现代数学译丛

整体微分几何

H. 霍普夫 著

吴大任 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书作者是著名的微分几何学家．本书是根据作者两次讲演的记录整理而成的，故分为两部分．第一部分共四章，一章以欧拉示性数为中心讨论多面体的微分几何，两章讨论曲线论的大范围性质，另一章讨论多面体的体积和多边形的面积．第二部分共九章，讨论二维曲面的整体微分几何 本书原版是 Springer 出版社出版的“数学记录丛书”的第 1000 卷，陈省身教授为该书写了序言．

本书译稿经王启明同志校订

本书可作为大学数学系高年级学生和研究生的教材，也可供有关的数学工作者参考．

Heinz Hopf
DIFFERENTIAL GEOMETRY IN THE LARGE
Springer-Verlag, 1983

现代数学译丛
整体微分几何
H. 霍普夫 著
吴大任 译
责任编辑 杜小杨
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1987 年 7 月第一次印刷 印张：6 1/4
印数：0001—5,000 字数：158,000

统一书号．13031·3574
本社书号：4943·13—1

定价： 1.80 元

目　　录

第一部分　几何选讲

（纽约大学，1946，记录者 Peter Lax）

第二部分 整体微分几何

(斯坦福大学,1956,记录者 J. W. Gray)

第一部分　几　何　选　讲

纽约大学，1946

记录者 Peter Lax

第　一　章

欧拉示性数及有关问题

1. 欧 拉 定 理

我们要讨论的第一个问题是著名的欧拉（Euler）定理，即关于一个凸多面形的面数，棱数和顶数之间的关系。

定义　一个凸二维(胞)腔是一个凸集，它的边界含有有限多条直线段(棱)，这些线段相会于点(顶点)。一个凸三维(胞)腔是一个凸集，它的边界是有限多个二维腔的集合。一个三维(胞)腔的(边界)顶点数用 e 表示；棱数用 k 表示；二维腔数用 f 表示。

欧拉定理：关于三维凸腔，下面的关系成立：

$$e-k+f=2. \tag{1.1}$$

我们将给出这定理的几种证明。

2. 第一证明(勒让德尔（Legendre）)

设 P 是所给三维腔的边界，它是一个凸多面形。从 P 内一点，把 P 投影到以该点为中心的幺球面上。根据凸集的一般理论，这是可能的。这样，就得到球面上由球面凸多边形构成的一个网络。

关于球面多边形的一个定理　幺球面上一个球面凸多边形的内角和是 $(n-2)\pi+A$，其中 n 是多边形的边数，A 是它的面数。

这个定理可以用归纳法证明：当 $n=3$ 时，它就是人们熟知的关于球面三角形的一个定理。为了从 n 推到 $n+1$，只须用一条对角线把多边形分成一个三角形和一个 $n-1$ 边形；注意由于原多边形是凸的，这条对角线完全位于它的内部。

对于非凸多边形，这个定理仍然成立，但我们不去证它。

我们回到上面所得到的、由球面凸多边形构成的网络。对于每一个多边形，我们写下方程

$$\sum \alpha_i = n\pi - 2\pi + A,$$

其中 α_i 是多边形的角．对一切多边形 P_i 取和，则因为每个顶点处的诸角和是 2π，

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} = 2\pi e.$$

又因为每条棱为两个多边形所共有，在取和时，每条棱计算两次，故

$$\sum \pi n_j = 2\pi k,$$

其中 n_j 是多边形 P_j 的边(棱)数．再次，对于 j 取和，得

$$\sum_{j=1}^{f} 2\pi = 2\pi f.$$

最后，由于球面上每一点恰好被覆盖一次，而幺球面的面积是 4π，

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} = \sum_j n_j\pi - \sum_i 2\pi + \sum_j A_j,$$

