使得一种更一般的非欧几何——黎曼几何诞生了.

人们很早以前就注意到了蜂房的构造,乍看上去是一些并排且规则摆放的正六边形的"筒",你再仔细观察就会看到,每个"筒"底由三块同样大小的菱形所搭建(见图 3).





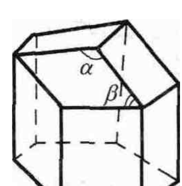


图 3

18 世纪初，法国学者马拉尔迪测量了蜂房底面三块菱形的角度，发现其中的锐角(α)为 $70°32'$，其钝角(β)为 $109°28'$. 法国一位物理学家由此猜测：蜂房的如此结构是建造同样大的容积所用材料最节省的，这一点后来被法国数学家柯尼希证得.

再如，生命现象中的某些最优化结构(比如血管粗细直径之比为 $\sqrt[3]{2}:1$ 等)是生物亿万年来不断进化、去劣存优的结果. 数学也为这些现象找到了可靠的理论依据.

动物的头骨看上去似乎有差异，其实它们不过是同一结构、在不同坐标系下的表现和写真(见图 4)，这是大自然选择和生物本身进化的必然结果(以此观点去看达尔文生物进化，是否会有别样的感觉?).

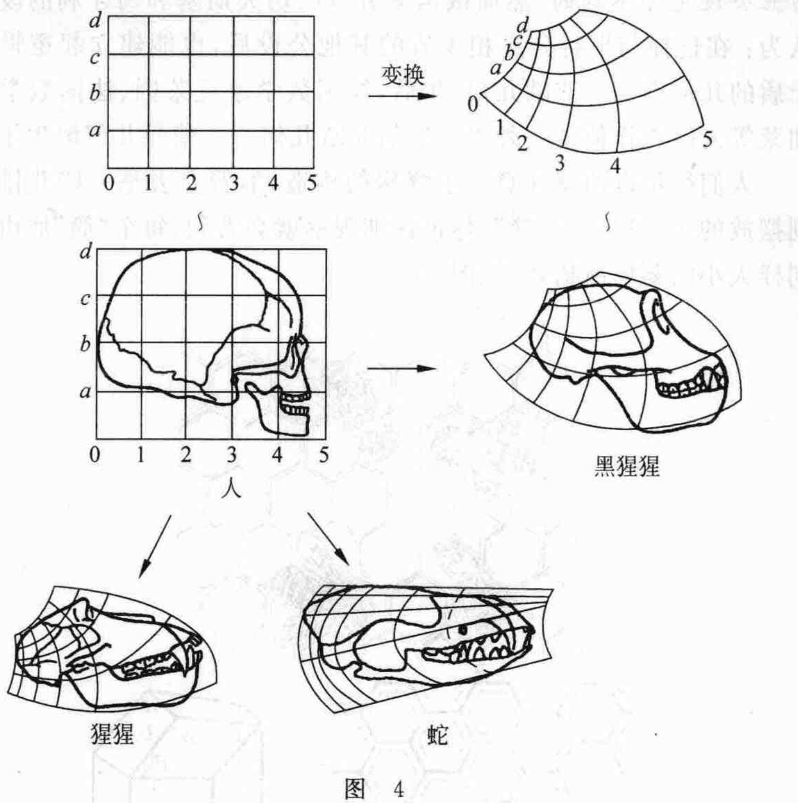


图 4

数学论证了自然界的和谐，反之自然界的和谐也为验证数学的严谨与和谐提供了有力的范例.

数学美的简洁性

数学简化了思维过程并使之更可靠.

——弗莱伊

已故数学家华罗庚教授说过：宇宙之大、原子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之烦……无不可用数学表示.

真理愈是朴素它就愈加简洁，简洁本身就是一种美. 数学之所以用途如此广泛，盖因数学的首要特点在于它的简洁. 数学家莫德尔说：在数学里美的各个属性中，首先要推崇的大概是简单性.

