G A O D E N G S H U X U E

面向21世纪普通高等教育规划教材

(经管类)

高等数学 下册

主编 赵利彬　副主编 杨维 张丽琴　主审 史金麟

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

世纪普通高等教育规划教材

高等数学

（经管类）

下册

主　编　赵利彬

副主编　杨　维　张丽琴

主　审　史金麟

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材是在贯彻、落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"要求的基础上，按照"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"，为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，并结合多数本专科院校学生基础和教学特点进行编写的，是面向21世纪课程教材．全书分上、下两册出版．上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用和广义积分；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程．各节后均配有相应的习题，书末附参考答案．

本教材结构严谨、知识系统、讲解透彻、难度适宜、通俗易懂、适应面宽，适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的高等数学课程的教材使用．也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校选用，也可供相关专业人员和广大教师参考．

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(经管类)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入．对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨，对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益，亦可作为本教材配套的习题课参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类．下册/赵利彬主编．—上海：同济大学出版社，2007.8

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-3530-3

Ⅰ．高… Ⅱ．赵… Ⅲ．高等数学—高等学校—教材

Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第095067号

面向21世纪普通高等教育规划教材

高等数学(经管类)下册

主　编　赵利彬

副主编　杨　维　张丽琴

主　审　史金麟

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　12.5

印　数　1—5100

字　数　250000

版　次　2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3530-3/O·301

定　价　18.00元

新世纪高级应用型人才培养系列
面向21世纪普通高等教育规划教材

前言

“高等数学”是普通高等院校本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课程.在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用.为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求,适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变,满足一些高等院校扩招或升本出现的新的教学形势、学生基础和教学特点,根据我们多年的教学改革实践,在多次研讨和反复实践的基础上,编写了这部经管类高等数学课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻、落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神,严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,参考了近几年来国内出版的一些优秀教材,结合编者多年的教学实践经验.全书以通俗易懂的语言和丰富的例题,深入浅出地讲解高等数学的知识,并着重培养学生分析问题和解决问题的能力.本书的主要特色有以下几点:

(1) 在满足教学基本要求前提下,淡化理论推导过程.

(2) 较为简明,篇幅比传统教材要少,但高等数学的基本内容都讲到了,且有一定的理论深度.

(3) 较为通俗、易懂,便于教师授课,也便于学生阅读、理解.

(4) 注重理论联系实际,增加了数学在经济上应用的例子,培养学生解决实际问题的能力.

(5) 注重渗透现代化教学思想及手段,注重渗透数学建模思想.

本教材结构严谨、知识系统、讲解透彻、难度适宜、通俗易懂、适应面宽.适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的高等数学课程的教材使用.也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书,可供成教学院或申请升本的专科院校选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(经管类)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深入.对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益,亦可作为本教材配套的习题课参考书.

本教材由赵利彬主编,杨维、张丽琴副主编.第1章由郭晶编写,第2章、第3章由王宜洁编写,第4章、第5章由黄建吾编写,第6章由赵利彬编写,第7章由任丽编写,第8章由董哈微编写,第9章由马合保编写,第10章由林志宝编

写，杨维、张丽琴参与了本书编写大纲的讨论与制定工作，并对各章的编写提出了具体的意见和建议．全书由赵利彬统稿、定稿．

本书由史金麟教授主审．史金麟教授对本书进行了深入细致的审阅，提出了许多宝贵的修改意见和建议，使本书避免了一些错误和不妥之处．对史金麟教授的热心指导，我们在此表示诚挚的谢意！在本书的编写过程中还得到作者单位及参编者单位领导的大力支持和热情帮助．刘梅玲小姐为本书习题的参考答案做了仔细的核对，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平与学识有限，本书疏漏与错误之处在所难免，书中一定还有不少不尽人意之处，敬请专家和读者不吝批评和赐教．

赵利彬

2007年6月

目　次

第6章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题，平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要．同样，空间解析几何对学习多元函数微积分也是必不可少的．本章在建立空间直角坐标系的基础上，先讨论向量代数，然后用向量代数讨论空间的直线与平面，并介绍空间的曲面与曲线及空间解析几何的有关内容．

6.1　空间直角坐标系

6.1.1　空间直角坐标系

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴，他们都以 O 为原点，且有相同的长度单位，它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系．O 为原点，这三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）．习惯上，把 x 轴与 y 轴放在水平面上，z 轴放在铅垂线上，它们的正向符合右手法则，即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图6-1所示．这样的坐标系就是本章使用的右手直角坐标系．

三个坐标轴两两确定一个平面，称为坐标面．三个坐标面把整个空间划分为八个部分，每个部分称为卦限，共有八个卦限，按照象限的顺序（逆时针）；xOy 平面上方的四个卦限依次记为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，xOy 平面下方的四个卦限依次记为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限．