即

$$2\pi e = 2\pi k - 2\pi f + 4\pi.$$

以 2π 除上式，就得欧拉公式 (1.1)．

3. 欧拉定理的系理

设 f_n 为多面形上 n 边二维腔的个数；显然，

$$f = \sum_{n \geqslant 3} f_n. \tag{3.1}$$

由于每边属于两个多边形，所以

$$2k = \sum_{n \geqslant 3} n f_n, \tag{3.2}$$

其中右边是所有多边形的边数的和．

设 e_m 为多面形上有 m 条棱相会的顶点的个数；显然，

$$e = \sum_{m \geqslant 3} e_m. \tag{3.3}$$

由于每条棱有两个顶点，

$$2k = \sum_{m \geqslant 3} m e_m, \tag{3.4}$$

右边是汇聚于所有顶点的棱数的总和。

先把 (3.1),(3.2),(3.3) 代入 (1.1), 再把 (3.1),(3.3),(3.4) 代入,就得

$$\sum 2e_m + \sum 2f_n - 4 = \sum nf_n, \tag{1.1'}$$

$$\sum 2e_m + \sum 2f_n - 4 = \sum me_m. \tag{1.1''}$$

相加,得

$$\sum 4e_m + \sum 4f_n - 8 = \sum nf_n + \sum me_m,$$

或者

$$0 = 8 + \sum_{m\geqslant 3}(m-4)e_m + \sum_{n\geqslant 3}(n-4)f_n.$$

把其中的负值项移于左方,就得

$$e_3 + f_3 = 8 + \sum_{m\geqslant 5}(m-4)e_m + \sum_{n\geqslant 5}(n-4)f_n.$$

由于右边诸项都是非负的,可知

$$e_3 + f_3 \geqslant 8. \tag{3.5}$$

特殊地,(3.5) 表明:

a) 每一个凸多面形或者有三角形的面,或者有三棱形的顶点,也可能兼有二者.

以 2 乘 (1.1′),再与 (1.1″) 相加,得

$$\sum 6e_m + \sum 6f_n - 12 = \sum 2nf_n + \sum me_m,$$

或者

$$-12 = \sum_{n\geqslant 3}(2n-6)f_n + \sum_{m\geqslant 3}(m-6)e_m.$$

移项,使方程两边都只有正项,就得

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12 + \sum_{n\geqslant 4}(2n-6)f_n + \sum_{m\geqslant 7}(m-6)e_m.$$

由于右边诸项都是非负的,

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 \geqslant 12.$$

与此类似,可得

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \geqslant 12.$$

由最后两个不等式,可知

b) 每一个凸多面形必有含三棱，四棱或五棱的顶点.

c) 每一个凸多面形必有三角形，四角形或五角形的面.

正多面形 一个正多面形的各面有相同的边数 n，它的各顶点有相同的棱数 m. 于是

$$e = e_m, \quad f = f_n.$$

但已知 m, n，由

$$2k = me = nf \quad 和 \quad e - k + f = 2,$$

可以求得

$$e = \frac{4n}{2(m+n) - mn},$$

$$k = \frac{2mn}{2(m+n) - mn},$$

$$f = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

故当 $m = 3$ 时，分母都是 $6-n$，因此 $3 \leqslant n \leqslant 5$. 同样，当 $n = 3$ 时，$3 \leqslant m \leqslant 5$. 我们把一切可能性列成下表.

n	m	e	f	k	
3	3	4	4	6	四面形
3	4	6	8	12	八面形
3	5	12	20	30	二十面形
4	3	8	6	12	六面形（正立方形）
5	3	20	12	30	十二面形

这样就证明了只有通常的五种正多面形.

4. 欧拉定理第二证明（施泰因内尔（Steiner））

在平面上，设 C 为 N 边二维腔，并把它重分为二维腔 C_i. 设重分后 C 的顶点数、棱数、二维腔数依次用 e, k, f 表示；而不在它边界上的顶点（叫做内顶点）数，棱（叫做内棱）数，二维腔数依次用

e', k', f' 表示,则 $e' = e - N, k' = k - N, f' = f$。令 $\chi(C) = e - k + f, \chi'(C) = e' - k' + f'$。我们将证明 $\chi(C) = \chi'(C) = 1$。

对于每个具有 n_i 边的二维腔 C_i 设 α_j 为其诸角，就有我们熟知的公式

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j - n_i\pi + 2\pi = 0. \tag{4.1}$$

我们对于一切 C_i 取和,首先有

$$\sum_{i,j} \alpha_{ji} = 2\pi e' + \sum_{C} \alpha;$$

因为在每个内点,诸角和是 2π. 这里 $\sum_{C} \alpha$ 则表示 C 的诸角之和。

其次,

$$\sum_{i} n_i\pi = 2\pi k' + \pi N;$$

因为每条内棱是两个内二维腔的边，其中 N 是 C 的边数。所以，$\sum n_i = k' + N$. 再次,由于 $f = f'$,

$$\sum 2\pi = 2\pi f'$$

由最后三式,得

$$2\pi e' - 2\pi k' + 2\pi f' + \sum_{C} \alpha - \pi N = 0. \tag{4.2}$$

由于 (4.1) 对于 C 也适用,

$$\sum_{C} \alpha - \pi N + 2\pi = 0.$$

把 (4.2) 和这式相减,再除以 2π,得

$$e' - k' + f' = 1. \tag{4.3}$$

但 $e = e' + N, k = k' + N, f = f'$;代入 (4.3),就得

$$e - k + f = 1. \tag{4.3'}$$

其次，考虑一条直线段的重分，e, k, e', k' 的意义如前。由于重分后的线段数总比内顶点数多 1,

$$e' - k' = -1. \tag{4.4}$$

与此类似，

$$e - k = 1. \tag{4.4'}$$

(4.3′) 和 (4.4′) 依次可以看作关于二维和一维腔的欧拉定理.

