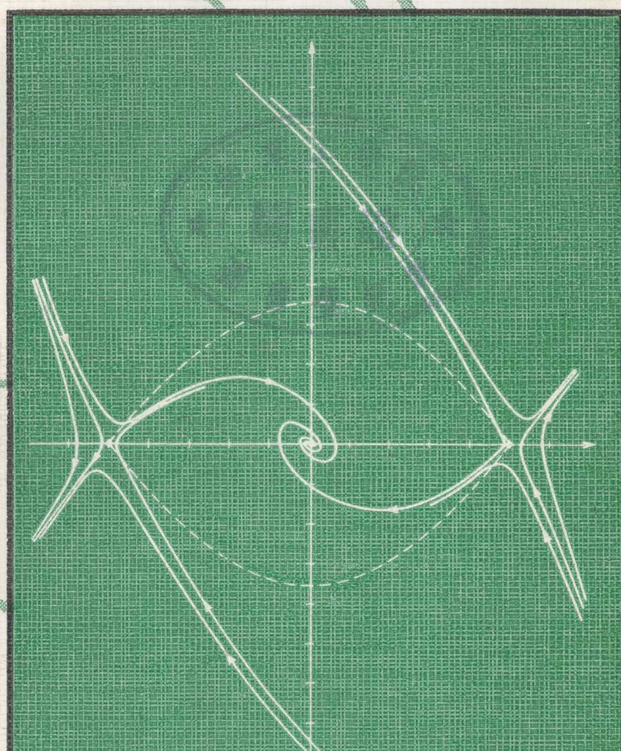
高等工程數學

綱要及題解

第三冊

編著者

劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學

綱要及題解

（題解部份完全照 **1979**

Erwin Kreyszig 第四版）

第 三 册

編 著 者

劉 偉 源　傅 光 華

私立大同工學院教授

東華書局印行

中華民國七十年十一月初版

大專用書 高等工程數學綱要及題解

（全四冊）

第三冊 定價 新臺幣壹百元整

（外埠酌加運費滙費）

編著者 劉偉源 傅光華

發行人 卓鑫淼

出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

（70036）

前　言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作爲教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics－由Kreyszig或由Wiley 所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分爲四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分爲常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、冪級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、變分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分爲偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尚含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

本書採用出版書局之意見，將 Erwin Kreyszig 所著高等工程數學第四版之全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編者謹識

民國七十年五月

目　次

綱　要

習題及解答

綱 要 部 份

第十章
傅利葉級數偏微分方程式簡介

10-1 偏微分方程式之形成

根據物理現象及力的平衡，能量的平衡，動量的平衡等基本定理，將發生於物體上之現象以數學式表達出來，加以合理的假設及簡化過程，可得表示物體行爲之數學式，此數學式中包含了兩種以上的微分式，稱爲偏微分方程式，茲以下列各情況討論之：

1 ） 完全彈性繩索之小幅度振動

基本假設爲 (A) 振動之振幅很小，(B) 繩之質量均勻，考慮其兩端固定，以 u 表示其位移

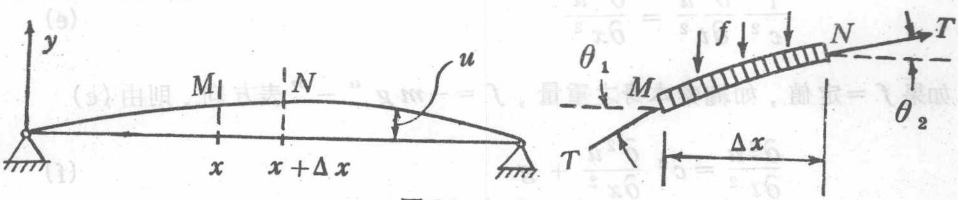


圖 10-1.1

由於振幅很小，角度 θ 亦小，因此

$$\sin\theta_1=\tan\theta_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad , \quad \sin\theta_2=\tan\theta_2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

根據牛頓第二定律 $\Sigma F_{y\text{方向}}$ = 質量×加速度

$$\therefore\quad T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]-f\,\Delta x=m\cdot\Delta x\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \qquad \text{(a)}$$

