

642973

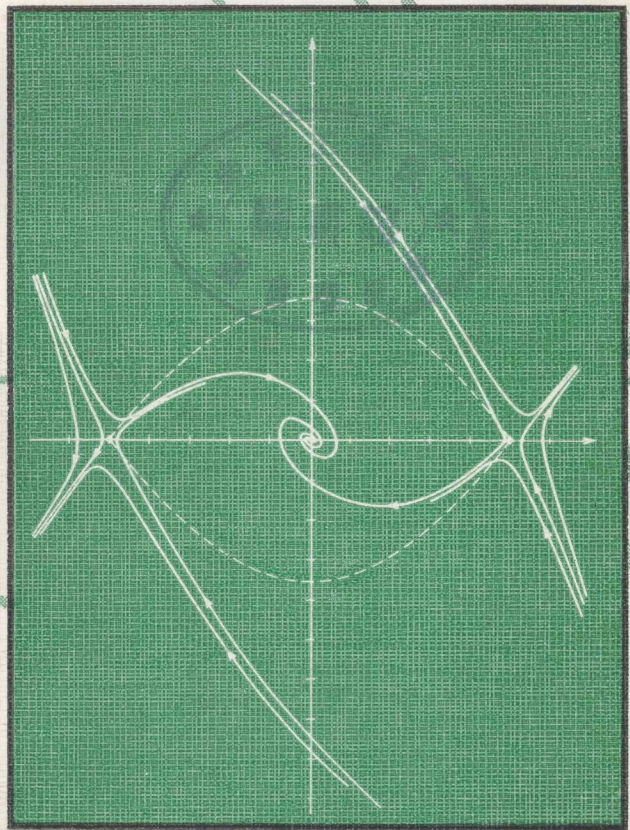
高等工程數學

綱要及題解

第三冊

編著者

劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學

綱要及題解

(題解部份完全照 1979

Erwin Kreyszig 第四版)

第 三 冊

編 著 者

劉 偉 源 傅 光 華

私立大同工學院教授

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國七十年十一月初版

大專
用書 **高等工程數學綱要及題解**

(全四冊)

第三冊 定價 新臺幣壹百元整

(外埠酌加運費滙費)

編著者 劉偉源 傅光華

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(70036)

前 言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作為教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics—由 Kreyszig 或由 Wiley 所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分為四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分為常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、幕級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、變分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分為偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尚含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

本書採用出版書局之意見，將 Erwin Kreyszig 所著高等工程數學第四版之全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編 者 謹 識

民國七十年五月

目次

綱要

第十章 傅利葉級數偏微分方程式簡介	3 ~ 35
-------------------	--------

10-1 偏微分方程式之形成	10-2 線性二階偏微分方程式之區分
10-3 基本傅利葉級數	10-4 兩個變數的傅利葉級數

第十一章 第一大段：基本偏微分方程式	36 ~ 104
--------------------	----------

11-1-1 基本熱方程式，範圍 $-\infty < x < \infty$ 或 $0 < x < \infty$	
11-1-2 基本熱方程式問題	11-1-3 係數為變數之情形
11-1-4 圓柱坐標問題	11-1-5 兩度空間穩定性熱傳導問題
11-1-6 圓柱坐標上問題	11-1-7 特殊解法
11-1-8 波動方程式之範圍為 $-\infty < x < \infty$ 者	11-1-9 自由振動之情形
11-1-10 受到外力影響下之振動情形	11-1-11 有集中質量的情形
11-1-12 係數為變數之情形	11-1-13 圓柱坐標問題

第十一章 第二大段：高階偏微分方程式	105 ~ 140
--------------------	-----------

11-2-1 偏微分方程兩度空間之和諧問題	11-2-2 兩度空間之長方形薄膜振動
11-2-3 參數變化法	11-2-4 彈性柱之側向自由振動
11-2-5 球坐標問題	11-2-6 薄板問題
11-2-7 複變函數解法	

第十一章 第三大段：平面圖形轉變及其應用	141 ~ 163
----------------------	-----------

11-3-1 保角圖形轉變	11-3-2 基本圖形轉變	11-3-3 圖形區域轉變之應用
---------------	---------------	------------------