自然界原本就是简洁的，现实世界中光沿直线方向传播——这是光在传播时的最短路径；植物的叶序(叶子在植物茎上的排列顺序)是植物通风、采光的最佳布局；某些攀缘植物如藤类，它们绕着攀依物螺旋式的向上延长，它们所选的螺线形状对于植物上攀路径来讲是最节省的.

大雁迁徙时排成的人字形，它的一边与其飞行方向的夹角是 $54°44'8''$，从空气动力学角度看，这个角度对大雁队伍飞行阻力最小，因而是最佳的(顺便一提：金刚石晶体中也蕴含这种角度). 这些最佳、最好、最省的事例展示了自然界的简洁与和谐. 宇宙万物皆如此，因而作为描述宇宙的文字与工具的数学也是如此.

诗人但丁赞美圆是最美的图形. 太阳是圆的，满月是圆的，水珠看上去也是圆的(指它们的投影)……. 圆的线条明快、简练、均匀、对称. 近代数学研究还发现圆的等周极值性质：*在周长给定的封闭图形中圆所围得的面积最大.*

无论古人，还是今人，人们对圆有着特殊的亲切的情感，俱因圆的简洁和美丽，我国汉代砖刻中就体现了这一点(图 5).

图 5　汉代砖刻中的圆

数学中人们对于简洁的追求是永无止境的：建立公理体系时人们试图找出最少的几条，命题的证明力求严谨简练，计算的方法尽量便捷明快，数学拒绝繁冗. 此外数学符号的不断创立与改进正是

数学追求简洁性的体现.我国仅数码表示的演化就经历了十分漫长的过程(图 6).

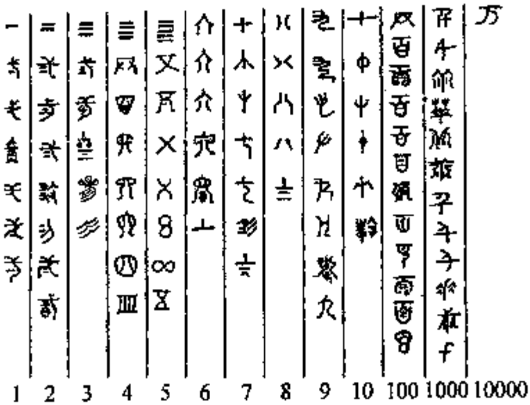


图 6　战国时代前后汉字数码的演化

数学符号与算式可把自然界的朴实本质的东西以最简的形式把它揭示出来.

2000 多年以前,以“百牛大祭”形式庆贺其被发现的直角三角形三边关系的定理——毕达格拉斯定理(在我国称为勾股定理):若直角三角形的三边长为 a,b,c,则有 $c^2=a^2+b^2$.这个看上去十分简单的式子,深刻地揭示了直角三角形三边之间朴实而深邃的关系.它的证明据说有数百种之多(见图 7、图 8).

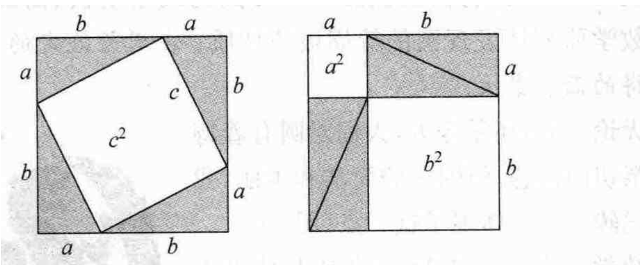


图 7　勾股(毕达哥拉斯)定理的证明

将它推广到三角函数领域则有:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,式子不仅反应了正余弦之间的互补或对偶关系,同时也是对勾股定理的又一诠释.它源于勾股定理,却比勾股定理更具普适性,因为这里角 α 是任意的,反

