

# 有限群的线性表示

[法] J.P. 塞尔 著

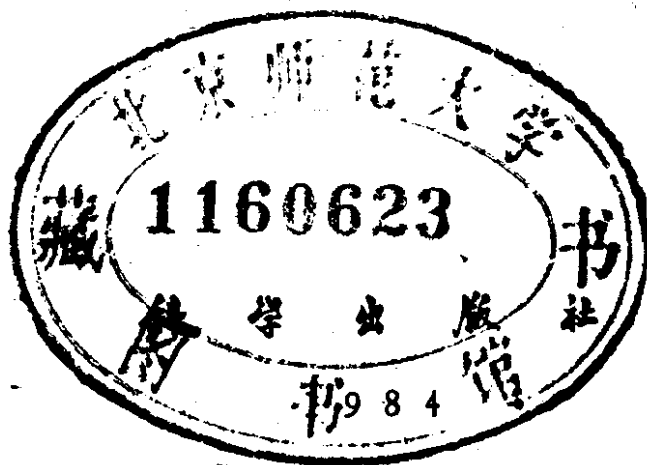


现代数学译丛

# 有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

501/223/04 郝炳新 译



理科阅览室

## 内 容 简 介

本书从表示论的最基本的内容入手,逐步深入,直到这方面最近代的成果。它深入浅出地介绍了有限群表示论的最主要的内容。全书共分三部分:第一部分介绍了表示论中最基本内容,这部分只要具备初步的线性代数知识即可阅读;第二部分论述了特征零的表示论,用到比线性代数略进一步的知识(群代数、张量积、模、半单代数等);第三部分论述了模表示论,初步介绍了特征 $p$ 情形的表示论,处理方法极有特色。书中附有习题,以便加深理解。

本书是根据第二版的英译本(Springer-Verlag, 1977)翻译的,并根据法文修订第三版作了校订。

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关专业的工作者。

Jean-Pierre Serre

Représentations linéaires des groupes finis

Troisième édition corrigée

Hermann Paris 1978

现代数学译丛

有限群的线性表示

[法] J.-P. 塞尔 著

郝钢新 译

责任编辑 吕虹 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年2月第一版 开本:850×1168 1/32

1984年2月第一次印刷 印张:6

印数:0001—8,200 字数:153,000

统一书号:13031·2478

本社书号:3404·13-1

定价: 1.15 元

## 序

这本书由三部分组成,每部分的程度和目的有所不同。

第一部分最初是为量子化学工作者而写的。它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系。这是在数学里以及在量子化学或物理里经常要用到的基本结果。我力图仅用群的定义和线性代数的初步知识,将证明写得尽可能的浅显。例子(第五章)都是从对于化学工作者有用的那些例子里选出来的。

第二部分是 1966 年为高等师范学校 (l'École Normale) 二年级学生所写的教程。它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性(第六章);

(b) 诱导表示, Artin 定理和 Brauer 定理及其应用(第七章—第十一章);

(c) 有理性问题(第十二章和第十三章)。

所用到的是线性代数中这样一些方法(比第一部分里的意义广泛一些): 群代数, 模, 非交换张量积, 半单代数。

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征  $p$  (和相反的情形)。我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言(投射模, Grothendieck 群)。对于这一类问题来说, 这种语言是非常合适的。主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征  $p$  里的一切不可约表示都可以“虚拟地”提升到特征零里(即提升到一个适当的 Grothendieck 群内)。

(b) 方-Swan 定理: 当所考虑的群是  $p$ -可解的时候, 上述论断中“虚拟地”这个词可以删去。

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用。

我以愉快的心情感谢：

Gaston Berthier 和 Josiane Serre, 他们同意我转录第一部分, 这原是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的；

Yves Balasko, 他根据一些讲义写出了第二部分的初稿；

Alexandre Grothendieck, 他同意我转录第三部分, 这部分最初是在他的代数几何讨论会 (Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E. S., 1965/1966) 上发表的。