$\partial^2u/\partial t^2$ 爲加速度，m 爲質量／單位長度，f 爲作用於 MN 繩段上之外力，T 爲繩索之張力，(a) 式除以 $m\,\Delta\,x$，改寫成

$$\frac{T}{m}\ \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}}{\Delta x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{f}{m}$$

取極限 $\Delta x \to 0$，則

$$\left(\frac{T}{m}\right)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}}{\Delta x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{f}{m}$$

即爲 $\left(\dfrac{T}{m}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{f}{m}$ (b)

令 $c^2=T/m$，c 之單位爲長度／時間，爲速度之單位，表示振動波穿越介質之速度，所以(b)式改寫爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{f}{m} \quad \text{(c)} \qquad 或 \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{f}{T} \quad \text{(d)}$$

如果 $f=0$，即爲自由振動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(e)}$$

如果 f = 定值，如繩索本身之重量，$f=-mg$，“－”表方向，則由(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g \qquad \text{(f)}$$

如果 f 爲一含 (x, t) 之函數，則 $f=f(x,t)$，而

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)\text{，而}\quad F(x,t)=\frac{-f(x,t)}{T} \qquad \text{(g)}$$

2） 單方向之不穩定熱傳導問題

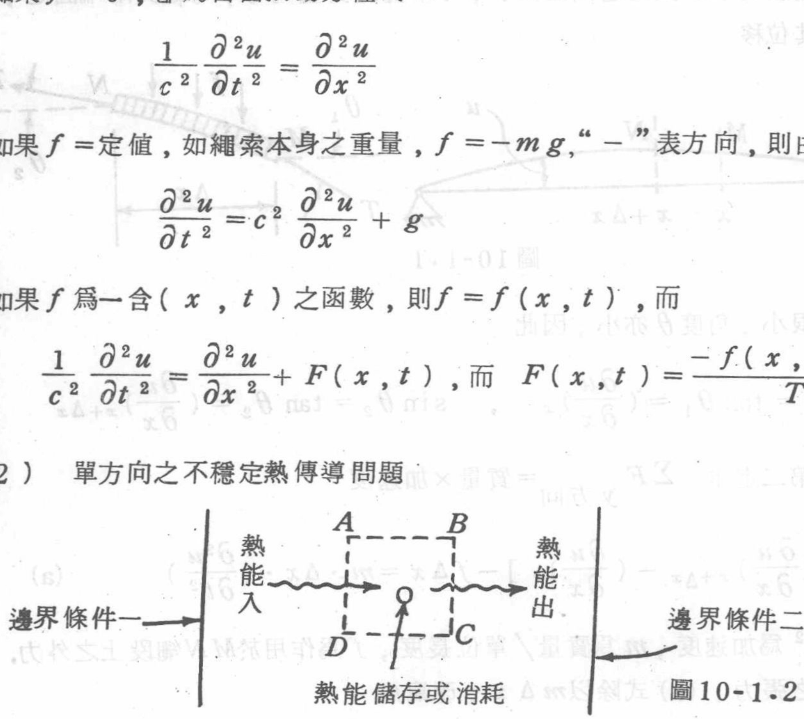


圖10-1.2

根據能量之平衡，進入方塊$ABCD$之熱能與其內所生之熱能必需等於自$ABCD$流出之熱能與在$ABCD$內熱能儲存之和，故

$$(q\Delta x)-K\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}=-K\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x+\Delta x}+\rho c\Delta x\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(h)}$$

改寫成

$$\frac{(K\frac{\partial T}{\partial x})_{x+\Delta x}-(K\frac{\partial T}{\partial x})_x}{\Delta x}+q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

取極限值$\Delta x\to 0$，則

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(K\frac{\partial T}{\partial x})_{x+\Delta x}-(K\frac{\partial T}{\partial x})_x}{\Delta x}=\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial T}{\partial x})$$

如果K=定值，則得

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q}{K}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(i)}$$

