现代数学译丛

# 有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

# 有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

郝钢新 译

## 内 容 简 介

本书从表示论的最基本的内容入手，逐步深入，直到这方面最近代的成果．它深入浅出地介绍了有限群表示论的最主要的内容．全书共分三部分：第一部分介绍了表示论中最基本内容，这部分只要具备初步的线性代数知识即可阅读；第二部分论述了特征零的表示论，用到比线性代数略进一步的知识(群代数、张量积、模、半单代数等)；第三部分论述了模表示论，初步介绍了特征 $p$ 情形的表示论，处理方法极有特色．书中附有习题，以便加深理解．

本书是根据第二版的英译本 (Springer-Verlag, 1977) 翻译的，并根据法文修订第三版作了校订．

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关专业的工作者．


Jean-Pierre Serre

Représentations linéaires des groupes finis

Troisième édition corrigée

Hermann Paris 1978

现代数学译丛

有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

郝锅新 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年2月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984年2月第一次印刷 印张：6

印数：0001—8,200 字数：153,000

统一书号：13031·2478

本社书号：3404·13—1

定价： 1.15 元

# 序

这本书由三部分组成，每部分的程度和目的有所不同.

第一部分最初是为量子化学工作者而写的. 它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系. 这是在数学里以及在量子化学或物理里经常要用到的基本结果. 我力图仅用群的定义和线性代数的初步知识，将证明写得尽可能的浅显. 例子(第五章)都是从对于化学工作者有用的那些例子里选出来的.

第二部分是 1966 年为高等师范学校 (l'École Normale) 二年级学生所写的教程. 它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性(第六章);

(b) 诱导表示，Artin 定理和 Brauer 定理及其应用 (第七章—第十一章);

(c) 有理性问题(第十二章和第十三章).

所用到的是线性代数中这样一些方法 (比第一部分里的意义广泛一些): 群代数，模，非交换张量积，半单代数.

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征 $p$ (和相反的情形). 我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言(投射模，Grothendieck 群). 对于这一类问题来说，这种语言是非常合适的. 主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征 $p$ 里的一切不可约表示都可以“虚拟地”提升到特征零里(即提升到一个适当的 Grothendieck 群内).

(b) 方- Swan 定理: 当所考虑的群是 $p$-可解的时候，上述论断中“虚拟地”这个词可以删去.

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用.

我以愉快的心情感谢：

Gaston Berthier 和 Josiane Serre，他们同意我转录第一部分，这原是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的；

Yves Balasko，他根据一些讲义写出了第二部分的初稿；

Alexandre Grothendieck，他同意我转录第三部分，这部分最初是在他的代数几何讨论会（Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E. S., 1965/1966)上发表的。

# 目　　录

## 第一部分　表示和特征标

## 第二部分 在特征零情形的表示

## 第三部分 Brauer 理论导引

# 第一部分 表示和特征标

## 第一章 线性表示通论

### 1.1 定义

令 $V$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上一个向量空间，$\mathbf{GL}(V)$ 是由 $V$ 到自身的一切同构所组成的群．按照定义，$\mathbf{GL}(V)$ 的一个元素 $a$ 是 $V$ 到 $V$ 内的一个线性映射，它有一个逆映射 $a^{-1}$；这个逆映射也是线性的．当 $V$ 具有一个 $n$ 元有限基 $(e_i)$ 时，每一个线性映射 $a: V \to V$ 由一个 $n$ 阶方阵 $(a_{ij})$ 所确定，系数 $a_{ij}$ 都是复数；这些系数是通过将象 $a(e_j)$ 用基 $(e_i)$ 来表示：

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij}e_i$$

而得到的．

说 $a$ 是一个同构相当于说 $a$ 的行列式 $\det(a) = \det(a_{ij})$ 不等于零．因此，群 $\mathbf{GL}(V)$ 可以与一切 $n$ 阶可逆方阵所组成的群等同起来．