5. 关于多面形的一般概念

一个多面形由有限多个二维腔所构成，这些二维腔中，每两个具有以下三种关系之一：

a) 它们没有公共点；

b) 它们有一个公共顶点；

c) 它们有一条公共棱.

作为定义，一个多面形 P 的示性数 $\chi(P)$ 是

$$\chi(P) = e - k + f.$$

一个多面形的重分 把一个多面形重分，就是用顶点和棱构成的网络把它的二维腔分成新的二维腔的集合，而这些新的二维腔仍然构成多面形；若原来的两个二维腔有一条公共棱，则棱上每一点或者同时是那两个二维腔的网络的新顶点或者不是那两个网络的新顶点.

定理 设 P_2 是多面形 P_1 的细分，则

$$\chi(P_1) = \chi(P_2). \tag{5.1}$$

证明 设在 P_1 的一条棱上，有一个新顶点，则根据 (4.4)，这条开棱(即不含端点的棱)对于 $\chi(P_2)$ 提供的数值是-1，而它对于$\chi(P_1)$ 提供的数值本来也是 $0-1+0=-1$.

设 P_1 的一个二维腔分成两个，则根据 (4.3)，新的顶点、棱和二维腔对 $\chi(P_2)$ 所提供的数值是$+1$，而它们对 $\chi(P_1)$ 所起的作用本来也是$+1$.

由于重分所引起的变化只有这两种，可见示性数不变.

示性数经过重分不变这个事实，是曲面分类的最重要根据之一.

6. 欧拉定理第三证明

已经证明了示性数经过重分不变；这个事实构成欧拉定理第三证明的基础.

已给两个三维凸腔,从它们的一个公共内点[1]把它们投影到一个球面上,就得到球面上两个网络 P 和 Q. 设 S 为"合并"P, Q 所得到的网络: S 的二维腔是 P, Q 的二维腔的非空交集; S 的棱是 P, Q 的棱的交点对后者的重分, S 的顶点是 P, Q 的顶点加上 P, Q 的棱的交点. 于是 S 是 P 的重分, 也是 Q 的重分[2],根据上节结果, $\chi(S) = \chi(P)$, $\chi(S) = \chi(Q)$. 故

$$\chi(P) = \chi(Q).$$

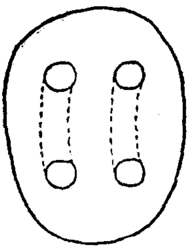
因此,一切凸多面形有相同的示性数 χ. 特殊地,一个四面形的示性数是 $4-6+4=2$,因而一切三维凸腔的示性数

$$\chi(P) = 2, \text{ 或 } e - k + f = 2.$$

这样就证明了欧拉定理.

7. 更高亏格的曲面

上面的考虑可以推广到具有和球面不同亏格的曲面上的网络. 一个 p 亏曲面(具有亏格 p 的曲面)可以通过如下方法得到:在一个球面上去掉 $2p$ 个小圆片,再把小圆周逐对连接起来,但连接时避免相遇. 附图表示二亏曲面. 一亏曲面叫做环面. 可以证明,拓扑等价的一切可定向闭曲面有相同的亏格,而每一个可定向闭曲面属于一个按亏格划分的类.



一个 p 亏曲面上的一切网络有相同的示性数 $\chi(p)$.

证明这个重要定理,可以采用我们证明特殊情况 $p = 0$ (球

---

1) 若这样的公共内点不存在,可以把其中一个三维凸腔移位,使它和另一个三维凸腔有公共内点. ——译者注

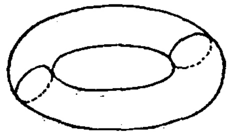
2) 球面或其它曲面上网络的重分和多面形的重分完全类似. ——译者注

面)时的方法：已给曲面上两个网络 P, Q,把它们"合并"，就得到 S,而 S 是 P 的重分，也是 Q 的重分，故

$$\chi(S)=\chi(P)=\chi(Q).$$

这样就证明了每一个 p 亏曲面有一个示性数 χ. 我们要把 χ 表成 p 的函数 $\chi(p)$. 为此，我们采用归纳法.

先确定环面的亏格.附图中的两条剖线把环面分成两部分；每一部分等价于去掉两个二维腔的球面，因而示性数为零. 把两部分接起来不会改变示性数；因为在剖线上，棱数和顶点数相等，在计算示性数时，这两数互相抵消. 于是证明了 χ(环面) = 0.