# 目 录

## 第一部分 表示和特征标

<b>第一章 线性表示通论</b> .....	1
1.1 定义 .....	1
1.2 基本例子 .....	2
1.3 子表示 .....	3
1.4 不可约表示 .....	5
1.5 两个表示的张量积 .....	6
1.6 对称方和交错方 .....	7
<b>第二章 特征标理论</b> .....	9
2.1 表示的特征标 .....	9
2.2 Schur 引理, 基本应用.....	12
2.3 特征标的正交关系 .....	14
2.4 正则表示的分解 .....	17
2.5 不可约表示的个数 .....	19
2.6 一个表示的典型分解 .....	21
2.7 表示的明显分解式 .....	23
<b>第三章 子群, 群的积, 诱导表示</b> .....	26
3.1 Abel 子群 .....	26
3.2 两个群的积 .....	27
3.3 诱导表示 .....	29
<b>第四章 紧群</b> .....	35
4.1 紧群 .....	35
4.2 紧群上的不变测度 .....	35
4.3 紧群的线性表示 .....	36
<b>第五章 例子</b> .....	38
5.1 循环群 $C_n$ .....	38
5.2 群 $C_\infty$ .....	38

5.3	二面体群 $D_n$ .....	39
5.4	群 $D_{nh}$ .....	41
5.5	群 $D_\infty$ .....	42
5.6	群 $D_{\infty h}$ .....	43
5.7	交错群 $\mathfrak{A}_4$ .....	44
5.8	对称群 $\mathfrak{S}_4$ .....	45
5.9	立方体群 .....	46
参考文献(第一部分) .....		48

## 第二部分 在特征零情形的表示

<b>第六章</b>	<b>群代数</b> .....	49
6.1	表示和模 .....	49
6.2	$\mathbf{C}[G]$ 的分解 .....	50
6.3	$\mathbf{C}[G]$ 的中心 .....	52
6.4	整元的基本性质 .....	53
6.5	特征标的整性质, 应用 .....	54
<b>第七章</b>	<b>诱导表示, Mackey 判定</b> .....	57
7.1	导引 .....	57
7.2	诱导表示的特征标, 互反公式 .....	58
7.3	在子群上的限制 .....	61
7.4	Mackey 的不可约性判定 .....	62
<b>第八章</b>	<b>诱导表示的例子</b> .....	64
8.1	正规子群, 对于不可约表示的级的应用 .....	64
8.2	与一个 Abel 群的半直积 .....	65
8.3	几类有限群摘要 .....	67
8.4	Sylow 定理 .....	69
8.5	超可解群的线性表示 .....	70
<b>第九章</b>	<b>Artin 定理</b> .....	72
9.1	环 $R(G)$ .....	72
9.2	Artin 定理的表述 .....	74
9.3	第一个证明 .....	75
9.4	(i) $\Rightarrow$ (ii) 的第二个证明 .....	76
<b>第十章</b>	<b>Brauer 定理</b> .....	79

10.1	$p$ -正则元素, $p$ -初等子群	79
10.2	由 $p$ -初等子群所产生的诱导特征标	80
10.3	特征标的构造	81
10.4	定理 18 和 18' 的证明	83
10.5	Brauer 定理	84
<b>第十一章 Brauer 定理的应用</b>		<b>86</b>
11.1	特征标的刻画	86
11.2	Frobenius 的一个定理	88
11.3	Brauer 定理的逆	90
11.4	$A \otimes R(G)$ 的谱	91
<b>第十二章 有理性问题</b>		<b>96</b>
12.1	环 $R_K(G)$ 和 $\bar{R}_K(G)$	96
12.2	Schur 指标	98
12.3	在割圆域上的可实现性	100
12.4	群 $R_K(G)$ 的秩	101
12.5	Artin 定理的一般化	103
12.6	Brauer 定理的一般化	104
12.7	定理 29 的证明	106
<b>第十三章 有理性问题: 例子</b>		<b>110</b>
13.1	有理数域的情形	110
13.2	实数域的情形	114
参考文献(第二部分)		120