现在设 $G$ 是一个有限群，具有单位元 1 和运算 $(s,t) \longmapsto st$．群 $G$ 到群 $\mathbf{GL}(V)$ 内的一个同态 $\rho$ 叫做 $G$ 在 $V$ 内的一个线性表示．换句话说，对于每一元素 $s \in G$，令 $\mathbf{GL}(V)$ 的一个元素 $\rho(s)$ 与它对应，使得对于 $s, t \in G$，等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立(我们常把 $\rho(s)$ 写作 $\rho_s$)．由上面的等式可以推出：

$$\rho(1) = 1; \quad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当 $\rho$ 被给定时，我们就说 $V$ 是 $G$ 的一个表示空间(或者为了简单起见，就说 $V$ 是 $G$ 的一个表示)．今后我们只限于考虑 $V$ 是有限维向量空间的情形．这并不是一个过分的限制．事实上，对于多数应

用来说，人们感兴趣的只是$V$的有限个元素$x_i$，并且总可以找到$V$的一个有限维子表示(稍后将定义，参看1.3)，它包含这些$x_i$：就取由这些$x_i$的象$\rho_s(x_i)$所生成的子空间作为表示空间.

现在设$V$是有限维的，令$n$是它的维数. 我们也称$n$是所考虑的表示的级. 令$(e_i)$是$V$的一个基，令$R_s$是$\rho_s$关于这个基的矩阵. 我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令$r_{ij}(s)$表示矩阵$R_s$的系数，那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t).$$

反之，给了满足上面等式的可逆矩阵$R_s = (r_{ij}(s))$，相应地就有$G$在$V$内的一个线性表示$\rho$；这就是说，用“矩阵形式”给出一个表示.

设$\rho$和$\rho'$是同一个群$G$分别在向量空间$V$和$V'$内的表示. 这两个表示说是等价的（或同构的），如果存在一个线性映射$\tau$: $V \to V'$，它把$\rho$“变为”$\rho'$，也就是说，以下等式成立:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \text{ 对一切 } s \in G.$$

当$\rho$和$\rho'$是通过矩阵形式分别由$R_s$和$R'_s$给出时，这个等式的意义就是，存在一个可逆矩阵$T$使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \text{ 对一切 } s \in G,$$

或写成$R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. 我们可以把这样的两个表示看作同一个(对于每一$x \in V$令$\tau(x) \in V'$与它对应)；特别，$\rho$和$\rho'$有相同的级.

## 1.2 基本例子

(a) 群$G$的一个1级表示是一个同态$\rho: G \to \mathbf{C}^*$，这里$\mathbf{C}^*$表示非零复数乘法群. 因为$G$的每一元素都有有限阶，所以$\rho$的值$\rho(s)$都是单位根. 特别，我们有$|\rho(s)| = 1$.

如果对一切$s \in G$都取$\rho(s) = 1$，我们就得到$G$的一个表示，叫做单位(或平凡)表示.

(b) 令 $g$ 是群 $G$ 的阶，$V$ 是一个 $g$ 维向量空间，而 $(e_t)_{t\in G}$ 是 $V$ 的一个基，以 $G$ 的元素 $t$ 为指标．对于 $s\in G$，令 $\rho_s$ 是 $V$ 到 $V$ 内的线性映射，它将 $e_t$ 变到 $e_{st}$；这样就定义了一个线性表示，叫做 $G$ 的**正则表示**．这个表示的级等于 $G$ 的阶．注意 $e_s=\rho_s(e_1)$，所以 $e_1$ 的象组成 $V$ 的一个基．反之，令 $W$ 是 $G$ 的一个表示，它含有这样一个向量 $w$，使得 $\rho_s(w)$，$s\in G$，组成 $W$ 的一个基，那么 $W$ 与正则表示同构(令 $\tau(e_s)=\rho_s(w)$，就定义了一个同构 $\tau:V\to W$)．

(c) 更一般地，设 $G$ **作用在**一个有限集 $X$ 上．这就是说，对于每一 $s\in G$，都给出 $X$ 的一个置换 $x\longmapsto sx$，满足等式

$$1x=x,\quad s(tx)=(st)x,$$

这里 $s,\ t\in G,\ x\in X$．令 $V$ 是一个向量空间，它具有一个基 $(e_x)_{x\in X}$，这里取 $X$ 的元素作为指标．对于 $s\in G$，令 $\rho_s$ 是 $V$ 到 $V$ 内的线性映射，它把 $e_x$ 变到 $e_{sx}$；这样得到的 $G$ 的表示叫做 $G$ 关于 $X$ 的**置换表示**．