$\alpha=K/\rho c$，α稱爲熱擴散係數，q如爲正值，稱爲熱源（heat source），若爲負值，則稱爲heat sink。

3） 重力波動

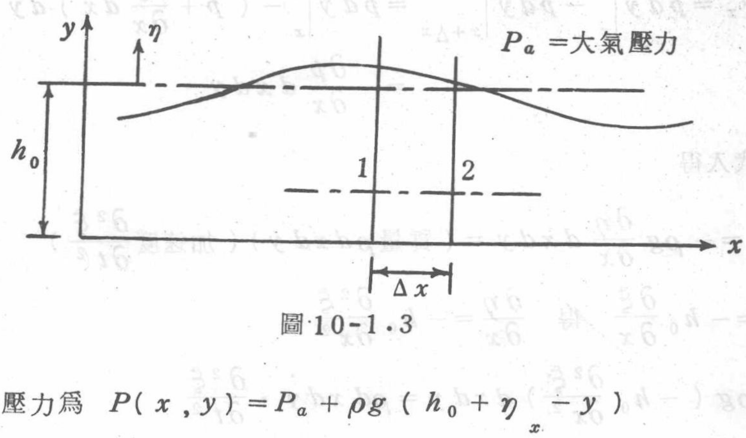


圖 10-1.3

在點1之壓力爲 $P(x,y)=P_a+\rho g(h_0+\eta_x-y)$

在點 2 之壓力爲 $P(x+\Delta x, y)=P_a+\rho g(h_0+\eta\big|_{x+\Delta x}-y)$

則 $P(x+\Delta x, y)-P(x, y)=\rho g(\eta\big|_{x+\Delta x}-\eta\big|_{x})$

左右各除以 Δx ，取極限值 $\Delta x\to 0$ ，則 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\rho g\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ (j)

由連續方程式（ continuity equation ）得

$$h_0\,\Delta x=(h_0+\eta)\left[\Delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\right]$$

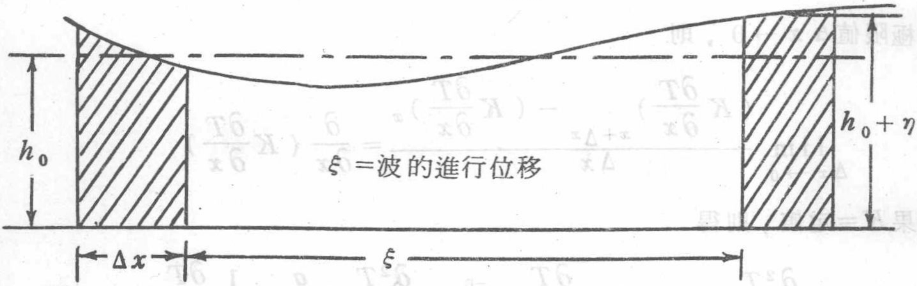


圖 10-1．4

忽略 $\eta\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$ 項後，得 $\eta=-h_0\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ (k)

由牛頓第二定律，x 方向之力總和爲

$$F_x=p\,dy\big|_x-p\,dy\big|_{x+\Delta x}=p\,dy\big|_x-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy$$

以 (j) 代入得

$$F_x=-\rho g\frac{\partial \eta}{\partial x}dx\,dy=(\text{質量}\,\rho\,dx\,dy)(\text{加速度}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2})$$

由 $\eta=-h_0\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ 得 $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=-h_0\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

而 $-\rho g\left(-h_0\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)dx\,dy=\rho\,dx\,dy\cdot\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\therefore\quad (g h_0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\ ,$$

令 $c^2=g h_0$，則得基本波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1}$$

4) 彈性桿(elastic bar)之軸向振動

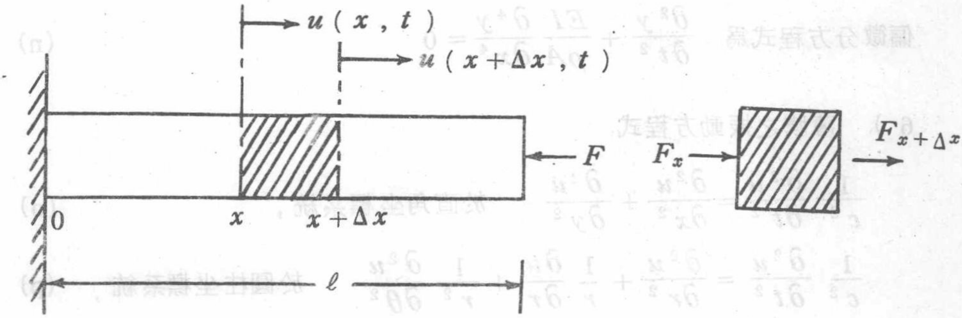


圖 10-1.5

$$F_x=-AE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\ ,\qquad F_{x+\Delta x}=AE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

