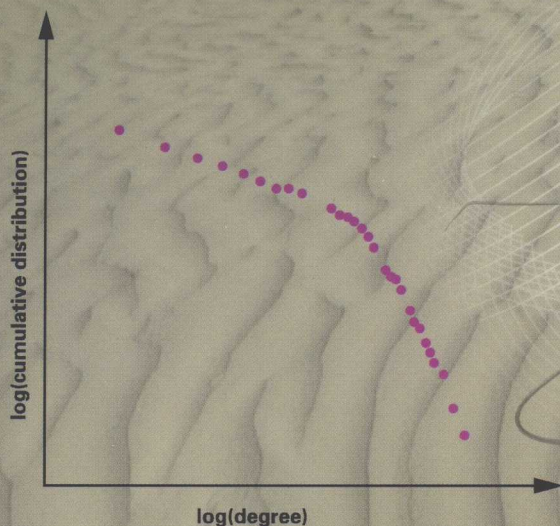


燕园科技学术文库



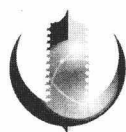
实证研究复杂网络的 拓扑与动力学行为

SHIZHENG YANJIU FUZA WANGLUO DE
TUOPU YU DONGLIXUE XINGWEI

韩定定 钱江海 马余刚 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



燕园科技学术文库

实证研究复杂网络的拓扑与 动力学行为

韩定定 钱江海 马余刚 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

经过十几年的发展,复杂网络的研究正蕴蓄着一个新的突破,它将从小世界性和无标度性基础上的统计特性研究逐渐向更深层次的物理规律进发,它将更注重网络结构与功能之间的联系,并致力于复杂网络理论指导工程应用的实现。本书涵盖了复杂网络研究的4个方面:实证研究、建模研究、动力学行为研究、应用研究。其中,实证研究是最基础、最首要的一方面。在此基础上,可以进一步探索统计参量之间的相互关系,认识和掌握各种内在规律。本书着眼于航空网络、电路网络等典型的非线性复杂网络系统,将它们作为实证研究对象,结合应用图论和拓扑学、非线性科学、现代统计物理学、现代控制论、工程技术上的网络设计原理等现代科学理论,对复杂网络的特殊性和普适性进行了深入的研究;探讨了网络结构与功能之间的关系,如网络的拓扑结构与网络的容错能力之间的关系;分析了复杂网络在动态演化期间,其拓扑特性和动力学性质随时空变化而展示的复杂行为。

本书适合理工类院校的研究生、博士后和教师阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实证研究复杂网络的拓扑与动力学行为/韩定定,钱江海,马余刚著. —北京:北京大学出版社,2012.5

(燕园科技学术文库)

ISBN 978-7-301-19865-0

I. ①实… II. ①韩… ②钱… ③马… III. ①计算机网络—网络拓扑结构—研究 ②计算机网络—动力学—研究 IV. ①TP393.02

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第257648号

书 名: 实证研究复杂网络的拓扑与动力学行为

著作责任者: 韩定定 钱江海 马余刚 著

责任编辑: 程志强

标准书号: ISBN 978-7-301-19865-0/TN·0078

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号100871

网 址: <http://www.pup.cn> <http://www.pup6.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电子邮箱: pup_6@163.com

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

650毫米×980毫米 16开本 12.5印张 288千字

2012年5月第1版 2012年5月第1次印刷

定 价: 35.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024

电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

“世界万物都是普遍联系的”，这一哲学观点似乎早已被人们所熟知，但是若要问，它们是如何相互联系的？这一科学问题却很少有人能够说得明白。想象我们这个庞大的社会关系网、经济网络，想象全球的互联网、交通航空网络、智能电网、无线通信网，如果你就是那“万能的主”，如果能够宛如在高空一览众山小般鸟瞰这一切，它们会是什么样子呢？为什么这些庞大的自治系统可以如此完美地协同工作，但有时又会让我们感到措手不及？如交通拥塞，病毒传播，隐私暴露，疾病肆虐，停电突发等，是什么导致了这些问题的发生？多少年来，人们对这些一无所知。

