应用型高等学校教材

线性代数

主编　刘家春

哈爾濱工業大學出版社

应用型高等学校教材

线 性 代 数

主　编　刘家春
副主编　楚兰英

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书是为应用型高等学校学生编写的教材。本书通过二、三阶行列式将高中与大学知识有机地衔接起来，突出强调了处理问题的思路、方法和步骤，着重培养学生解决问题的能力。本书力求做到深入浅出，通俗易懂，突出应用性。全书例题量较大，解题较详细，便于教学。主要内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、相似矩阵及二次型等内容。

本书适用于应用型高等学校学生，也可作为电大、成人教育和高职高专的相关专业教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘家春主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.2

(应用型高等学校教材)

ISBN 7-5603-2191-7

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 008122 号

责任编辑 孙 杰
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 8.5 字数 165 千字
版 次 2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷
印 数 1~4 000 册
定 价 13.90 元

前　　言

线性代数作为数学的一个重要分支，在许多领域有着广泛的应用。现在，不但理工学科，而且经济学、管理学等专业，对线性代数的要求也越来越高。

本书针对应用型教育的特点，力求做到深入浅出，通俗易懂，讲清基本概念，淡化理论证明，突出应用性。本书通过二、三阶行列式将高中与大学知识有机地衔接起来，突出强调了处理问题的思路、方法和步骤，着重培养学生解决问题的能力。本书的主要内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、相似矩阵及二次型。同时，本书针对学生特点给出部分习题的解题过程和全部习题的参考答案，并配有综合练习。全书例题量较大，解题较详细，便于教学。书中带星号(*)为选学内容。

本书在编写过程中征求了哈尔滨工业大学华德应用技术学院领导和任课教师的意见，竺培国教授对本书的出版给予大力支持并提出了建设性的意见。刘福荣、李晶莹、李成德对本书的编写也提出了宝贵意见。

本书第 1、2 章由刘家春编写，第 3、4 章由楚兰英编写，第 5 章由王双编写，于佳彤、张晓楠、关明、杨德彬参加了本书的部分章节的编写、修改、校对的工作，全书由刘家春统稿。

由于编者水平有限，书中疏漏之处恳请读者批评指正。

编　者

2006 年元月于哈尔滨工业大学

目　录

第1章　行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，本章先介绍二、三阶行列式，并推广到 n 阶行列式，以及行列式的基本性质和计算方法，在最后介绍利用克莱姆(Cramer)法则求解线性方程组。

1.1　二、三阶行列式

一、二阶行列式

若二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1, x_2 是未知量，$a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 是未知量的系数，b_1, b_2 是常数项。

用消元法消去方程组中的一个未知量，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同理有

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

由于 x_1, x_2 表达式中分母相同，为便于记忆，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称 D 为**二阶行列式**，其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 称为二阶行列的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**。

二阶行列式是两项的代数和。第一项是主对角线两个元素的乘积带正号，第二项为次对角线两个元素的乘积带负号，这种方法称为对角线法。由此方法解方程组

(1.1) 中的 x_1,x_2,其分子也记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

其中,D_i 表示把 D 中第 i 列换成方程组(1.1)右边的常数所得行列式。

于是,当 $D\neq 0$ 时

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

【例 1】 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=5 \\ x_1-3x_2=-1 \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-14 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7$$

得 $$x_1=\frac{D_1}{D}=2 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=1$$

二、三阶行列式

若三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

其中,x_1,x_2,x_3 是未知量,$a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 是未知量的系数,b_1,b_2,b_3 是常数项。

解此三元线性方程组与二元线性方程组类似。用加减消元法先消去 x_3,得到含 x_1,x_2 的二元线性方程组,然后利用上述求二元线性方程组的结果。在求 x_1 的过程中,有

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=$$
$$b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{21}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

则 x_1 的系数可记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.3}$$

称 D 为**三阶行列式**，三阶行列式含有三行三列，共 9 个元素。式(1.3) 等号右边的代数式叫做**三阶行列式的展开式**，式中共有 6 项，每一项都是行列式中不同行不同列的三个不同元素的乘积，因此三阶行列式的展开式是三个不同元素乘积的代数和。

三阶行列式的值用对角线法，得

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

主对角线(实线连接) 为正，次对角线(虚线连接) 为负。然后把这六个乘积加起来，就得到三阶行列式的展开式。D 称为三元线性方程组(1.2) 的系数行列式。

在 D 中将第 i 列($i = 1,2,3$) 分别换成方程组(1.2) 中等式右边的常数列得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

同样，用对角线法展开 D_i，求 D_i 的值，则式(1.2) 的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

【例 2】 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

解
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 5 + (-1) \times 1 \times 2 + 2 \times 3 \times (-6) - 2 \times 4 \times 2 - 2 \times 1 \times (-6) - (-1) \times 3 \times 5 = 13$$