## 1.3 子表示

令 $\rho:G\to \mathbf{GL}(V)$ 是一个线性表示，$W$ 是 $V$ 的一个子空间．假设 $W$ 在 $G$ 的作用下是**稳定的**(或者说是"不变的")，换句话说，假设对于一切 $s\in G$，$x\in W$，都有 $\rho_s x\in W$．于是 $\rho_s$ 在 $W$ 上的限制 $\rho_s^W$ 是 $W$ 到它自身上的一个同构，并且 $\rho_{st}^W=\rho_s^W\cdot\rho_t^W$．这样一来，$\rho^W:G\to\mathbf{GL}(W)$ 就是 $G$ 在 $W$ 内的一个线性表示．$W$ 叫做 $V$ 的一个**子表示**．

**例** 取 $V$ 是 $G$ 的正则表示［参看 1.2 (b)］．令 $W$ 是由元素 $x=\Sigma_{s\in G}e_s$ 所生成的 $V$ 的一维子空间．那么对一切 $s\in G$ 都有 $\rho_s x=x$，从而 $W$ 是 $V$ 的一个子表示．这个子表示与单位表示同构．(在 2.4 我们将确定正则表示的一切子表示.)

在往下进行之前，让我们先来回顾一下线性代数中的某些概念．向量空间 $V$ 叫做子空间 $W$ 与 $W'$ 的**直和**，如果每一 $x\in V$ 可以唯一地写成 $x=w+w'$ 的形式，这里 $w\in W$，$w'\in W'$；这相当于说 $W$ 与 $W'$ 的交 $W\cap W'$ 是 0，并且 $\dim(V)=\dim(W)+$

$\dim(W')$. 这时就写作 $V = W \oplus W'$ 而 $W'$ 叫做$W$在$V$里的一个余子空间. 将每一 $x \in V$ 变到它在$W$中的分量$w$的映射 $p$ 叫做对于分解 $V = W \oplus W'$ 来说$V$在$W$上的射影，$p$的象就是$W$，并且对于一切 $x \in W$，$p(x) = x$. 反之，如果 $p$ 是$V$到自身内满足上述两个条件的一个线性映射，可以验证，$V$是$W$与 $p$ 的核（一切满足条件 $p(x) = 0$ 的 $x$ 所成的集）的直和. 这样一来，$V$在$W$上的射影和$W$在$V$中的余子空间之间就建立了一个一一对应.

现在让我们再回到子表示上来.

**定理 1** 令 $\rho: G \to GL(V)$ 是$G$在$V$内的一个线性表示，而$W$是$V$的一个在$G$之下稳定的子空间. 那么存在$W$在$V$中的一个余子空间 $W^0$，它也在$G$之下稳定.

令 $W'$ 是$W$在$V$中的任意一个余子空间，$p$ 是相应的$V$在$W$上的射影. 作 $p$ 在$G$的元素之下的共轭，并且求平均得

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \quad (g\text{ 是 }G\text{ 的阶}).$$

因为 $p$ 将$V$映入$W$而 $\rho_t$ 使$W$不变，所以 $p^0$ 将$V$映入$W$. 如果 $x \in W$，那么 $\rho_t^{-1}x \in W$. 因此

$$p \cdot \rho_t^{-1}x = \rho_t^{-1}x, \quad \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1}x = x, \quad \text{从而 } p^0x = x.$$

这样，$p^0$ 是$V$在$W$上的一个射影，它对应着$W$的一个余子空间$W^0$. 再者，对一切 $s \in G$，我们有

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s.$$

事实上，计算一下 $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$，就得到

$$\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1}$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0.$$

现在设 $x \in W^0$，$s \in G$，那么 $p^0x = 0$，因此 $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$，所以 $\rho_s x \in W^0$. 这就证明了 $W^0$ 在$G$之下是稳定的. 定理证毕. □