直到大约十年前，Nature 和 Science 上的两篇开创性文章，即《“小世界”网络的群体动力学行为》和《随机网络中标度的涌现》彻底改变了人们对自身世界，特别是自组织演化系统的了解。原来地球上任意两个人之间的距离是“6”，即平均中间只要通过5个人的传递，一个人就能与地球上任意的另一个人建立联系；再者，各类网络的演化都遵从所谓的“富者更富”原则。在这两篇开创性论文发表后，复杂网络理论迅速渗透到数理学科、社会学科、生命学科、工程学科等众多不同的领域，以研究各种看上去互不相同的复杂网络之间的共性以及处理它们的普适方法。关于复杂网络研究的文献如雨后春笋般地涌现在 Nature、Science、PNAS 等国际重要科学期刊上，同时，国内早期出版的关于复杂网络的书籍，如汪小帆、李翔、陈关荣的《复杂网络理论及其应用》，郭雷、许晓鸣的《复杂网络》，何大韧、刘宗华、汪秉宏的《复杂系统与复杂网络》等，也收录了其中的大部分经典研究成果和自身的原创性成果。

然而十年后的今天，我们回顾这些研究成果时，不仅没有欣慰之感，而且还被更多的问题所困惑，被更多的挑战所激励。事实上，复杂网络的

研究可能正蕴蓄着一个新的突破，它将从小世界性和无标度性基础上的统计特性研究逐渐向更深层次的物理规律进发，它将更注重网络结构与功能之间的联系，并致力于复杂网络的理论指导工程应用的实现。这使人们迫切地感到，有必要对复杂网络研究过程的发展规律全面地把握，但又不能笼统地将已有的理论知识罗列，因为在发展如此之快的学科面前，单纯地将知识分类进行介绍的方式无法紧跟不断涌现的新理论，从而无法让读者把握整个学科的发展概况。事实上，复杂网络的研究始于实证，兴于模型及其动力学行为，从而最终会使两者结合并指导工程应用。然而，根据这种发展历程为主线来组织的复杂网络书籍并未见到。特别是，针对复杂网络研究内容中的第一个、也是最基础的“实证研究”进行探讨的书籍也不曾见到。本书作者曾有幸亲历了整个复杂网络的发展历程，并着眼于航空网络、电路网络等典型的非线性复杂系统，把它们作为实证研究对象，结合运用图论和拓扑学、非线性科学、现代统计物理学、现代控制论、工程技术上的网络设计原理等现代科学理论，对复杂网络的特殊性和普适性进行了深入的研究；探讨了网络结构与功能之间的关系，如网络的拓扑结构与网络的容错能力之间的关系；同时分析了复杂网络在动态演化期间及其拓扑特性和动力学性质随时空变化而展示的复杂行为。

本书所包含的内容都是作者近几年的研究成果，而不涉及其他内容的叙述，这些内容的组织顺序恰好与复杂网络理论整体发展的历程和规律相吻合。可以说，本书是整个复杂网络发展的一个缩影。

本书是在一个年轻的研究团队的各个成员的共同努力下完成的，他们是钟慧敏、徐晓萍、阮军、石山、杨欢、陈趣、朱亮等，在此表示感谢！老一辈的科技工作者给予这个团队工作上的大力支持，如中国科技大学汪秉宏教授、扬州大学何大韧教授、上海交通大学汪小帆教授、华东师范大学束金龙教授等，无法一一列举，在此向他们致敬！

本书作者十分感谢自己亲人所营造的温馨而无忧无虑的家庭氛围！另外，第一作者要把此书敬献给母亲刘君君女士，以她的坚强、勤劳、无私

告诉普天下的人们：母爱最伟大！

本书的出版得到了北京大学出版社及其编辑程志强的大力支持，在此致以深深的谢意！

本书受到国家自然科学基金项目“开放式空间加权网络的拓扑演化及其优化设计”（项目号：11075057）的资助。

韩定定，华东师范大学复杂网络与信息系统研究室
马余刚、钱江海，中国科学院上海应用物理研究所

2011 年冬

目 录

第 1 章 绪论	1
参考文献	5
第 2 章 复杂网络的涨落尺度	6
2.1 引言	6
2.2 涨落尺度	7
2.2.1 时间涨落尺度	7
2.2.2 系综涨落尺度	9
2.3 普适指数	10
2.3.1 $\alpha = 1/2$ 的情况	10
2.3.2 $\alpha = 1$ 的情况	11
2.3.3 其他 α 值	12
2.4 随机游走模型	13
2.5 实证研究下载网的演化机制	15
2.5.1 下载网的无标度性	15
2.5.2 下载网的涨落特性及其形成机制	21
参考文献	28
第 3 章 开放式航空网络的复杂性	31
3.1 航空网络的特性描述	31
3.2 航空网络的空间性	33
3.2.1 测度参量	33
3.2.2 加权网络模型和空间网络模型	38
3.3 对于特定航空公司的网络拓扑及其相关性特征研究	49