### 第三部分 Brauer 理论导引

<b>第十四章 群 <math>R_K(G)</math>, <math>R_k(G)</math> 和 <math>P_k(G)</math></b>		<b>121</b>
14.1	环 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$	122
14.2	群 $P_k(G)$ 和 $P_A(G)$	123
14.3	$P_k(G)$ 的结构	123
14.4	$P_A(G)$ 的结构	125
14.5	对偶性	127
14.6	纯量扩张	129



<b>第十五章</b>	<b><math>cde</math> 三角</b>	132
15.1	$c: P_k(G) \rightarrow R_k(G)$ 的定义	132
15.2	$d: R_K(G) \rightarrow R_k(G)$ 的定义	132
15.3	$e: P_k(G) \rightarrow R_K(G)$ 的定义	135
15.4	$cde$ 三角的基本性质	135
15.5	例: $p'$ -群	136
15.6	例: $p$ -群	137
15.7	例: $p'$ -群与 $p$ -群的积	138
<b>第十六章</b>	<b>若干定理</b>	139
16.1	$cde$ 三角的性质	139
16.2	对 $e$ 的象的刻画	141
16.3	通过特征标对投射 $A[G]$ -模的刻画	142
16.4	投射 $A[G]$ -模的例: 亏指数为零的不可约表示	144
<b>第十七章</b>	<b>证明</b>	146
17.1	群的变更	146
17.2	在模表示情形的 Brauer 定理	147
17.3	定理 34 的证明	148
17.4	定理 36 的证明	150
17.5	定理 38 的证明	151
17.6	定理 39 的证明	153
<b>第十八章</b>	<b>模特征标</b>	156
18.1	表示的模特征标	156
18.2	模特征标的无关性	158
18.3	重新表述	160
18.4	$d$ 的一个截影	162
18.5	例: 对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的模特征标	163
18.6	例: 交错群 $\mathfrak{A}_n$ 的模特征标	166
<b>第十九章</b>	<b>对 Artin 表示的应用</b>	169
19.1	Artin 和 Swan 表示	169
19.2	Artin 和 Swan 表示的有理性	170
19.3	一个不变量	172
<b>附录</b>		173

参考文献(第三部分).....	175
记号索引.....	176
汉英名词索引.....	177
英汉名词索引.....	180

# 第一部分 表示和特征标

## 第一章 线性表示通论

### 1.1 定义

令  $V$  是复数域  $\mathbf{C}$  上一个向量空间,  $GL(V)$  是由  $V$  到自身的一切同构所组成的群. 按照定义,  $GL(V)$  的一个元素  $a$  是  $V$  到  $V$  内的一个线性映射, 它有一个逆映射  $a^{-1}$ ; 这个逆映射也是线性的. 当  $V$  具有一个  $n$  元有限基  $(e_i)$  时, 每一个线性映射  $a: V \rightarrow V$  由一个  $n$  阶方阵  $(a_{ij})$  所确定, 系数  $a_{ij}$  都是复数; 这些系数是通过将象  $a(e_j)$  用基  $(e_i)$  来表示:

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

而得到的.

说  $a$  是一个同构相当于说  $a$  的行列式  $\det(a) = \det(a_{ij})$  不等于零. 因此, 群  $GL(V)$  可以与一切  $n$  阶可逆方阵所组成的群等同起来.

现在设  $G$  是一个有限群, 具有单位元  $1$  和运算  $(s, t) \mapsto st$ . 群  $G$  到群  $GL(V)$  内的一个同态  $\rho$  叫做  $G$  在  $V$  内的一个线性表示. 换句话说, 对于每一元素  $s \in G$ , 令  $GL(V)$  的一个元素  $\rho(s)$  与它对应, 使得对于  $s, t \in G$ , 等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立(我们常把  $\rho(s)$  写作  $\rho_s$ ). 由上面的等式可以推出:

$$\rho(1) = 1; \quad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当  $\rho$  被给定时, 我们就说  $V$  是  $G$  的一个表示空间(或者为了简单起见, 就说  $V$  是  $G$  的一个表示). 今后我们只限于考虑  $V$  是有限维向量空间的情形. 这并不是一个过分的限制. 事实上, 对于多数应

用来说,人们感兴趣的只是  $V$  的有限个元素  $x_i$ , 并且总可以找到  $V$  的一个有限维子表示(稍后将定义, 参看 1.3), 它包含这些  $x_i$ : 就取由这些  $x_i$  的象  $\rho_s(x_i)$  所生成的子空间作为表示空间.