第十一章 第四大段：偏微分方程式之直接電算方法	164 ~ 202
-------------------------	-----------

第十二章 複變函數基礎	203 ~ 224
-------------	-----------

12-1	複變數之定義	12-2	解析函數	12-3	三角函數與雙曲線函數	12-4	指數函數	12-5	對數函數
第十三章 複數平面之區域轉換及其應用..... 225 ~ 242									
13-1	基本圖形	13-2	應用						
第十四章 複數積分..... 243 ~ 256									
14-1	定積分	14-2	Cauchy-Goursat 理論	14-3	Cauchy 積分定理的延伸	14-4	解析函數之微分		
第十五章 級數..... 257 ~ 260									
15-1	複數級數								
習題及解答									
第十章 符立爾級數及積分..... 263 ~ 367									
10.1	週期性函數，三角級數								263
10.2	符立爾級數，尤勒公式								276
10.3	任意週期之函數								291
10.4	偶函數與奇函數								303
10.5	半幅展開式								313
10.6	不用積分決定符立爾係數								326
10.7	強迫振動								345
10.8	利用三角函數多項式之近似法，平方誤差								352
10.9	符立爾積分								355
第十一章 偏微分方程式..... 368 ~ 449									
11.1	基本觀念								368
11.3	分離變數法（乘積法）								374
11.4	波形方程式之第阿倫伯解答								386

11.5	一度熱傳導	394
11.6	無限長桿內之熱量傳導	402
11.8	長方形薄膜	410
11.9	極座標中的拉氏運算	419
11.10	圓形薄膜・貝索方程式	424
11.11	拉普拉斯方程式・位勢	430
11.12	球面座標中之拉氏方程式・雷建德方程式	436
11.13	應用於偏微分方程式的拉氏變換運算法	444
第十二章	複數・複數解析函數	450 ~ 516
12.1	複數	450
12.2	複數之極座標式・三角不等式	456
12.3	複平面中之曲線及區域	460
12.4	複數函數、極限、導數、解析函數	465
12.5	高奇・利曼方程式・拉普拉斯方程式	475
12.6	有理函數・根	486
12.7	指數函數	493
12.8	三角函數與雙曲線函數	499
12.9	對數，一般乘冪	510
第十三章	保角寫像法	517 ~ 555
13.1	寫像法	517
13.2	保角寫像法	528
13.3	線性分數變換	533
13.4	特殊線性分數變換	535
13.5	其他基本函數之寫像法	542
13.6	利曼曲面	552
第十四章	複變積分	556 ~ 591
14.1	複平面內之線積分	556
14.2	複變線積分之基本性質	563

14.3	高奇積分定理.....	570
14.4	以不定積分法求線積分值.....	579
14.5	高奇積分公式.....	583
14.6	解析函數之導數.....	587
第十五章 數列與級數.....		592~611
15.1	數 列.....	592
15.3	數列與級數之高奇收斂原理.....	597
15.4	單調實數列・萊布尼茲實級數試驗法.....	599
15.5	級數收斂及發散之試驗法.....	604

網 要 部 份

第十章

傅利葉級數偏微分方程式簡介

10-1 偏微分方程式之形成

根據物理現象及力的平衡，能量的平衡，動量的平衡等基本定理，將發生於物體上之現象以數學式表達出來，加以合理的假設及簡化過程，可得表示物體行為之數學式，此數學式中包含了兩種以上的微分式，稱為偏微分方程式，茲以下列各情況討論之：

1) 完全彈性繩索之小幅度振動

基本假設為 (A) 振動之振幅很小，(B) 繩之質量均勻，考慮其兩端固定，以 u 表示其位移

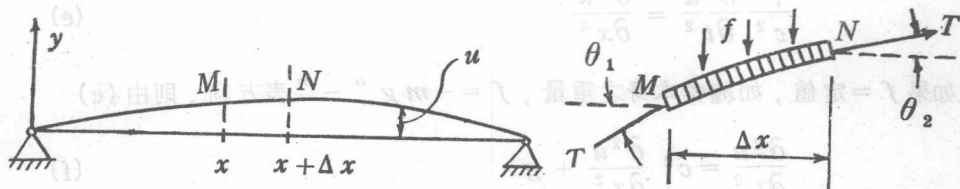


圖 10-1.1

由於振幅很小，角度 θ 亦小，因此

$$\sin \theta_1 = \tan \theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x, \quad \sin \theta_2 = \tan \theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

根據牛頓第二定律 $\Sigma F_{y \text{ 方向}} = \text{質量} \times \text{加速度}$

$$\therefore T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] - f \Delta x = m \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (a)$$

$\partial^2 u / \partial t^2$ 為加速度， m 為質量 / 單位長度， f 為作用於 MN 繩段上之外力， T 為繩索之張力，(a) 式除以 $m \Delta x$ ，改寫成

$$\frac{T}{m} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial u}{\partial x})_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{f}{m}$$

取極限 $\Delta x \rightarrow 0$, 則

$$(\frac{T}{m}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial u}{\partial x})_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{f}{m}$$