注记 设$V$带有一个内积 $(x|y)$，满足通常的条件：对 $x$ 是

线性的，对 $y$ 是半线性的，并且当 $x \neq 0$ 时，$(x|x) > 0$. 又假设这个内积在 $G$ 之下不变，即对于一切 $s \in G$，都有 $(\rho_s x|\rho_s y) = (x|y)$. 我们取 $\sum\limits_{t \in G} (\rho_t x|\rho_t y)$ 来代替 $(x|y)$，总可以归结为这一情形. 在这样的前提下，$W$ 在 $V$ 中的正交余 $W^0$ 是 $W$ 的一个余子空间，并且在 $G$ 之下稳定. 这样就得到定理 1 的另一证明. 注意内积 $(x|y)$ 的不变性意味着，如果 $(e_i)$ 是 $V$ 的一个标准正交基，那么 $\rho_s$ 关于这个基的矩阵是一个酉阵.

保持定理 1 的前提和记法. 令 $x \in V$ 而 $w$ 和 $w^0$ 是 $x$ 在 $W$ 和 $W^0$ 上的射影. 我们有 $x = w + w^0$，同时 $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$，并且由于 $W$ 和 $W^0$ 都在 $G$ 之下稳定，所以 $\rho_s w \in W$，$\rho_s w^0 \in W^0$. 这样，$\rho_s w$ 和 $\rho_s w^0$ 是 $\rho_s x$ 的射影. 因此，表示 $W$ 和 $W^0$ 确定了表示 $V$. 我们就说 $V$ 是 $W$ 和 $W^0$ 的直和，并且记作 $V = W \oplus W^0$. $V$ 的元素可以与元素对 $(w, w^0)$ 等同起来，这里 $w \in W$，$w^0 \in W^0$. 如果 $W$ 和 $W^0$ 由矩阵形式 $R_s$ 和 $R_s^0$ 给出，那么 $W \oplus W^0$ 就由矩阵形式

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

给出. 任意有限多个表示的直和可以类似地定义.

## 1.4 不可约表示

令 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 $G$ 的一个线性表示. 我们说，$\rho$ 是不可约的或单的，如果 $V$ 不是 0 并且除了 0 和 $V$ 之外，$V$ 没有在 $G$ 之下稳定的子空间. 由定理 1，第二个条件相当于说，$V$ 不是两个表示的直和(除开显然的分解 $V = 0 \oplus V$). 一级的表示自然都是不可约的. 以后将会看到(3.1)，每一个非交换群至少有一个级 $\geqslant 2$ 的不可约表示.

通过作直和，不可约表示被用来构造其它的表示：

**定理 2** 每一个表示都是不可约表示的直和.

令 $V$ 是 $G$ 的一个线性表示. 我们对 $\dim(V)$ 作归纳法. 若 $\dim(V) = 0$，定理是显然的（0 是不可约表示的空集的直和）. 假设 $\dim(V) \geqslant 1$. 如果 $V$ 不可约，那么已经没有什么要证的了；否

则,由定理 1,$V$ 可以分解为直和 $V'\oplus V''$,而 $\dim(V')<\dim(V)$,$\dim(V'')<\dim(V)$. 由归纳法的假设,$V'$ 和 $V''$ 都是一些不可约表示的直和,因而 $V$ 也是一些不可约表示的直和. □

注记 令 $V$ 是一个表示,$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是 $V$ 的一个不可约表示的直和分解. 我们会问,这个分解是否唯一. 在一切 $\rho_s$ 都等于 1 的情形,这个分解一般不是唯一的(这时 $W_i$ 都是直线,而一个向量空间分成一些直线的直和的分解是很多的). 然而,我们将在 2.3 看到,与一个给定的不可约表示同构的 $W_i$ 的个数不依赖于分解的选取.

## 1.5 两个表示的张量积

同直和运算(这个运算具有通常加法的性质)在一起,还有一种"乘法":张量积,有时也叫做 Kronecker 积. 它的定义如下:

设 $V_1$ 和 $V_2$ 是两个向量空间. 向量空间 $W$,连同一个 $V_1\times V_2$ 到 $W$ 内的映射 $(x_1,x_2)\longmapsto x_1\cdot x_2$,叫做 $V_1$ 与 $V_2$ 的张量积,如果下列条件被满足:

(a) $x_1\cdot x_2$ 对于变量 $x_1$ 和 $x_2$ 中每一个都是线性的.