F = 力量，A = 截面積，E = 楊氏彈性係數，u = 位移

根據牛頓第二定律

$$AE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-AE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x=\rho A\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或 $$\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $\rho/E=1/c^2$，則仍得基本波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{m}$$

5 ） 彈性桿之側向振動方程式

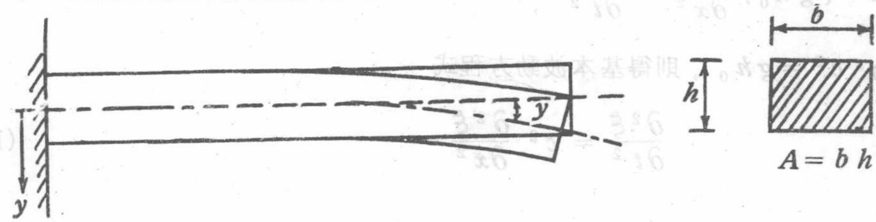


圖10-1.6

偏微分方程式為 $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0 \qquad \text{(n)}$$

6 ） 薄膜之振動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ 於直角坐標系統， (o)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$ 於圓柱坐標系統， (p)

7 ） 方形薄板方程式

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}+\frac{2\,\partial^4 \omega}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D} \qquad \text{(q)}$$

ω＝位移，$q(x,y)$＝板上之受力，D＝薄板性質係數，

8 ） 邊界層層流統治方程式

若流體為不可壓縮流，在穩定狀況下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\,, \\[2ex] u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \text{(r)}$$

為其連續方程式與 x 方向運動方程式，其他各種情形討論到時再考慮。

10-2　線性二階偏微分方程式之區分

設 $\mathbf{L}$ 表示線性二階偏微分方程式之表示符號，則一個最普通的（x,y,z,t）坐標系統之線性偏微分方程式可以用 $\mathbf{L}[u]=0$ 來表示，$u=u(x,y,z,t)$。以 $\underset{\sim}{x}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，則

$$\mathbf{L}=A(\underset{\sim}{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+B(\underset{\sim}{x},t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+C(\underset{\sim}{x},t)\frac{\partial^2}{\partial \underset{\sim}{x}^2}$$

$$+D(\underset{\sim}{x},t)\frac{\partial}{\partial t}+E(\underset{\sim}{x},t)\frac{\partial}{\partial x}+F(\underset{\sim}{x},t) \qquad (1)$$

因此若在（x，t）坐標系統上，則 $u=u(x,t)$，而 $\mathbf{L}$ 爲

$$\mathbf{L}=A(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+B(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+C(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$+D(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+E(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+F(x,t) \qquad (2)$$

要區分 $\mathbf{L}[u]=0$ 是一個雙曲線型（ hyperbolic ），拋物線型（ parabolic），或橢圓型（ elliptic ），則與 $\mathbf{L}[u]=0$ 之係數有重要關係。

先考慮簡單情形

$$\mathbf{L}[u]\fallingdotseq A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (3)$$

其 A，B，C 爲常數，將(3)自（x，t）坐標平面經過線性坐標軸轉變至（ξ，η）坐標平面，

$$\xi=\alpha x+\beta t \quad , \quad \eta=\gamma x+\delta t \qquad (4)$$

而(3)成爲

$$(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(2A\beta\delta+B\alpha\delta+B\beta\gamma$$

$$+2C\alpha\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(A\delta^2+B\gamma\delta+C\gamma^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0 \qquad (5)$$

若要使(3)經坐標軸轉變後成爲 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 之簡單式，除了 $A=C=0$ 之特例外，要