在空间建立了直角坐标系后，空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示．设 M 为空间任一点，过 M 点作三个分别与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，分别交 x,y,z 轴于 A,B,C 三点（图6-2），若 A,B,C 三点在坐标轴上的坐标是 x_0,y_0,z_0，则空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x_0,y_0,z_0．反之，任给一有序数组 x_0,y_0,z_0，我们可以在 x 轴，y 轴，z 轴上取坐标为 x_0,y_0,z_0 的点 A,B,C，并过 A,B,C 分别作与坐标轴垂直的平面，则它们相交于唯一的点 M．这样，就建立了空间的点 M 与有序数组 x_0,y_0,z_0 之间的一一对应关系，这组数 x_0,y_0,z_0 称为点 M 的坐标，记为 $M(x_0,y_0,z_0)$．x_0,y_0,z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标．

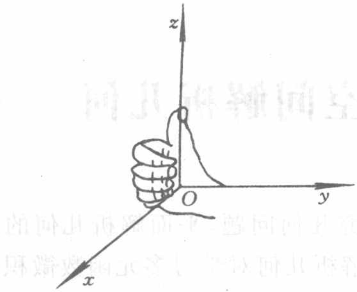

图 6-1

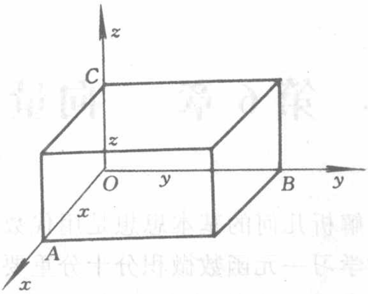

图 6-2

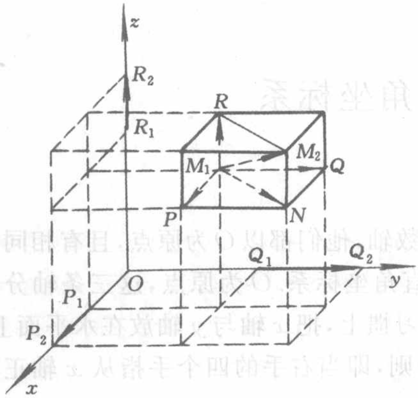

图 6-3

6.1.2　空间两点间的距离

设　$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，为了求它们之间的距离 d，我们过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 6-3）。

由勾股定理得

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

由于　$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$，

$|PN| = |\theta_1\theta_2| = |y_2 - y_1|$，

$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$，

所以　$d = |M_1M_2|$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，空间任一点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.1　证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解　因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98},$$

显然 $|AB|=|AC|$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

又因为 $|BC|^2=|AC|^2+|AB|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.2 求点 $M(1,2,4)$ 到各坐标轴的距离.

解 从点 M 向各坐标轴作垂线，垂足依次为 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,4)$. 因此，M 到三个坐标轴的距离依次为

$$d_x=|MA|=\sqrt{0^2+2^2+4^2}=\sqrt{20},$$

$$d_y=|MB|=\sqrt{1^2+0^2+4^2}=\sqrt{17},$$

$$d_z=|MC|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}.$$

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限.

$A(1,-2,-3)$， $B(2,3,-4)$， $C(-4,-5,6)$， $D(5,-6,7)$， $E(-1,-2,-3)$， $F(-2,1,-3)$.

2. 指出下列各点所在的位置.

$A(3,4,0)$， $B(0,2,3)$， $C(0,3,0)$， $D(0,0,-1)$.

3. 试写出点 (a,b,c) 关于 xOy 面，关于 y 轴及关于原点对称点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 上求一点，使该点与点 $A(3,0,4)$ 和 $B(3,4,0)$ 的距离相等，且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

6. 试证明以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6.2 向量及其线性运算

6.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学及其他一些实际问题时，我们经常遇到这样一类量，它既有大小又有方向，我们把这一类量叫做向量(或矢量)，如力、速度、位移、力矩等.

在数学上通常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，有时也用一个粗体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 或手写带箭头的字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等表示向量.

向量的大小称为向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫单

位向量，模为零的向量叫零向量. 零向量的方向是任意的. 与起点无关的向量称为自由向量，本章所研究的向量主要就是这种自由向量. 若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行，我们就说两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 两个向量只要大小相等且方向相同，我们便称这两个向量是相等的.

6.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-4 所示. 这种求向量和的方法称为**三角形法则**. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-5 所示，这种求向量和的方法称为**平行四边形法则**.

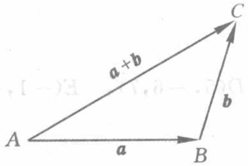

图 6-4

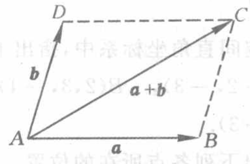

图 6-5

容易验证向量的加法满足以下运算定律：

(1) 交换律. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量的减法

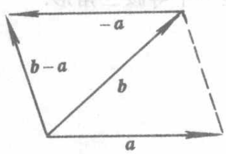

图 6-6

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加，便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 6-6 所示.

由三角形两边之和大于第三边的原理，可以得到常用的三角不等式.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘数是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

特别地，在 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即为零向量. $\lambda=1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

可以证明向量与数的乘法满足以下运算定律：

(1) 结合律. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(2) 分配律. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有

定理 6.2.1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

事实上，若 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$，取 $|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，则 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{a} = (\lambda-\mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，所以 $\lambda = \mu$.