即為 $(\frac{T}{m}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{f}{m}$ (b)

令 $c^2 = T/m$, c 之單位為長度/時間, 為速度之單位, 表示振動波穿越介質之速度, 所以 (b) 式改寫為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{f}{m} \quad (c) \quad \text{或} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{f}{T} \quad (d)$$

如果 $f = 0$, 即為自由振動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (e)$$

如果 f = 定值, 如繩索本身之重量, $f = -mg$, “-”表方向, 則由 (c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \quad (f)$$

如果 f 為一含 (x, t) 之函數, 則 $f = f(x, t)$, 而

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \text{ 而 } F(x, t) = \frac{-f(x, t)}{T} \quad (g)$$

2) 單方向之不穩定熱傳導問題

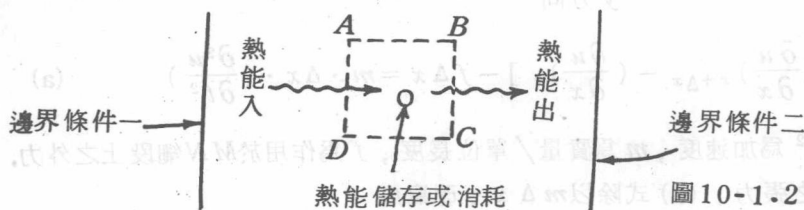


圖 10-1.2

根據能量之平衡，進入方塊 $ABCD$ 之熱能與其內所生之熱能必需等於自 $ABCD$ 流出之熱能與在 $ABCD$ 內熱能儲存之和，故

$$(q \Delta x) - K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x+\Delta x} + \rho c \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \quad (h)$$

改寫成

$$\frac{(K \frac{\partial T}{\partial x})_{x+\Delta x} - (K \frac{\partial T}{\partial x})_x}{\Delta x} + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

取極限值 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(K \frac{\partial T}{\partial x})_{x+\Delta x} - (K \frac{\partial T}{\partial x})_x}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial T}{\partial x})$$

如果 $K = \text{定值}$ ，則得

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (i)$$

$\alpha = K / \rho c$ ， α 稱為熱擴散係數， q 如為正值，稱為熱源 (heat source)，若為負值，則稱為 heat sink。

3) 重力波動

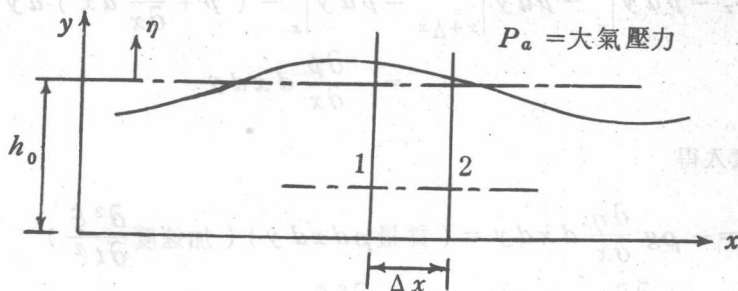


圖 10-1.3

在點 1 之壓力為 $P(x, y) = P_a + \rho g (h_0 + \eta - y)$

在點 2 之壓力爲 $P(x+\Delta x, y) = P_a + \rho g(h_0 + \eta|_{x+\Delta x} - y)$

$$\text{則 } P(x+\Delta x, y) - P(x, y) = \rho g(\eta|_{x+\Delta x} - \eta|_x)$$

左右各除以 Δx ，取極限值 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (j)$$

由連續方程式 (continuity equation) 得

$$h_0 \Delta x = (h_0 + \eta) \left[\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right]$$

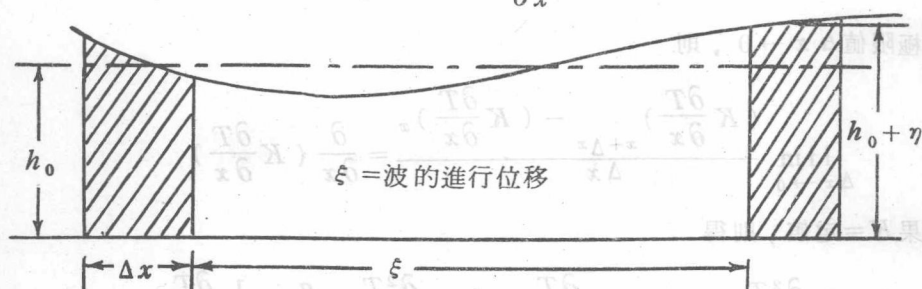


圖 10-1.4

忽略 $\eta \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$ 項後，得
$$\eta = -h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (k)$$