现在设  $V$  是有限维的, 令  $n$  是它的维数. 我们也称  $n$  是所考虑的表示的级. 令  $(e_i)$  是  $V$  的一个基, 令  $R_s$  是  $\rho_s$  关于这个基的矩阵. 我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令  $r_{ij}(s)$  表示矩阵  $R_s$  的系数, 那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s)r_{jk}(t).$$

反之, 给了满足上面等式的可逆矩阵  $R_s = (r_{ij}(s))$ , 相应地就有  $G$  在  $V$  内的一个线性表示  $\rho$ ; 这就是说, 用“矩阵形式”给出一个表示.

设  $\rho$  和  $\rho'$  是同一个群  $G$  分别在向量空间  $V$  和  $V'$  内的表示. 这两个表示说是等价的(或同构的), 如果存在一个线性映射  $\tau: V \rightarrow V'$ , 它把  $\rho$  “变为”  $\rho'$ , 也就是说, 以下等式成立:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \quad \text{对一切 } s \in G.$$

当  $\rho$  和  $\rho'$  是通过矩阵形式分别由  $R_s$  和  $R'_s$  给出时, 这个等式的意义就是, 存在一个可逆矩阵  $T$  使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \quad \text{对一切 } s \in G,$$

或写成  $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$ . 我们可以把这样的两个表示看作同一个(对于每一  $x \in V$  令  $\tau(x) \in V'$  与它对应); 特别,  $\rho$  和  $\rho'$  有相同的级.

## 1.2 基本例子

(a) 群  $G$  的一个 1 级表示是一个同态  $\rho: G \rightarrow \mathbf{C}^*$ , 这里  $\mathbf{C}^*$  表示非零复数乘法群. 因为  $G$  的每一元素都有有限阶, 所以  $\rho$  的值  $\rho(s)$  都是单位根. 特别, 我们有  $|\rho(s)| = 1$ .

如果对所有  $s \in G$  都取  $\rho(s) = 1$ , 我们就得到  $G$  的一个表示, 叫做单位(或平凡)表示.

(b) 令  $g$  是群  $G$  的阶,  $V$  是一个  $g$  维向量空间, 而  $(e_i)_{i \in G}$  是  $V$  的一个基, 以  $G$  的元素  $t$  为指标. 对于  $s \in G$ , 令  $\rho_s$  是  $V$  到  $V$  内的线性映射, 它将  $e_i$  变到  $e_{st}$ ; 这样就定义了一个线性表示, 叫做  $G$  的正则表示. 这个表示的级等于  $G$  的阶. 注意  $e_s = \rho_s(e_1)$ , 所以  $e_s$  的象组成  $V$  的一个基. 反之, 令  $W$  是  $G$  的一个表示, 它含有这样一个向量  $w$ , 使得  $\rho_s(w), s \in G$ , 组成  $W$  的一个基, 那么  $W$  与正则表示同构(令  $\tau(e_s) = \rho_s(w)$ , 就定义了一个同构  $\tau: V \rightarrow W$ ).

(c) 更一般地, 设  $G$  作用在一个有限集  $X$  上. 这就是说, 对于每一  $s \in G$ , 都给出  $X$  的一个置换  $x \mapsto sx$ , 满足等式

$$1x = x, s(tx) = (st)x,$$

这里  $s, t \in G, x \in X$ . 令  $V$  是一个向量空间, 它具有一个基  $(e_x)_{x \in X}$ , 这里取  $X$  的元素作为指标. 对于  $s \in G$ , 令  $\rho_s$  是  $V$  到  $V$  内的线性映射, 它把  $e_x$  变到  $e_{sx}$ ; 这样得到的  $G$  的表示叫做  $G$  关于  $X$  的置换表示.