对于一个 p 亏曲面，我们把它切成两部分：一部分是去掉一个二维腔的环面，另一部分是去掉一个二维腔的 $p-1$ 亏曲面. 前者的示性数是-1，后者的示性数是 $\chi(p-1)-1$. 象上面那样，把两部分接起来，其示性数不变，因此

$$\chi(p)=\chi(p-1)-2. \tag{7.1}$$

由于

$$\chi(0)=\chi(\text{球面})=2, \tag{7.2}$$

所以，根据归纳法，由 (7.1) 和 (7.2)，得

$$\chi(p)=2-2p. \tag{7.3}$$

8. 对于黎曼面[1]的应用

一个 p 亏曲面Σ可以通过一个单值连续函数映射在球面 S 上.

Σ上，除有限多个点(支点)外，每一个点都有这样一个小邻域，在映射中，它和 S 上的一个小区域之间有一一对应关系.

此外，我们假定，在 S 上，除了Σ上的支点的象外，每一点都被

1) 按照拓扑观点，一个黎曼面是具有一定亏格的闭曲面. ——译者注

相同的数目的叶所覆盖，假定这个叶数是 s。

设Σ上 m 重支点的个数是 w_m，令 $w=\sum_m mw_m$。

问题是把 p 写成 s 和 w 的函数。

在 S 上作一个网络，并把它投射在黎曼面Σ上，但规定Σ上的支点在 S 上的象都是网络的顶点。

设 e，k，f 和 ε，κ，φ 依次为 S 和Σ的顶点数、棱数、面数，则

$$\varphi=sf,\quad \kappa=sk,\quad \varepsilon=se-w,$$

$$p=1-\frac{1}{2}\chi(p)=1-\frac{1}{2}(\varphi-\kappa+\varepsilon)$$

$$=1-\frac{1}{2}s(f-k+e)+\frac{1}{2}w,$$

即

$$p=1-s+\frac{1}{2}w, \tag{8.1}$$

这就是所求的结果。

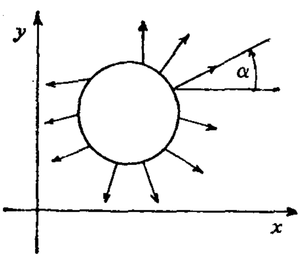
关系 (8.1) 的一个有趣的推论是，w 总是偶数。

考虑函数 $\sqrt{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)\cdots(\zeta-a_{2n})}$[1] 所对应的黎曼面。这时 $w=2n$，$s=2$，$p=1-2+n=n-1$。故黎曼面可以用一个 $(n-1)$ 亏曲面表示。

问题 1. 若用一个 q 亏曲面代替球面，考虑由一个 p 亏曲面到一个 q 亏曲面的点变换，公式 (8.1) 将用什么替代？

9. 欧拉示性数在矢场论中的作用

平面矢场定义 除了有限多个点外，每一点都规定了一个方



1) a_i 互不相同。——译者注

向，而这个方向(用幺矢表示)在平面上(除上述的点外)是连续函数;那些例外的点叫做奇点.

奇点的指数 以一个奇点为中心,作一个小圆,使圆内或圆上都没有矢场的其它奇点. 在圆周上取任意一点为始点，设 α 为矢场在该点的矢量和正 x 轴所作的角，则有向角 $\alpha(\mathrm{mod}2\pi)$ 是唯一确定的. 当 α 的始值固定以后,令该点在圆周上移动,假定在动点的矢量方向是圆周弧长的连续函数,则在圆周上任意点,矢量方向也唯一地确定. 当该动点绕圆一周回到原处时，矢量方向的变化将是 2π 的一个整数倍:

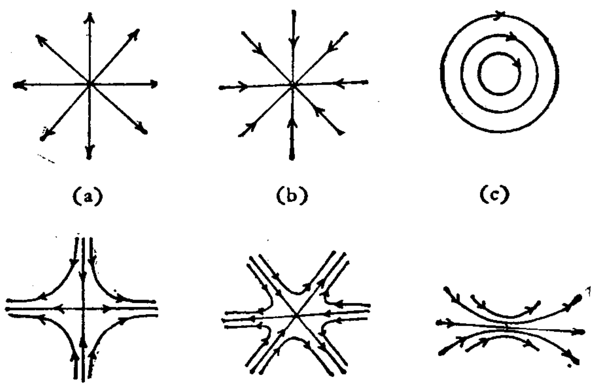
$$\alpha(2\pi)-\alpha(0)=2\pi j,$$

这里的整数 j 就叫做奇点的指数.

a) j 是有限整数,和在圆周上所选始点无关.

b) j 和所取的特殊圆无关,只要圆内和圆周上没有奇点.(这是因为一个圆可以连续变形为另一圆,而 j 必须连续变化,因而在圆的变形中 j 保持不变.)

矢场奇点的例:



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

如果把这些矢场看作梯度场,则

(a) 是一个源,对应于一个极大点,

(b) 是一个汇,对应于一个极小点,