由牛頓第二定律， x 方向之力總和爲

$$\begin{aligned} F_x &= p dy|_x - p dy|_{x+\Delta x} = p dy|_x - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

以 (j) 代入得

$$F_x = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy = (\text{質量 } \rho dx dy) (\text{加速度 } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2})$$

由 $\eta = -h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 得
$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

而
$$-\rho g \left(-h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx dy = \rho dx dy \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\therefore (gh_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

令 $c^2 = gh_0$ ，則得基本波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1)$$

4) 彈性桿 (elastic bar) 之軸向振動

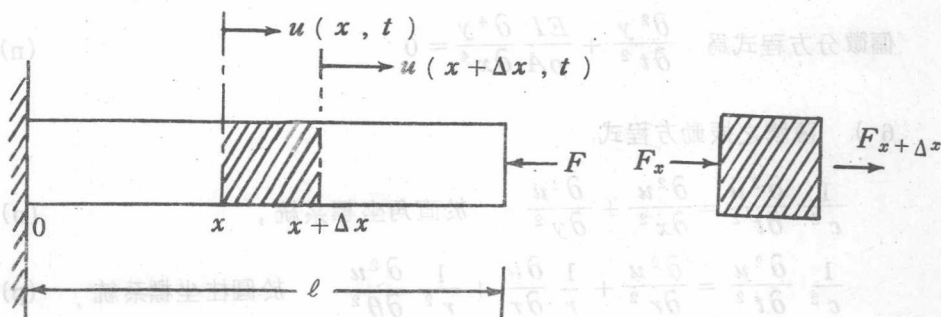


圖 10-1.5

$$F_x = -AE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x, \quad F_{x+\Delta x} = AE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

F = 力量, A = 截面積, E = 楊氏彈性係數, u = 位移

根據牛頓第二定律

$$AE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - AE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{或} \quad \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $\rho/E = 1/c^2$ ，則仍得基本波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (m)$$

5) 彈性桿之側向振動方程式

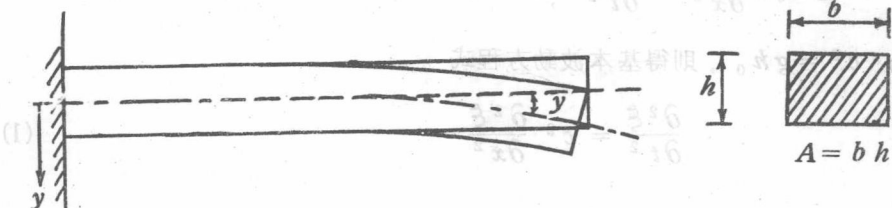


圖 10-1.6

偏微分方程式為
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (n)$$

6) 薄膜之振動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{於直角坐標系統,} \quad (o)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{於圓柱坐標系統,} \quad (p)$$

7) 方形薄板方程式

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (q)$$

ω = 位移, $q(x, y)$ = 板上之受力, D = 薄板性質係數,

8) 邊界層層流統治方程式

若流體為不可壓縮流, 在穩定狀況下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (r)$$

為其連續方程式與 x 方向運動方程式, 其他各種情形討論到時再考慮。

10-2 線性二階偏微分方程式之區分

設 L 表示線性二階偏微分方程式之表示符號，則一個最普通的 (x, y, z, t) 坐標系統之線性偏微分方程式可以用 $L[u] = 0$ 來表示， $u = u(x, y, z, t)$ 。以 $\underline{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，則

$$L = A(\underline{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B(\underline{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C(\underline{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D(\underline{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} + E(\underline{x}, t) \frac{\partial}{\partial x} + F(\underline{x}, t) \quad (1)$$

因此若在 (x, t) 坐標系統上，則 $u = u(x, t)$ ，而 L 為

$$L = A(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + E(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + F(x, t) \quad (2)$$

要區分 $L[u] = 0$ 是一個雙曲線型 (hyperbolic)，拋物線型 (parabolic)，或橢圓型 (elliptic)，則與 $L[u] = 0$ 之係數有重要關係。

先考慮簡單情形

$$L[u] = A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

其 A, B, C 為常數，將 (3) 自 (x, t) 坐標平面經過線性坐標軸轉變至 (ξ, η) 坐標平面，

$$\xi = \alpha x + \beta t, \quad \eta = r x + \delta t \quad (4)$$

而 (3) 成為

$$(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2A\beta\delta + B\alpha\delta + B\beta r + 2C\alpha r) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (A\delta^2 + B r \delta + C r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5)$$

若要使 (3) 經坐標軸轉變後成為 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 之簡單式，除了 $A = C = 0$ 之特例外，要