单位向量在向量代数中是一类非常重要的向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^\circ$. 按照向量与数的乘积的规定，有 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$ 或 $\boldsymbol{a}^\circ = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 6.2.1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线交点，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6-7 所示，由于平行四边形对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$，$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{MA}$，于是 $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因为 $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} = 2\overrightarrow{BM}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = 2\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

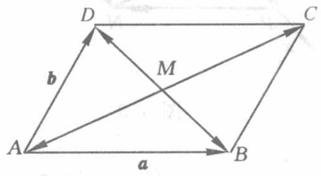

图 6-7

6.2.3 向量在轴上的投影和向量的坐标

在讨论向量的概念与运算时，是用几何方法引进的，这个方法比较直观，但计算不方便，下面来引进向量的坐标，把向量用数组表示出来. 使向量的运算可以化为数的运算.

1. 向量在轴上的投影

先引入两个向量夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，把它们的起点移到同一点，规定它们在 0 和 π 之间的夹角 θ 为这两个向量的夹角，记为 $\theta = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

下面我们来定义向量在轴上的投影. 设有一向量 $\overrightarrow{AB}$ 及一轴 u，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面，与 u 轴分别交于点 A'，B'，则 A'，B' 点分别称为 A，B 点在轴 u 上的投影(图 6-8).

在 u 轴上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B'$，$u$ 轴称为投影轴.

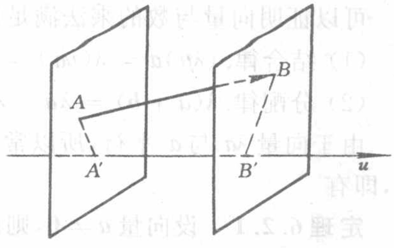

图 6-8

关于投影有以下几个性质.

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$ （φ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角）.

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

2. 向量的坐标

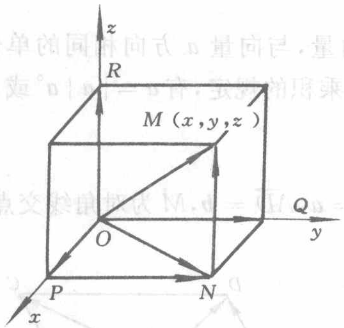

图 6-9

在空间直角坐标系中，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取与三个坐标轴正向一致的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称它们为基本单位向量.

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间的任一向量，把向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，使它的起点与原点重合，终点为 $M(x,y,z)$，即 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，它们分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于 P，Q，R 三点（图 6-9），即为点 M 在三个坐标轴上的投影. 于是有

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}.$$

由向量加法有 $\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$，

所以，
$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

此式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，向量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影 x，y，z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 记作 $\overrightarrow{OM} = \{x,y,z\}$.

利用向量的坐标，可得向量的加、减、数乘运算如下：

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，即 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$
$$= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\} \quad 或 \quad \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 6.2.2 已知两点 $A(0,1,-4)$，$B(2,3,0)$，试用坐标表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $-2\overrightarrow{AB}$.

解 $\overrightarrow{OA}=\{0,1,-4\}$，$\overrightarrow{OB}=\{2,3,0\}$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{2,2,4\}$，　　$-2\overrightarrow{AB}=\{-4,-4,-8\}$.

例 6.2.3 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=3(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})+4(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=14$，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

6.2.4　向量的模、方向余弦的坐标表达式

1. 向量的模

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，可以用它与三条坐标轴的夹角 α,β,γ（$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$）来表示它的方向（图 6-10）. 称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

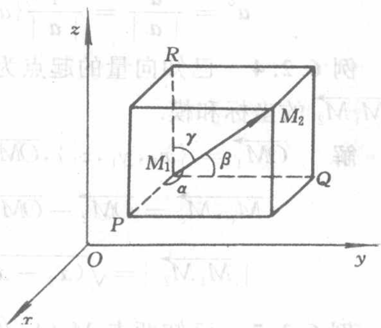

图 6-10

由图 6-10 可以看出向量 $\boldsymbol{a}$ 的模即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的长，即长方体对角线的长度.

所以

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(M_1P)^2+(M_1Q)^2+(M_1R)^2},$$

因为
$$M_1P=a_x,M_1Q=a_y,M_1R=a_z,$$

故
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

2. 方向余弦

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，所以有

$$a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,$$

$$a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

因此，

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

此式为用向量坐标表示方向余弦的公式.

由上式可得 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

即任一向量的方向余弦的平方和等于 1. 因此，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x, a_y, a_z\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例 6.2.4 已知向量的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标和模.

解 $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}, \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$，于是

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 6.2.5 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1), M_2(3, 0, 2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及方向角.

解 由于 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3 - 4, 0 - \sqrt{2}, 2 - 1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\}$，

故
$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2.$$

从而，
$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{3}{4}\pi;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

例 6.2.6 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = \{6, 7, -6\}$ 的单位向量.

解 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{121} = 11$，与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \pm\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$. $\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，$-\dfrac{1}{11}\{6, 7, -6\}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.