【例 3】 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

解得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

1.2 n 阶行列式

前面我们用对角线法计算二阶、三阶行列式，求得二元、三元线性方程组的解，而由 n 元n 个线性方程构成的方程组求解是否也能用此方法呢?从式(1.3) 的计算过程中可以看到以下特点：

(1) 等式右边的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积。

(2) 等式右边的每一项都带有正号或负号，正号或负号与下角标有关，三阶行列式共有 $3! = 6$ 项。

(3) 等式右边带正号的项与带负号的项的个数各占一半。

一、排列与逆序

由 n 个不同数码 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级(元) 排列。特殊的 $123\cdots n$ 称为自然排列，n 级(元) 排列共有 $n!$个。

例如，1234 及 2431 都是 4 级排列，4 级排列共有 $4! = 24$ 个。

定义 1 在一个 n 级(元) 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s < i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级(元) 排列中逆序的总数称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例如，排列 23154 中，2 在 1 前面，3 在 1 前面，5 在 4 前面，共有三个逆序，即 $N(23154) = 3$。

定义 2 若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇(偶或 0) 数，则称为奇(偶) 排列。

上例为奇排列，而排列 3241 中 $N(3241) = 4$ 为偶排列。

定义 3 在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中的某两个数 i_s 与 i_t 位置互换，其余的数不动，得到一个新的排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，称这样的变换为一次对换，记为对换($i_s$，$i_t$)，而相邻两个数的对换称为邻换。

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性。

例如，排列 23154 中 $N(23154) = 3$ 为奇排列，对换 1、2 的位置，排列 13254 中 $N(13254) = 2$ 为偶排列。

推论 1 任意一个 n 级排列都可以经过一定次数的对换变成自然排列，并且所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性。

推论 2　全体 n 级排列的集合中，奇排列与偶排列各一半。

二、n 阶行列式的定义

定义 4　把 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.4)$$

计算得到的一个数，称为 n 阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$，其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和。

在式(1.4)的右边每一项乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中的每一个元素取自 D 中的不同行不同列，共有 $n!$ 个乘积项，其中带正号的项和带负号的项各占一半，偶排列取正号，奇排列取负号。

主对角线下方的元素都为零的 n 阶行列式称为**上三角(形)行列式**，主对角线上方的元素都为零的 n 阶行列式称为**下三角(形)行列式**，形式分别如式(1.5)和式(1.6)。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

除主(次)对角线以外其余元素都为零的行列式称为**对角行列式**。

容易算出上(下)三角(形)行列式和对角行列式的值即为主对角线元素的乘积，即在式(1.5)、(1.6)中

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.3　行列式的性质

用行列式的定义直接计算 n 阶行列式的值，要计算 $n!$ 项的 n 个元素乘积的代数和，计算量是相当大的。为此，必须研究行列式的性质，利用性质化简行列式的计

算。以下面的行列式为例。

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\200 & 400 & 800\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}=1\times400\times(-4)+2\times800\times0+5\times200\times2-$$

$$5\times400\times0-1\times800\times2-2\times200\times(-4)=400$$

如果从行列式 D 的第二行中先提出一个公因子 $k=200$,先求出

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1 & 2 & 4\\0 & 2 & -4\end{vmatrix}=2$$

再将公因子 $k=200$ 与 D_1 相乘,得 $D=kD_1=200\times2=400$。

性质 1　行列式中某一行所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

也可以说,用一个数 k 乘行列式等于将行列式的某一行元素分别都乘以 k。

将行列式 D 的行与列互换后得到的新的行列式称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\qquad D^{T}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

性质 2　行列式与其转置行列式相等,即 $D=D^{T}$。

性质 3　若对换行列式的任意两行,则行列式变号。

例如,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 2 & 1\\3 & 5 & 1\end{vmatrix}=2+6+60-18-5-8=37$$

若将第二行与第三行互换得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 5 & 1\\4 & 2 & 1\end{vmatrix}=5+8+18-60-2-6=-37$$

性质 4　若行列式的任意两行相同，则行列式的值为零。

例如，

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=12+12+18-12-12-18=0$$

推论　若行列式的任意两行元素成比例，则行列式的值为零。

性质 5　若行列式中的某一行的每一个元素都可以写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+b_{i1}&a_{i2}+b_{i2}&\cdots&a_{in}+b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

上式说明，若两个行列式中除第 i 行之外，其余 $n-1$ 行对应相同，则两个行列式之和只对第 i 行对应元素相加，其余行保持不变。

性质 6　把行列式某一行的所有元素同乘以数 k 后加到另一行对应位置的元素上，行列式的值不变。

由推论和性质 5 可证得此性质。

由性质 2 可知以上性质对于列也同样成立。

在行列式的计算中可根据行列式的以上性质将行列式进行变换，变换成上三角或下三角行列式，也可变成对角行列式，从而容易计算出行列式的值。

在变换的过程中注意以下几点：

(1) 当第 i 行提出公因子 k 时，表示为“k ⓘ”。

(2) 当第 i 行与第 j 行互换时，表示为“ⓘ,ⓙ”。

(3) 当第 i 行加上第 j 行的 k 倍时，表示为“ⓘ + ⓙk”。

(4) 以上对行的变换对列也适用，行变换时写在等号上方，列变换时写在等号的下方。

【例 4】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1\\297&101&99\\5&-3&2\end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix}3&1&1\\297&101&99\\5&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1\\300-3&100+1&100-1\\5&-3&2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}3&1&1\\300&100&100\\5&-3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1&1\\-3&1&-1\\5&-3&2\end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix}3&1&1\\-3&1&-1\\5&-3&2\end{vmatrix}\xlongequal{②+①}$$