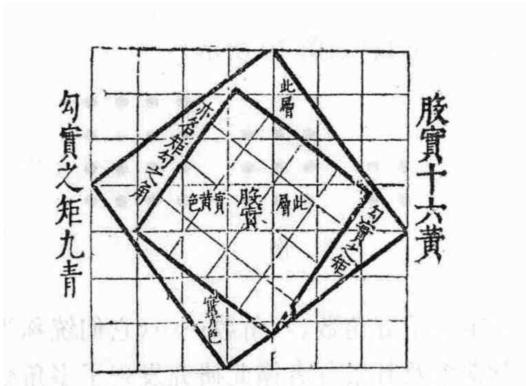


图 8　中国古算书中的勾股定理及其中国证法

观勾股定理(注意这只是在直角三角形的情形成立)不过只是其特例而已,勾股定理表达式的简洁性自不待言,而由此引发的诸多课题,令人目不暇接(如读者有兴趣可见拙作《数学的创造》一书).

数学的形式美

只有音乐堪与数学媲美.

——怀德海

艺术家追求的美中,形式是特别重要的,比如,泰山的雄伟、华山的险峻、黄山的奇特、峨眉山的秀丽、青海的幽深、滇池的开阔、黄河的蜿蜒、长江的浩瀚……常常是艺术家们渲染它们美的不同的形式与角度.

数学家也十分注重数学的形式美,尽管有时它们含义更加深邃,比如整齐简练的数学方程、匀称规则的几何图形,都可以看成一种形式美,这是与自然规律的外在表述有关的一种美.寻求一种最适合表现自然规律的一种方法,是对科学理论形式美的一种追求.

毕达哥拉斯学派非常注重数学的形式美.他们把整数按照可以用石子摆成的形状来分类,比如三角数(见图 9):

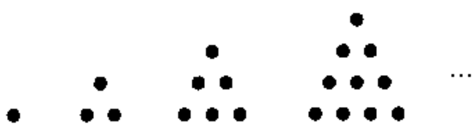


图　9

四角数又称正方形数(如图 10 所示):

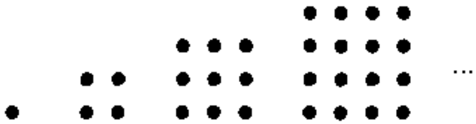


图 10

此外他们还定义了五角数、六角数……(它们统称为多角数).

毕达哥拉斯学派及其崇拜者循此研究发现了多角数的许多美妙性质,比如他们发现:

每个四角数是两个相继三角数之和.

第 $n-1$ 个三角数与第 n 个 k 角数之和为第 n 个 $k+1$ 角数.

尔后的数学家们也一直注重这种多角数的形式美,且从中不断有所发现.

17 世纪初,法国业余数学家费马在研究多角数性质时提出猜测:

每个自然数皆可用至多三个三角数、四个四角数、……、k 个 k 角数之和表示.

高斯在 1796 年 7 月 10 日证明了“每个自然数均可用不多于三个三角数之和表示”后,在日记上写到:“EΥPHKA! num $=\Delta+\Delta+\Delta$”,这里 EΥPHKA 是希腊语,译为“找到了”,这句话正是当年阿基米德在浴室里发现浮力定律后赤身跑到希拉可夫大街上狂喊的话语,这里高斯引用它可见他当时的欣喜之情.

欧拉从 1730 年开始研究自然数表示为四角数之和的问题,43 年后(此时他已双目失明)他才给出“自然数表示为四个四角数之和”问题的证明. 此前,1770 年拉格朗日利用欧拉的一个等式已经证明了该问题.

1815 年法国数学家柯西证明了“每个自然数均可表示为 k 个 k 角数之和”的结论.

人们把质数(又称素数,是只能被 1 和它本身整除的数)视为特殊的元素和单位,利用它进行许多数学研究,比如整数可以唯一的分解成若干质数及它们的幂的乘积. 著名的哥德巴赫猜想是指“大于等于 6 的偶数,可表示为两个奇素数之和”(俗称 1+1 问题).

