经　济　数　学

（上　册）

R. G. D. Allen 著

經 濟 數 學

Mathematical Analysis for Economists

艾倫 (R. G. D. Allen) 原著

余國燾 譯

數理者，專門研究關係型態之科學也，就特定的相關事物及其特定的相關形式，加以抽象。

摘自懷德海(Alfred North Whitehead)著

觀念奇譚(*Adventures of Ideas*)

科學的最終理想，是求連結孤立的物象成爲合乎邏輯或者數理的定律。

摘自柯恩 (Morris R. Cohen)著

理性與自然 (*Reason and Nature*)

1938年初版

1960年重印

倫敦麥克米倫公司

(London, Macmillan & Co. Ltd)

著者原序

本書原是1931年以來在倫敦政治經濟學院每年的講稿，目的在為學經濟的人開一門對他最適用的純數學功課。數學方法講到一個地方，便用來解釋經濟理論的問題。每一章都有習題，希望讀者從做習題當中慢慢習慣數學工具，習慣應用數學工具到具體的經濟問題上去。限於討論的方法，不想寫成一本有系統的數理經濟學，但是數理經濟學的要點，都已在正文中或在習題中可以找到。

我希望本書能有益於各方面的讀者。頭幾章主要是為毫無數學訓練的學生寫的，有也可能只是多年以前在大學預科裏唸的一點。這類學生可能需要先熟練基本方法的應用，才能往下讀較深的方法。至於程度已經較高的學生，或也可以把前幾章作複習之用，很快跳到後面的部份。若是學有素養的數理經濟學者，則此書大致可作參考之用，且在某些地方發現新的觀點。

我曾得自許多位數學家和經濟學家們有益的指教和批評。我特別感激鮑蘭(A. L. Bowley)教授與馬遏克(Dr. J. Marschak)博士，他們對初稿的建議，使本書有了許多改進。我也感謝那盧 (Mr. G. J. Nash) 君校讀全稿，指出習題中的許多小毛病。艾倫序於倫敦經濟學院，1937年10月。

書目提要

何謂數理分析以及它幾世紀以來的變化路線必須隨時記住。不僅初學的人，就算是有了成就的數學家吧，都會讀了這些啓蒙的小書受到益處，例如

Whitehead: *An Introduction to Mathematics* (Home University Library, 1911).

Brodesky: *The Meaning of Mathematics* (Benn's Sixpenny Library, 1929).

Rice: *The Nature of Mathematics* (An Outline of Modern Knowledge, 1931).

或讀比較大的書，例如

Dantzig: *Number* (1930).

Forsyth: *Mathematics in Life and Thought* (1929).

Hogben: *Mathematics for the Million* (1936).

數學史是許多書的主題；短的佳作有

Rouse Ball: *A Short Account of the History of Mathematics* (6th ed. 1915).

Sullivan: *The History of Mathematics in Europe* (1925).

讀者想重修他大學預科程度的代數幾何，以求對微積分有一「實用」的概念，則可參閱

Durell: *Elementary Geometry* (1919).

Durell, Palmer and Wright: *Elementary Algebra* (1925)（包括初等微積分的入門）。

Thompson: *Calculus made Easy* (2nd. ed., 1919).

Irving Fisher: *A Brief Introduction to the Infinitesimal Calculus* (3rd ed., 1909).

一般討論數理分析的教科書，無論範圍或討論方法，都有很大出入。下面選出的書，內容有初等到高等，方法有應用到嚴格的理論。它們彼此互相補充，而非衝突。

Hardy: *A Course of Pure Mathematics* (3rd *e*d., 1921).

Griffin: *An Introduction to Mathematical Analysis* (無日期).

Osgood: *Introduction to the Calculus*(1922); *Advanced Calculus* (1925).

de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse Infinitésimale* (5th *e*d.), Vol. I (1923), Vol. II (1925).

Courant: *Differential and Integral Calculus* (English *e*d.), Vol. I (1934), Vol. II (1936).

Pavate and Bhagwat: *The Elements of Calculus* (2nd *e*d., 1932).

數理分析上希臘字母的用法

英文字母之用作數學分析的符號，尙欠不够，所以要用希臘字母來應付，可有更大的伸縮餘地。在數學上運用希臘字母的用法，本無一定的規則，但下表所列可算是相當普遍的用法。注意，以下英希兩國字母的對照，只是按其在數學上的用途而言的，不是文字上的對照。

希臘字母		英文字母	一般用途
α	alpha	a	
β	beta	b	常數
γ	gamma	c	
κ	Kappa	k	
λ	Lambda	l	常數、參數
μ	mu	m	
ν	nu	n	
ξ	xi	x	
η	eta	y	變數
ζ	zeta	z	
π	pi	p	
ρ	rho	r	特種常數或變數（例如 π 爲圓周長度與半徑之常數比，ρ 爲利率等。）
σ	sigma	s	
τ	tau	t	
ϕ	phi	f	
Φ	大寫的 phi	F	函數符號

ψ	psi	g	
Ψ	大寫的 psi	G	
δ	delta	d	變數增量符號
Δ	大寫的 delta	D	
Σ	大寫的 Sigma	S	加號
ϵ	epsilon	–	微小的正數常數
θ	theta	–	正數分數

在三角學中，$\alpha\beta\gamma$ 可以表示固定角度，而 θ ϕ ψ 等則可表示角度的變數。

經濟數學目錄

第一章

數 (Numbers) 與變數 (Variables)

1.1 導　　論

是習慣把數學劃成二門獨立的學問：幾何學 (geometry) 和解析學 (analysis)。幾何學是研究空間和空間關係的學問，在幾何學中，我們研究曲線、面、和其他由空間中點所構成的圖形，研究它們的性質和特徵。數學解析則包括算術和代數，專門討論數，數和數之間的關係，以及這些關係之間的演算。這兩門學問之間的差別，就在它們基本［材料］的不同，幾何學上是空間的點，而解析上是數。

然而隨着數理方法的演進，我們發現幾何學和解析學兩者間的差別愈來愈模糊，愈來愈不重要。雖說它們預定的用途仍舊很有差別，但它們的方法似乎都是抽象的，而且性質上根本相仿。數學之中總有各式各樣符號的定義，進而說明這些符號之間的演算法則。至於幾何符號與數學符號之間的差別，則多少總是人為的。更有進者，我們知道，設計一個方法，把空間的點和數連結起來，亦即把幾何學和分析學連結起來，原是一件很簡單的事。看到代數之中用到圖解方法，以及初等三角學 (trigonometry) 簡直就是應用代數方法去研究空間圖形，就知道這種連結眞是可能的。

數理方法是抽象的，因而發展時必定不曾兼顧到實用。而且基本性質上它是邏輯的。例如說，初等幾何學的大部份，原是一種形式邏輯的訓練，從周全的假設中推出它們的結論來。只是數理方法的發展，使它不久便感需要採用一個非形式邏輯所有的概念，這就是［無窮 (infinity)］的概念，無窮大，無窮連續等等。大體說來，數學方法可說是形式邏輯的一個分枝，向着某個方向伸出去，