### 1.3 子表示

令  $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  是一个线性表示,  $W$  是  $V$  的一个子空间. 假设  $W$  在  $G$  的作用下是稳定的(或者说是“不变的”), 换句话说, 假设对于一切  $s \in G, x \in W$ , 都有  $\rho_s x \in W$ . 于是  $\rho_s$  在  $W$  上的限制  $\rho_s^W$  是  $W$  到它自身上的一个同构, 并且  $\rho_{st}^W = \rho_s^W \cdot \rho_t^W$ . 这样一来,  $\rho^W: G \rightarrow \mathbf{GL}(W)$  就是  $G$  在  $W$  内的一个线性表示.  $W$  叫做  $V$  的一个子表示.

**例** 取  $V$  是  $G$  的正则表示 [参看 1.2 (b)]. 令  $W$  是由元素  $x = \sum_{i \in G} e_i$  所生成的  $V$  的一维子空间. 那么对一切  $s \in G$  都有  $\rho_s x = x$ , 从而  $W$  是  $V$  的一个子表示. 这个子表示与单位表示同构. (在 2.4 我们将确定正则表示的一切子表示.)

在往下进行之前, 让我们先来回顾一下线性代数中的某些概念. 向量空间  $V$  叫做子空间  $W$  与  $W'$  的直和, 如果每一  $x \in V$  可以唯一地写成  $x = w + w'$  的形式, 这里  $w \in W, w' \in W'$ ; 这相当于说  $W$  与  $W'$  的交  $W \cap W'$  是 0, 并且  $\dim(V) = \dim(W) +$

$\dim(W')$ . 这时就写作  $V = W \oplus W'$  而  $W'$  叫做  $W$  在  $V$  里的一个余子空间. 将每一  $x \in V$  变到它在  $W$  中的分量  $w$  的映射  $p$  叫做对于分解  $V = W \oplus W'$  来说  $V$  在  $W$  上的射影,  $p$  的象就是  $W$ , 并且对于一切  $x \in W$ ,  $p(x) = x$ . 反之, 如果  $p$  是  $V$  到自身内满足上述两个条件的一个线性映射, 可以验证,  $V$  是  $W$  与  $p$  的核 (一切满足条件  $p(x) = 0$  的  $x$  所成的集) 的直和. 这样一来,  $V$  在  $W$  上的射影和  $W$  在  $V$  中的余子空间之间就建立了一个一一对应.

现在让我们再回到子表示上来.

**定理 1** 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是  $G$  在  $V$  内的一个线性表示, 而  $W$  是  $V$  的一个在  $G$  之下稳定的子空间. 那么存在  $W$  在  $V$  中的一个余子空间  $W^0$ , 它也在  $G$  之下稳定.

令  $W'$  是  $W$  在  $V$  中的任意一个余子空间,  $p$  是相应的  $V$  在  $W$  上的射影. 作  $p$  在  $G$  的元素之下的共轭, 并且求平均得

$$p^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \rho_s \cdot p \cdot \rho_s^{-1} \quad (g \text{ 是 } G \text{ 的阶}).$$

因为  $p$  将  $V$  映入  $W$  而  $\rho_s$  使  $W$  不变, 所以  $p^0$  将  $V$  映入  $W$ . 如果  $x \in W$ , 那么  $\rho_s^{-1}x \in W$ . 因此

$$p \cdot \rho_s^{-1}x = \rho_s^{-1}x, \quad \rho_s \cdot p \cdot \rho_s^{-1}x = x, \quad \text{从而 } p^0x = x.$$

这样,  $p^0$  是  $V$  在  $W$  上的一个射影, 它对应着  $W$  的一个余子空间  $W^0$ . 再者, 对一切  $s \in G$ , 我们有

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s.$$

事实上, 计算一下  $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$ , 就得到

$$\begin{aligned} \rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1} \\ &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0. \end{aligned}$$

现在设  $x \in W^0$ ,  $s \in G$ , 那么  $p^0x = 0$ , 因此  $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$ , 所以  $\rho_s x \in W^0$ . 这就证明了  $W^0$  在  $G$  之下是稳定的. 定理证毕.  $\square$