比如：6＝3＋3，8＝3＋5，10＝3＋7，…

这个貌似简单的问题却让数学家们大伤脑筋，人们至今得到的最好的结果是我国已故数学家陈景润所得到的：大偶数可表示为一个质数与一个至多是两个质数乘积的数之和(俗称 1＋2)。

幻方——一种极具魅力的数学游戏，也是人们追求数字形式美的生动纪实，关于它有许多有趣神奇的传说。

据称伏羲氏王天下时，黄河里跃出一匹龙马，马背上驮了一幅图，上面有黑白点 55 个，用直线连成 10 个数，后人称之为“河图”。又传夏禹时代，洛水中浮出一只神龟，背上有图有文，图中有黑白点 45 个，用直线连成 9 个数，后人称它为“洛书”(见图 11)。两图中的黑点组成的数都是偶数，古称阴数，白点表示的数为奇数，古称阳数。其中“洛书”译成今天的符号便是一个 3 阶幻方(见图 12)。它的三行、三列及两条对角线上的数字和都相等(称为“幻和”)。

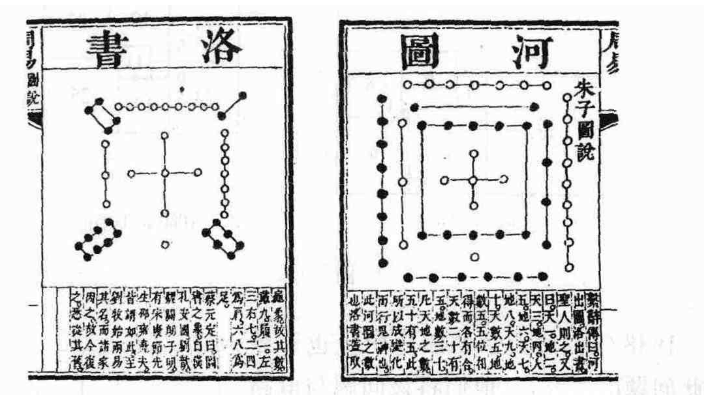


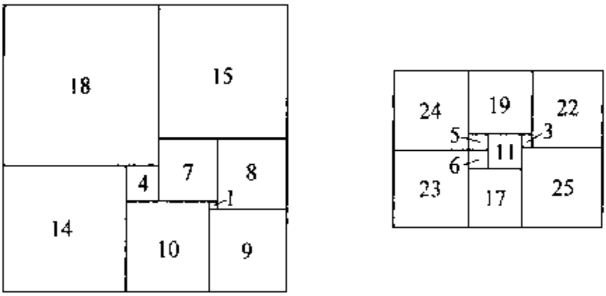
图 11

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 12　洛书今译

“幻方”国外又称“魔方”，我国南宋数学家杨辉称它为“纵横图”．杨辉曾给出 5 到 10 阶的纵横图．关于幻方的研究还有许多话题，且至今不衰．

完美正方形是指“一个可被分割成有限个规格彼此不一的小正方形的正方形”．1923 年，卢沃大学的鲁兹维茨(S. Ruziewicz)教授提出这样一个问题：一个矩形能否分割成一些大小不等的正方形？此问题引起学生们的极大兴趣．直到 1925 年，莫伦找到一种把矩形分割成大小不同的正方形的方法，且给出了 32×33 的矩形被分割成 9 个正方形和 47×65 的矩形被分割成 10 个正方形的例子(分割成的正方块的个数称为阶)，见图 13．这种矩形被后人称为“完美矩形”(见图 13，图中数字为该正方块的边长)．



9阶完美矩形　　10阶完美矩形

图　13

1938 年剑桥大学的四位学生也开始了此问题的研究，且他们将该问题与电路网络理论中的基尔霍夫定律联系起来，并借助于“图论”的方法去寻找解答．

1939 年斯布拉格利用两个完美矩形成功的拼接并构造出一个 55 阶的完美正方形．这是世界上第一块完美正方形．

大约 20 多年以后，1962 年荷兰斯切温特技术大学的杜伊威斯汀在研究完美正方形构造时，给出一个 21 阶的完美正

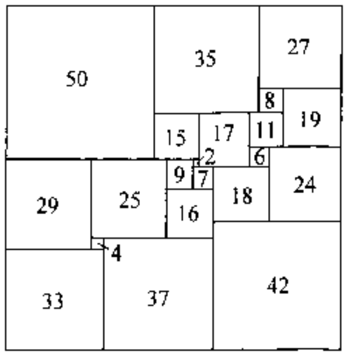


图 14　21 阶完美正方形

方形(见图 14),且同时证明了不存在 20 及 20 阶以下的完美正方形.关于完美正方形的话题还有很多,限于篇幅不多谈了.