3.3.1	欧洲航空公司的航空网络数据分析	50
3.3.2	欧洲航空公司的航空网络拓扑结构	54
3.3.3	欧洲航空公司的航空网络权重特征	59
3.3.4	欧洲航空公司的航空网络关联性质及动力学行为	60
3.4	基于预期流优化的空间网络引力模型	66
3.4.1	引力公式和预期流	66
3.4.2	空间网络的引力模型	68
3.4.3	引力模型的统计特征	71
3.4.4	引力模型的权度相关性	80
3.4.5	中国城市航空网的模拟仿真	89
3.5	开放式中国航空网的双段幂律涌现	92
3.5.1	双段幂律普适模型	94
3.5.2	实证研究中国航空网的演化	101
3.5.3	结论	104
	参考文献	105
第4章	时间演化尺度下社会经济网络的结构与动力学分析	112
4.1	引言	112
4.2	金融危机下的经济网络	115
4.3	金融危机下的中国证券网络与美国证券网络	119
4.3.1	引言	119
4.3.2	股市全连网的拓扑涨落	120
4.3.3	基于最大生成树的股市相关性网络演化机制	137
4.4	基于 K-means 聚类算法的证券网络社团结构的分析	150
	参考文献	154
第5章	电路网络的拓扑及鲁棒控制	160
5.1	引言	160
5.2	大型电路网络的小世界性和无标度性	162

5.2.1 无线接收机电路的 WS 小世界拓扑	162
5.2.2 无线接收机电路的无标度特性	166
5.3 电路网络的控制:鲁棒性和脆弱性	170
5.3.1 复杂网络的鲁棒性	170
5.3.2 静态鲁棒性的解析计算	175
5.3.3 ID 攻击策略及其仿真	178
参考文献	180
第 6 章 复杂网络与信息物理融合系统	185
参考文献	188

第 1 章 绪 论

复杂网络在近 10 年的发展中掀起了网络时代科学研究的热潮，受到了来自科学与工程等各个领域的强烈关注，为人们理解真实世界提供了全新的研究思路和研究方法。复杂网络可以用来描述从技术到生物直至社会各类开放复杂系统的骨架，同时也是研究它们拓扑结构和动力学性质的强有力工具。因此，人们致力于研究、揭示节点数众多、连接结构复杂的实际网络的整体特性，尤其是网络拓扑结构与功能之间的关系、与网络动力学行为之间的关系、结构与功能的形成机制、演化规律等。近年来，复杂网络理论在保持向广度发展的同时，渐趋于集中向深度发展^[1]，如网络基本特性的描述更加细致，分布趋势的拟合评价更加严格，与网络研究相结合的理论日益丰富和深刻等。人们提出了网络增长方式的新机制，构建更为切合现实的模型^[2]；动力系统同步方面也从仅关注结果转向对过程的研究^[3]；链路预测成为复杂网络应用的一个热点方向^[4]；信息物理系统与复杂网络的结合也初露端倪。

复杂网络的研究包含了实证研究、建模研究、动力学行为研究、应用研究等，其中，实证研究，分析真实网络统计特征，是最基础、最首要的一方面，在此基础上，进一步探索统计参量之间的相互关系，并认识和掌握各种内在规律。1999 年，Barabasi 等科学家在实证研究了因特网之后，提出了著名的 BA 无标度网络模型^[5]，由此开创了复杂网络领域的研究。相继地，万维网、电力网、科学家合作网、演员合作网、生物网等许多实际复杂网络的节点度分布都被证实具有无标度特性。本课题组从现实网络中寻找了航空网络、电路网络、科技文章下载网、证券网络等典型的非线性复杂网络系统作为实证研究对象，结合应用图论和拓扑学、非线性科学、现代统计物理学、现代控制论、工程技术上的网络设计原理等现代科

学理论,对复杂网络的特殊性和普适性进行了深入的研究;探讨了网络结构与功能之间的关系,如网络的拓扑结构与网络的容错能力之间的关系;并分析了复杂网络在动态演化期间,其拓扑特性和动力学性质随时空变化而展示的复杂行为。