注记 设  $V$  带有一个内积  $(x|y)$ , 满足通常的条件: 对  $x$  是

线性的,对  $y$  是半线性的,并且当  $x \neq 0$  时,  $(x|x) > 0$ . 又假设这个内积在  $G$  之下不变,即对于一切  $s \in G$ , 都有  $(\rho_s x | \rho_s y) = (x|y)$ . 我们取  $\sum_{i \in G} (\rho_i x | \rho_i y)$  来代替  $(x|y)$ , 总可以归结为这一情形. 在这样的前提下,  $W$  在  $V$  中的正交余  $W^0$  是  $W$  的一个余子空间, 并且在  $G$  之下稳定. 这样就得到定理 1 的另一证明. 注意内积  $(x|y)$  的不变性意味着, 如果  $(e_i)$  是  $V$  的一个标准正交基, 那么  $\rho_s$  关于这个基的矩阵是一个酉阵.

保持定理 1 的前提和记法. 令  $x \in V$  而  $w$  和  $w^0$  是  $x$  在  $W$  和  $W^0$  上的射影. 我们有  $x = w + w^0$ , 同时  $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$ , 并且由于  $W$  和  $W^0$  都在  $G$  之下稳定, 所以  $\rho_s w \in W$ ,  $\rho_s w^0 \in W^0$ . 这样,  $\rho_s w$  和  $\rho_s w^0$  是  $\rho_s x$  的射影. 因此, 表示  $W$  和  $W^0$  确定了表示  $V$ . 我们就说  $V$  是  $W$  和  $W^0$  的直和, 并且记作  $V = W \oplus W^0$ .  $V$  的元素可以与元素对  $(w, w^0)$  等同起来, 这里  $w \in W$ ,  $w^0 \in W^0$ . 如果  $W$  和  $W^0$  由矩阵形式  $R_s$  和  $R_s^0$  给出, 那么  $W \oplus W^0$  就由矩阵形式

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

给出. 任意有限多个表示的直和可以类似地定义.

#### 1.4 不可约表示

令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是  $G$  的一个线性表示. 我们说,  $\rho$  是不可约的或单的, 如果  $V$  不是 0 并且除了 0 和  $V$  之外,  $V$  没有在  $G$  之下稳定的子空间. 由定理 1, 第二个条件相当于说,  $V$  不是两个表示的直和 (除开显然的分解  $V = 0 \oplus V$ ). 一级的表示自然都是不可约的. 以后将会看到 (3.1), 每一个非交换群至少有一个级  $\geq 2$  的不可约表示.

通过作直和, 不可约表示被用来构造其它的表示:

**定理 2** 每一个表示都是不可约表示的直和.

令  $V$  是  $G$  的一个线性表示. 我们对  $\dim(V)$  作归纳法. 若  $\dim(V) = 0$ , 定理是显然的 (0 是不可约表示的空集的直和). 假设  $\dim(V) \geq 1$ . 如果  $V$  不可约, 那么已经没有什么要证的了; 否

则,由定理 1,  $V$  可以分解为直和  $V' \oplus V''$ , 而  $\dim(V') < \dim(V)$ ,  $\dim(V'') < \dim(V)$ . 由归纳法的假设,  $V'$  和  $V''$  都是一些不可约表示的直和, 因而  $V$  也是一些不可约表示的直和.  $\square$

注记 令  $V$  是一个表示,  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$  是  $V$  的一个不可约表示的直和分解. 我们会问, 这个分解是否唯一. 在一切  $\rho_i$  都等于 1 的情形, 这个分解一般不是唯一的 (这时  $W_i$  都是直线, 而一个向量空间分成一些直线的直和的分解是很多的). 然而, 我们将在 2.3 看到, 与一个给定的不可约表示同构的  $W_i$  的个数不依赖于分解的选取.

## 1.5 两个表示的张量积

同直和运算 (这个运算具有通常加法的性质) 在一起, 还有一种“乘法”: 张量积, 有时也叫做 Kronecker 积. 它的定义如下:

设  $V_1$  和  $V_2$  是两个向量空间. 向量空间  $W$ , 连同同一个  $V_1 \times V_2$  到  $W$  内的映射  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ , 叫做  $V_1$  与  $V_2$  的张量积, 如果下列条件被满足:

(a)  $x_1 \cdot x_2$  对于变量  $x_1$  和  $x_2$  中每一个都是线性的.