数学美的奇异性

美在于奇特而令人惊异.

培　根

审美趣味和数学趣味是一致或相同的.

——贝　尔

英国哲人培根说过:没有一个极美的东西不是在匀称中有着某种奇特,他又说:美在于奇特而令人惊异.

数学中有许多奇异的现象,表面上看它们往往与人们预期的结果相反,但在令人失望之余,也给了人们探索它们的动力(这是人类与生俱来的冲动所致)和机遇.

奇异中蕴含着奥妙与美丽,奇异中也蕴含着真理与规律.

让我们来看看数学中的这些奇异,领略一下其中的奥妙.

令人难以置信:数 $e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743.999999999999\cdots$ 几乎是一个 18 位的整数,换言之,它的值与整数 262537412640768744 仅差 10^{-12}.就是说 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 与该整数的差一直算到小数点后第 12 位之前都是 0.

又如:$y=\sqrt{221x^2+1}$ 当 $x=1,2,3,\cdots,19162705302$ 时 y 都不是整数,直到 $x=19162705303$ 时,y 的值才会是整数(此时它的值为 278354373540).

下面的两个事实也耐人寻味(貌似但却不"神"似):

不定方程 $3x^2-y^2=2$ 有无数组有理解,但方程 $x^2-3y^2=2$ 却没有有理解.

方程 $x^2+y^2=1$ 有无数组有理解,但 $x^2+y^2=3$ 却没有有理解.

众所周知,满足毕达哥拉斯定理 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数有无穷多组(它们称为勾股数组).比如其中的一种表达式为

$$a=2mn,\quad b=m^2-n^2,\quad c=m^2+n^2\,(m,n\text{ 为正整数}).$$

然而令人不解的是:$a^3+b^3=c^3,a^4+b^4=c^4,\cdots,a^n+b^n=c^n$(这里 $n\geqslant3$)却无(非平凡)整数解,这个命题被称为"费马猜想"(1640 年前

后由费马提出)，直到 300 多年后的 1994 年，此猜想才被数学家怀尔斯和他的学生泰勒证得，其间，无数数学家曾为此付出过心血和汗水.

我们再来看看另外一个例子，所谓"$3x+1$"问题是一个貌似简单却难度极大的数学问题，问题的叙述并不复杂，它是这样的：

任给一个自然数，若它为偶数将它除以 2，若它为奇数将它乘以 3 后再加 1，……，如此下去经有限步骤后其结果必为 1. 比如：

$$26 \xrightarrow{\div 2} 13 \xrightarrow{\times 3+1} 40 \xrightarrow{\div 2} 20 \xrightarrow{\div 2} 10 \xrightarrow{\div 2} 5 \xrightarrow{\times 3+1} 16 \xrightarrow{\div 2} 8 \xrightarrow{\div 2} 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{\div 2} 1.$$

图 15 给出某些整数经过"$3x+1$"运算的路径和结果.