当然,实证研究结果表明,许多实际网络同时具有小世界效应^[6]和无标度特性^[5],但现有的网络理论模型并不能很好地描述和理解实际网络。通过对复杂网络动力学性质的研究,人们希望能更好地了解 and 解释真实网络所呈现的各种复杂动力学现象,可以建立更真实地反映现实世界网络特性的模型,并设计一个具有良好性能的网络,使得网络理论为人们所用。

网络描述了系统的本质结构特征。对于一个复杂的系统而言,系统内节点自身的属性、节点间的相互作用以及节点组成的复杂网络都有可能是动态变化的,产生的网络结构复杂性与连接多样性、网络的演化、节点复杂性与多样性以及综合的复杂性体现出动力学问题的丰富内涵。为了理解基于复杂网络的系统动力学行为,并将其运用到对于实际网络的分析和描述中,需要重点关注以下几个问题。

(1) 时间演化。合作者网络的动态演化性质最早得到了关注^[7],以年为时间单位,先后对顶点(即研究者)数的时间演化、总文章数的时间演化、度分布的时间演化稳定性以及平均度值随时间的变化等做了讨论,进行了不同时间点的网络的平均最短距离和平均集聚程度等演化行为的分析。关于WWW网络的演化性质,也有学者对顶点数目随时间的演化,边的增加与更新做了统计分析。此外,还有更重要的针对网络结构演化行为的统计。

(2) 涨落特性。涨落是普遍现象,它存在于很多不同的领域,如核裂变或者强子的产生。涨落主要是由复杂系统内部或者外部的驱动力所引起的^[8],方差和平均流量之间存在幂律关系。同时,涨落也可能与临界行为或自组织临界有一定的联系。而网络拓扑随时间演化的过程中,网络节点的流量随着时间不停地变化,涨落也是不可避免的。对于涨落的研究是复杂网络动力学的一大重要方向。

(3) 鲁棒性。鲁棒性是指一个系统即使面临着内部结构或外部环境的改变时,也能够维持其功能的能力,所以从某种角度来看,鲁棒性是复杂网络自身演化的一种动力学行为,这个概念的提出具有十分重要的实际意义。鲁棒性直接影响着网络上层的运行效率。在已建立的网络结构基础上,以网络攻击理论来讨论对传染病的控制是十分紧迫并具有实际意义的。鲁棒性,或者说容错能力、抗毁性对于生物基因组成的信息网络,在随机性变异的影响下,遗传信息的健壮性复制,也具有重要的意义。同时对信息网络的生存能力也具有相当的重要性。

(4) 传播、拥塞与博弈。传播是动力学的典型问题,特别是病毒的传播,常使用 SIR 和 SIS 模型^[9],与网络结构、网络演化均密切相关。在传播过程中,拥塞与博弈行为之间的关系是研究关注的焦点^[10]。在社会环境、自然环境中,普遍存在着参与者对于有限资源的相互竞争行为,复杂网络上拥塞与博弈的研究有助于更好地理解传播动力学,进而有效地避免拥塞,更合理地利用资源。

为了更好地发掘网络拓扑和动力学特性,本课题组针对特定问题做了大量的研究工作,取得了一系列重要成果。本书将完整呈现我们做出的努力和已经取得的成果。本书其他各章的主要内容介绍如下。

第2章,主要讨论复杂系统的涨落尺度。其中,将给出涨落尺度的基本定义及具体分析,分析涨落尺度指数的普适情况,并引入随机游走模型模拟涨落形成的机制。最后,将结合本课题组的工作,分析科技下载网的无标度特性、涨落特性及其形成机制,首次从 Zipf 定律、Pareto 定律和 Tsallis 熵等三个不同角度对下载网的下载频率分布进行自洽地研究,发现下载频率的分布律可用幂率分布来描述,而 Tsallis 非广延统计能解释其起因,同时下载频率对应的等级排序分布满足 Zipf 定律。实证研究信息检索网络的群体涨落动力学介于系统内部涨落和外部涨落之间,发现网络的涨落尺度的普适分类并非只是 $1/2$ 或 1 ,从而加深我们对互联网传输动力学