$$\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&0\\5&-3&2\end{vmatrix}\xlongequal[③+②\frac{3}{2}]{①+②(-\frac{1}{2})}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&2&0\\5&0&2\end{vmatrix}=12-10=2$$

【例 5】 计算下列行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&x&2&2\\2&2&x&3\\3&3&3&x\end{vmatrix}\qquad(2)\ D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$$

解

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&x&2&2\\2&2&x&3\\3&3&3&x\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{②+①\\③+①(-2)\\④+①(-3)}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x+1&3&3\\0&0&x-2&1\\0&0&0&x-3\end{vmatrix}=$$

$$(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{②+①(-1)\\④+①(-1)}}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{③+②(-1)}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&0&7\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{(③,④)}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&3&3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=-(3\times7)=-21$$

如果 n 阶行列式中第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列的元素的相反数,即

$a_{ij}=-a_{ji}$，我们把具有这种特点的行列式叫做**反对称行列式**。同样，如果 n 阶行列式中第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列的元素，即 $a_{ij}=a_{ji}$，我们把这样的行列式叫做**对称行列式**。

例如，$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 都是反对称行列式，而

$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ 都是对称行列式。

1.4　行列式按行(列)展开

在行列式的计算中，计算低阶行列式比计算高阶行列式简单，所以常利用行列式的性质把高阶行列式转化为低阶行列式来计算。

定义 5　在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩余的元素按原次序构成一个 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。

【例 6】　写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 15 & -9 & 6 & 13 \\ -2 & 3 & 12 & 7 \\ 10 & -14 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的代数余子式。

解　首先，在行列式中划去 a_{32} 所在的行和列，得到 a_{32} 的余子式

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ & \vdots & & \\ 15 & -9 & 6 & 13 \\ & \vdots & & \\ \cdots -2 \cdots & -3 & -12 & \cdots 7 \cdots \\ & \vdots & & \\ 10 & -14 & 8 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 15 & 6 & 13 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

再求代数余子式

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 15 & 6 & 13 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

定理 2 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)中所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.7}$$

证 第一,在 D 中第一行的元素中除 a_{11} 外其余元素均为零的特殊情况,即

$$D_1 = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}M_{11}$$

第二,在 D 中第 i 行的元素中除 a_{ij} 外其余元素均为零的情况下,利用第一的结果,将 a_{ij} 调换到行列式的左上角,即将第 i 行经过 i 次邻换换到第一行,再经过 j 次邻换将第 j 列换到第一列,这样经过 $i+j-2$ 次邻换,就把 a_{ij} 换到左上角(即 a_{11} 的位置)。即

$$D = a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

第三,当每个元素都不为零时,将 D 写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

定理 3 n 阶行列式 D 中任意一行(列)中的元素与另外一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即

当 $i \neq j$ 时

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \tag{1.8}$$

【例 7】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

解 将 D 按第三列展开,则应有

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}$$

其中，$a_{13} = 3, a_{23} = 1, a_{33} = -1, a_{43} = 0$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 19 \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -63$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 18 \quad A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

所以

$$D = 3 \times 19 + 1 \times (-63) + (-1) \times 18 + 0 \times (-10) = -24$$

计算行列式时可以通过降低它的阶数，即把较高阶的行列式化简成较低阶的行列式进行计算。降阶的方法是：**先用行列式的性质将行列式的某一行(列)化成仅含有一个非零元素，再按此行(列)展开，变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式。**

如例 7 中，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[④ + ③ \times 2]{① + ③ \times 2} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \times (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[③ + ② \times 2]{① + ② \times (-1)} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 \times (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 18 = -24$$

【例 8】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 1 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

解 $$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 1 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{① + ③(-1) \\ ② + ④(-1)}]{} \begin{vmatrix} 1-b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ b-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{③ + ① \\ ④ + ②}}$$

$$\begin{vmatrix} 1-b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & 0 & 1+b & 2a \\ 0 & 0 & 2a & b \end{vmatrix} = (1-b)\begin{vmatrix} -b & a & b \\ 0 & 1+b & 2a \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} =$$

$$(1-b)(-b)\begin{vmatrix} 1+b & 2a \\ 2a & b \end{vmatrix} = b(1-b)[4a^2 - b(1+b)]$$

【例 9】 求证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

证 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

由上题的结论可以推广到一般情况。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$