(b) 若 $(e_{i_1})$ 是 $V_1$ 的一个基,$(e_{i_2})$ 是 $V_2$ 的一个基,则一切乘积 $e_{i_1}\cdot e_{i_2}$ 是 $W$ 的一个基.

容易证明,这样一个空间是存在且唯一的(在同构的意义下). 记作 $V_1\otimes V_2$. 条件 (b) 表明,

$$\dim(V_1\otimes V_2)=\dim(V_1)\cdot\dim(V_2).$$

现在设 $\rho^1:G\to \boldsymbol{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2:G\to \boldsymbol{GL}(V_2)$ 是群 $G$ 的两个表示. 对于 $s\in G$,由以下条件定义 $\boldsymbol{GL}(V_1\otimes V_2)$ 的一个元素 $\rho_s$:

$$\rho_s(x_1\cdot x_2)=\rho_s^1(x_1)\cdot\rho_s^2(x_2),x_1\in V_1,\ x_2\in V_2.$$

[$\rho_s$ 的存在和唯一性容易由条件 (a) 和 (b) 得出.] 我们记作

$$\rho_s=\rho_s^1\otimes\rho_s^2.$$

$\rho_s$ 定义了 $G$ 到 $V_1\otimes V_2$ 内的一个线性表示,叫做原来两个表示的张量积.

把这个定义转换成矩阵的说法就是:令 $(e_{i_1})$ 是 $V_1$ 的一个

基，$(r_{i_1j_1}(s))$ 是 $\rho_s^1$ 关于这个基的矩阵；完全类似地定义 $(e_{i_2})$ 和 $(r_{i_2j_2}(s))$. 由

$$\rho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1j_1}(s)e_{i_1},$$

$$\rho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2j_2}(s)e_{i_2}$$

推出：

$$\rho_s(e_{j_1}\cdot e_{j_2}) = \sum_{i_1,i_2} r_{i_1j_1}(s)\cdot r_{i_2j_2}(s)\cdot e_{i_1}\cdot e_{i_2}.$$

因此 $\rho_s$ 的矩阵就是 $(r_{i_1j_1}(s)r_{i_2j_2}(s))$；它是 $\rho_s^1$ 的矩阵与 $\rho_s^2$ 的矩阵的张量积.

两个不可约表示的张量积一般说来不是不可约的，它被分解成一些不可约表示的直和，这些不可约表示可以利用特征标的理论来确定(参看 2.3).

在量子化学中，张量积常常表现为以下形式：$V_1$ 和 $V_2$ 是两个函数空间,它们都在 $G$ 之下稳定，分别有基 $(\varphi_{i_1})$ 和 $(\psi_{i_2})$，而 $V_1\otimes V_2$ 是由乘积 $\varphi_{i_1}\cdot\psi_{i_2}$ 所生成的向量空间，这些乘积是线性无关的. 最后的条件是重要的. 这里有两个特殊情形,对于这两个情形来说,上面的条件都被满足:

(1) 一些函数 $\varphi$ 只依赖于变量 $(x, x', \cdots)$ 而另一些函数 $\psi$ 只依赖于与第一组变量无关的变量 $(y, y', \cdots)$.

(2) 空间 $V_1$ (或 $V_2$) 具有一个只由单独一个函数 $\varphi$ 所组成的基，这个函数在任何区域内都不等于零;于是空间 $V_1$ 是一维的.

## 1.6 对称方和交错方

假设表示 $V_1$ 和 $V_2$ 都恒同于同一个表示 $V$. 那么 $V_1\otimes V_2 = V\otimes V$. 如果 $(e_i)$ 是 $V$ 的一个基，令 $\theta$ 是 $V\otimes V$ 的一个自同构，使得

$$\theta(e_i\cdot e_j) = e_j\cdot e_i, \quad 对一切\ (i,j).$$

由此推出，对一切 $x, y\in V$ 都有 $\theta(x\cdot y) = y\cdot x$，因此 $\theta$ 不依赖于基 $(e_i)$ 的选取. 再者，$\theta^2 = 1$. 于是空间 $V\otimes V$ 被分解为直和：

$$V\otimes V = \mathbf{Sym}^2(V)\oplus\mathbf{Alt}^2(V),$$