(b) 若  $(e_{i_1})$  是  $V_1$  的一个基,  $(e_{i_2})$  是  $V_2$  的一个基, 则一切乘积  $e_{i_1} \cdot e_{i_2}$  是  $W$  的一个基.

容易证明, 这样一个空间是存在且唯一的 (在同构的意义下). 记作  $V_1 \otimes V_2$ . 条件 (b) 表明,

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

现在设  $\rho^1: G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1)$  和  $\rho^2: G \rightarrow \mathbf{GL}(V_2)$  是群  $G$  的两个表示. 对于  $s \in G$ , 由以下条件定义  $\mathbf{GL}(V_1 \otimes V_2)$  的一个元素  $\rho_s$ :

$$\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho_s^1(x_1) \cdot \rho_s^2(x_2), x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

[ $\rho_s$  的存在和唯一性容易由条件 (a) 和 (b) 得出.] 我们记作

$$\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2.$$

$\rho_s$  定义了  $G$  到  $V_1 \otimes V_2$  内的一个线性表示, 叫做原来两个表示的张量积.

把这个定义转换成矩阵的说法就是: 令  $(e_{i_1})$  是  $V_1$  的一个



基,  $(r_{i_1 j_1}(s))$  是  $\rho_1^1$  关于这个基的矩阵; 完全类似地定义  $(e_{i_2})$  和  $(r_{i_2 j_2}(s))$ . 由

$$\rho_1^1(e_{i_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1 j_1}(s) e_{i_1},$$

$$\rho_2^2(e_{i_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2 j_2}(s) e_{i_2}.$$

推出:

$$\rho_s(e_{i_1} \cdot e_{i_2}) = \sum_{i_1, j_2} r_{i_1 j_1}(s) \cdot r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_1} \cdot e_{i_2}.$$

因此  $\rho_s$  的矩阵就是  $(r_{i_1 j_1}(s) r_{i_2 j_2}(s))$ ; 它是  $\rho_1^1$  的矩阵与  $\rho_2^2$  的矩阵的张量积.

两个不可约表示的张量积一般说来不是不可约的, 它被分解成一些不可约表示的直和, 这些不可约表示可以利用特征标的理论来确定(参看 2.3).

在量子化学中, 张量积常常表现为以下形式:  $V_1$  和  $V_2$  是两个函数空间, 它们都在  $G$  之下稳定, 分别有基  $(\varphi_{i_1})$  和  $(\psi_{i_2})$ , 而  $V_1 \otimes V_2$  是由乘积  $\varphi_{i_1} \cdot \psi_{i_2}$  所生成的向量空间, 这些乘积是线性无关的. 最后的条件是重要的. 这里有两个特殊情形, 对于这两个情形来说, 上面的条件都被满足:

(1) 一些函数  $\varphi$  只依赖于变量  $(x, x', \dots)$  而另一些函数  $\psi$  只依赖于与第一组变量无关的变量  $(y, y', \dots)$ .

(2) 空间  $V_1$  (或  $V_2$ ) 具有一个只由单独一个函数  $\varphi$  所组成的基, 这个函数在任何区域内都不等于零; 于是空间  $V_1$  是一维的.

## 1.6 对称方和交错方

假设表示  $V_1$  和  $V_2$  都恒同于同一个表示  $V$ . 那么  $V_1 \otimes V_2 = V \otimes V$ . 如果  $(e_i)$  是  $V$  的一个基, 令  $\theta$  是  $V \otimes V$  的一个自同构, 使得

$$\theta(e_i \cdot e_j) = e_j \cdot e_i, \quad \text{对一切 } (i, j).$$

由此推出, 对一切  $x, y \in V$  都有  $\theta(x \cdot y) = y \cdot x$ , 因此  $\theta$  不依赖于基  $(e_i)$  的选取. 再者,  $\theta^2 = 1$ . 于是空间  $V \otimes V$  被分解为直和:

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V),$$