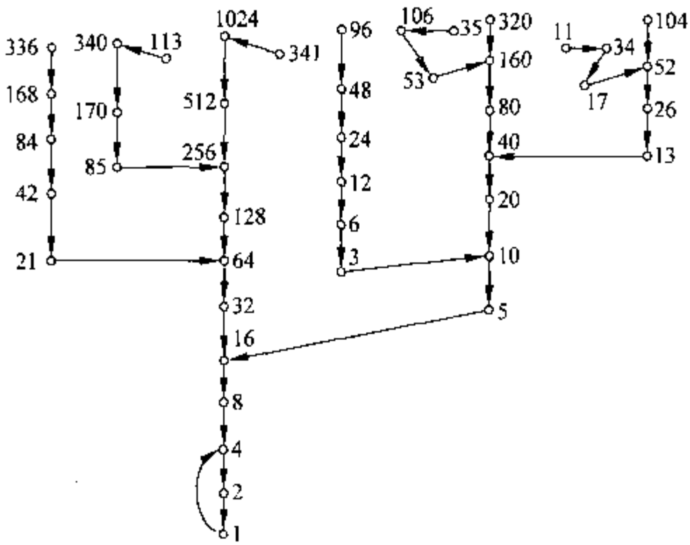


图 15　某些数经 $3x+1$ 运算的路径

运算的过程也许并不复杂，然而要去严格证明它却远非易事，难怪有人声称它的难度与"哥德巴赫猜想"相当，甚至更难.

提起"拉丁方"(在一个 $n\times n$ 的方格中添上不同的拉丁字母)人们自然会想到数学家欧拉，正是他开始了这个问题的研究.

据说普鲁士国王腓德烈大帝在阅兵时曾向指挥官(后来传到欧拉那里)提出一个问题：有 3 个兵种，每个兵种有 3 个不同军衔的军官

(共 9 名),打算把他们排成一个 3×3 的方阵,使每行、每列既要有 3 种不同兵种的军官,还要有 3 种不同军衔的军官,怎样排?

3×3、4×4、5×5 方阵问题相继被解决,对于 6×6 方阵人们始终未能给出解答. 欧拉对此甚感兴趣,为了研究方便,欧拉用大写拉丁字母 A,B,C,D,E,F 表示 6 个兵种,用小写拉丁字母 a,b,c,d,e,f 代表 6 种军衔,那么这些不同兵种的军官可用 Aa,Ab,Ac,Ad,Ae,Af,Ba,…,Ff 代表,如是,问题变为:如何把这些双写字母放到 6×6 方格中,使得每行每列既要出现 A,B,C,D,E,F 又要出现 a,b,c,d,e,f,同时各个双写字母均出现,且仅出现一次. 这种方阵称为正交拉丁方,也称"欧拉方阵". 如果把这种方阵的行或列数称为阶的话,欧拉经研究后猜测:$4k+2$ 阶(k 是 0 或自然数)的正交拉丁方不存在(它刊登在 1782 年荷兰的一本杂志上).

1901 年,法国数学家塔利用穷举法证明了 6 阶($k=1$ 的情形)正交拉丁方不存在.

然而同样令人意想不到的是:半个世纪后,1959 年数学家玻色和施里克汉德却给出一个 22 阶($k=5$ 的情形)正交拉丁方. 稍后,帕克又证明了 10 阶正交拉丁方存在且构造了它(见图 16).

Aa	Eh	Bi	Hg	Cj	Jd	If	De	Gb	Fc
Ig	Bb	Fh	Ci	Ha	Dj	Je	Ef	Ac	Gd
Jf	Ia	Cc	Gh	Di	Hb	Ej	Fg	Bd	Ae
Fj	Jg	Ib	Dd	Ah	Ei	Hc	Ga	Ce	Bf
Hd	Gj	Ja	Ic	Ee	Bh	Fi	Ab	Df	Cg
Gi	He	Aj	Jb	Id	Ff	Ch	Bc	Eg	Da
Dh	Ai	Hf	Bj	Jc	Ie	Gg	Cd	Fa	Eb
Be	Cf	Dg	Ea	Fb	Gc	Ad	Hh	Ii	Jj
Cb	Dc	Ed	Fe	Gf	Ag	Ba	Ij	Jh	Hi
Ec	Fd	Ge	Af	Bg	Ca	Dh	Ji	Hj	Ih

图 16　10 阶正交拉丁方

这之后,玻色和施里克汉德又证明:除了 $k=0,1$ 之外其他 $4k+2$ 阶正交拉丁方都存在. 欧拉的猜想被彻底地否定了.