的自相似、自组织及其它复杂行为等问题的认识,对缓和通讯网络上日益严重的拥塞可能具有应用价值。

第3章,主要讨论开放式航空网络的复杂性,环境对其结构和功能具有重大影响。对开放式空间网络的研究是本课题组的主要研究方向,拥有大量创新性成果。文中将介绍空间网络的一般模型,并结合航空网络的特征,给出对特定的航空网络——奥地利航空的实证分析结果。此外,还从优化网络效益的角度出发,提出了基于预期流优化的空间网络引力模型,详细分析了该模型的拓扑及空间结构特性、权度相关性,并使用该引力模型模拟仿真了真实的中国城市航空网,定量验证了模型的正确性。该章最后提出了一个可能的模型来实现双端幂律分布,该模型包含了对适应度和噪声涨落的考虑,揭示了复杂系统中“双段”幂律分布的形成机制,提出了刻画复杂系统演化的普适模型。事实上,那些具有截断特征的一类幂律分布很可能都服从我们模型的机制,只是它们的双段特征不明显而已。并首次引入经济因素研究航空网络,实证支持所提出的模型。

第4章,主要讨论不同时期社会经济网络的结构和动力学特性。首先给出了经济网络研究面临的新挑战。其次,针对2007年爆发的全球性金融危机,构建了股市全连网和股市相关性网络,分析了中国证券网络和美国证券网络在危机下的不同表现。最后我们用 k -means 标准对证券全连网进行了聚类分析,并基于经济网络是邻域重叠的这一事实,简述可用于划分邻域重叠社团结构的算法,这将是本课题组继续努力的方向。

第5章,主要讨论电路网络的拓扑及鲁棒控制。文中首先揭示了大型电路网络的小世界性和无标度性。从提供电路网络的稳定性出发,对其静态鲁棒性做了解析计算,并应用 ID 删除法模拟仿真了电路网络在面对随机故障和蓄意攻击时的不同表现。

第6章,主要讨论了复杂网络和信息物理系统(CPS)的融合。作为科学技术领域一个崭新的发展方向,CPS 急需复杂网络这样的理论来把“信

息”(cyber 部分)和“物理”(physical 部分)包含在统一框架下。针对未来复杂网络和信息物理系统的融合,我们提出了它们可能的融合方式。

参 考 文 献

- [1] 吕琳媛,陆君安,张子柯. 复杂网络观察[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2010(7).
- [2] Barabási A L. Ravasz E. Vicsek T. *Deterministic scale-free networks*[J]. *Physica A*, 2001(229):559~564.
- [3] Liu H. Chen J. Lu J A. *Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings*[J]. *Physica A*, 2010(389):1759~1770.
- [4] Lü L. Zhou T. *Link prediction in weighted networks; the role of weak ties*[J]. *Europhys Lett*, 2010(89):18001(7).
- [5] Barabási A L. Albert R. *Emergence of scaling in random networks*[J]. *Science*, 1999(286):509~512.
- [6] Watts D J. Strogatz S H. *Collective dynamics of small-world networks*[J]. *Nature*, 1998(393):440~442.
- [7] Barabási A L. Albert R. Jeong H. *Scale-free characteristics of random networks: The topology of the World Wide Web*[J]. *Physica A* 2000(281):69~77.
- [8] Algallo de Menezes M. Barabasi A L. *Separating Internal and External Dynamics of Complex Systems*[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2004(93):068701~068704.
- [9] Moore C. Newman M. *Exact solution of site and bond percolation on small world networks*[J]. *Phys. Rev. E* 2000(62):7059~7064.
- [10] 方锦清,汪小帆,郑志刚. 网络科学的理论模型及其应用课题研究的若干进展[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2008(5).

第 2 章 复杂网络的涨落尺度

2.1 引言

由大量具有突发群体行为的单元组成的交互系统通常被认为具有复杂性。无论是在工程科学、物理学、生物学领域,还是在社会学领域,这类复杂系统都是普遍存在的。多学科交叉使得人们能够发现一些普遍的现象,例如,(多重)分形、尺度不变性^[1,2],以及相关的 Pareto 或 Zipf 定律^[3,4],自组织和临界行为等。

本章研究复杂系统的涨落尺度特性。这类尺度关系通常被经济学家称为 Taylor 定律,以纪念 1961 年 L. R. Taylor 发表的关于自然人口的论文,这篇论文在该领域有很大的影响力^[5]。该定律指出,对于任意一个确定的物种,如果平均人口变化范围很大,那么种群规模的涨落(以标准差进行刻画)能近似表示为平均人口的 α 次方乘以一个常数,即

$$\text{涨落} \approx \text{常数} \times \text{平均人口}^\alpha$$

这个现象最早是由 H. Fairfield Smith 在 1938 年发现的^[6]。他在自己的论文中针对农田产量给出了相同的等式,但是,该论文却远没有 Taylor 的工作受到的关注度高。de Menezes 和 Barabási 在研究复杂网络动力学时也得到了这个关系式^[7],物理学界将其称为“涨落尺度”(FS)^[8]。这里研究的是不同节点的时间涨落和网络的平均流量。

大量研究工作表明,实际的复杂系统,其涨落指数 α 的值通常在

$[1/2, 1]$ 间变化,而这两个极限值能通过一些简单的动力学过程得到。

本章首先给出涨落尺度(fluctuation scaling)这一概念,分别阐释时间涨落尺度(temporal fluctuation scaling)和系综涨落尺度(ensemble fluctuation scaling),并概述涨落指数的普适类(universality classes)。此外,还将引入随机游走模型来具体解释涨落尺度的成因。最后,重点介绍本课题组在对科技下载网的实证研究中取得的一系列有益成果,分析下载网的无标度性、涨落特性及其形成机制。

2.2 涨落尺度

文中主要考察流量 f ,以及其平均值和标准差之间的关系。通过观察 f 的行为来衡量这种依附关系。也就是说,对于同一个动态变量,如果它在不同情况下具有不同的平均值,那么标准差将如何跟随均值发生变化?

要确定这种依附方式有很多的实现形式。可以是在各个时刻,同时对一个大型复杂系统的不同元素(节点、子系统)进行观察,计算每个子系统的时间平均及标准差,并比较各个子系统:是否具有较大均值 f 的子系统,其涨落效应也更为明显?

有时 f 可能并不是时间相关的,而仅是各子系统的某个固定值。在这种情况下,就要对具有相同规模的子系统取总体平均,然后用标准差来衡量规模相同的子系统中 f 的变化情况。

2.2.1 时间涨落尺度

假设在一段连续的时间内,测量某个系统内节点 i 的流量 f_i 。对于有

限时间 $[t, t + \Delta t)$, f_i 分解为多个随机变量之和, 这些随机变量可以是系统内部因素, 或是类似外来数据包通过路由器这样的外部因素。

$$f_i^{\Delta t}(t) = \sum_{n=1}^{N_i^{\Delta t}(t)} V_{i,n}^{\Delta t}(t) \quad (2-1)$$

这里 $N_i^{\Delta t}(t)$ 是指 $[t, t + \Delta t)$ 内节点 i 所受到的外部及内部因素数目。例如, 股票市场中第 i 个公司的股票在 $[t, t + \Delta t)$ 交易了 $N_i^{\Delta t}(t)$ 次, 第 n 宗交易的值为 $V_{i,n}^{\Delta t}(t)$, 那么股票 i 的总交易量就能用式(2-1)进行计算。

平均流量 $\langle f_i^{\Delta t} \rangle$ 可由下式计算:

$$\langle f_i^{\Delta t} \rangle = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} f_i^{\Delta t}(q\Delta t) = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{n=1}^{N_i^{\Delta t}(q\Delta t)} V_{i,n}^{\Delta t}(q\Delta t) \quad (2-2)$$

其中, $Q = T/\Delta t$, T 为测量的总时间。从定义中易知, $\langle f_i^{\Delta t} \rangle = \Delta t \langle f_i^{\Delta t=1} \rangle$, 所以用 $\langle f_i \rangle$ 来简化表示 $\langle f_i^{\Delta t=1} \rangle$ 。

在任何时间尺度下, 都可由平均流量求得方差:

$$\sigma_i^2(\Delta t) = \{[f_i^{\Delta t}]^2\} - \langle f_i^{\Delta t} \rangle^2 \quad (2-3)$$

方差代表了各个间隔之间某个固定节点 i 活动量的涨落情况。

如果 f 非负而且可加, 那么 f 的标准差和平均值之间通常符合幂律关系, 即

$$\sigma_i(\Delta t) \propto \langle f_i^{\Delta t} \rangle^{\alpha_r} \quad (2-4)$$

这里 Δt 是固定值, 仅改变节点 i 。由于 $\langle f_i^{\Delta t} \rangle = \Delta t \langle f_i \rangle$, 所以本文用 $\langle f_i \rangle$ 表示尺度变量, 即

$$\sigma_i(\Delta t) \propto \langle f_i \rangle^{\alpha_r} \quad (2-5)$$

尺度指数 α_r 通常在 $[1/2, 1]$ 间变化, 尺度指数中的下标 T 表示统计量如式(2-2)中所示, 取时间平均。