



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 1 8

数学物理方法专题

——复变函数与积分变换

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 18

数学物理方法专题 ——复变函数与积分变换

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法专题：复变函数与积分变换/吴崇试编著. —北京：北京大学出版社，
2013.7

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-22816-6

I. ①数… II. ①吴… III. ①数学物理方法②复变函数③积分变换
IV. ①O411.1②O174.5③O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 153006 号

书 名：数学物理方法专题——复变函数与积分变换

著作责任者：吴崇试 编著

责任编辑：尹照原

标准书号：ISBN 978-7-301-22816-6/O·0943

出版发行：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址：<http://www.pup.cn> 新浪官方微博：@北京大学出版社

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者：北京中科印刷有限公司

经 销 者：新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 33.5 印张 657 千字

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

定 价：86.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024 电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编 委 会

主 任：王恩哥

副主任：夏建白

编 委：（按姓氏笔画排序，标 * 号者为执行编委）

王力军	王孝群	王 牧	王鼎盛	石 兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱 星
向 涛	刘 川*	许宁生	许京军	张 酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭 卫*
资 剑	龚旗煌	崔 田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘 书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理研究 and 积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任
中国科学院院士，北京大学教授
王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书共十六章. 内容比较独立的是第一章与第十章. 前者涉及解析函数理论中的部分基本问题, 后者讨论了 Γ 函数及相关函数的幂级数展开, 以及与之有关的级数与积分. 其余各章大体可分为三部分.

第二章到第五章围绕无穷级数而展开. 内容包括: 一、由解析函数 Taylor 展开而演绎出的各种变型; 二、将常微分方程的幂级数解法用于求解已知函数的幂级数展开; 三、卷积型级数的 Möbius 反演问题.

第六章至第九章的中心是应用留数定理计算定积分, 包括从一些简单的积分出发而演绎出许多新的积分. 特别是, 笔者综合已有的引理, 提出了一个新的引理; 并在此基础上, 建立了计算含三角函数无穷积分的新方法.

第十一章至第十六章讨论的是积分变换, 介绍了有关 Fourier 变换和 Laplace 变换的一些理论问题. 书中还介绍了 Mellin 变换, 它与 Fourier 变换或 Laplace 变换密切相关, 是处理某类问题的有用工具, 在计算涉及柱函数的积分时尤为突出.

本书不是数学物理方法的教材, 而是笔者对于传统教材内容的解读与发挥. 书中还汇集了笔者自己的许多计算, 例如, 有超过 700 个积分及 300 多个和式(有限和或无穷级数)的计算结果.

前言

(一)

五十余年前,笔者就读于北京大学物理系,得到诸位前辈大师的教诲.毕业之后,更在王竹溪与郭敦仁二位先生的指导下,从事数学物理方法课程的教学,迄今已届五十载.笔者得到了二位先生生前的诸多教益.在教学实践中,面对学生的各种诘问,促进了对于相关问题的深入思考;在与校内外同行的交流切磋中,更获益良多.退休以后,笔者将这些收获与记录,汇集为《数学物理方法专题——复变函数与积分变换》及《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》二书,以此奉献给中国近代物理教育 100 年.

需要说明,这两本书都不是数学物理方法的教材,而是笔者备课与教学过程中笔记与练习的汇集.从某种意义上说,这两本书所涉及的内容,恰恰是在传统教材之外,包括笔者对于教材中正面表述之外的解读与发挥.笔者以一孔之见,希望能就教于国内从事数学物理方法课程教学的同行,希望能对于此门课程的教学有所裨益.需要特别申明,这两本书均不以数学物理方法的初学者为对象.当然,对于已经学习并掌握了数学物理方法课程基本内容的青年学子来说,这两本书或许也能成为他们进一步学习与思考的辅助读物.他们将会发现,从已有的知识出发,只要再往前迈一小步,展现在面前的将是一片绚丽多彩的新天地.

正因为不是教材,所以这两本书的内容不受教学大纲的约束,与数学物理方法传统教材基本上不相重复,既不追求与数学物理方法教材的完全对应与覆盖,也不刻意追求理论的系统性与完整性.书中有些内容可能是教材的补充与提高,但也有不少内容是现在教学中所不涉猎的.

正因为不是教材,所以这两本书可能存在内容前后倒置的情形.尽管在整理书稿时,尽量希望理顺各章节乃至具体内容的前后次序,但也不排除有前面的内容需要用到后面的知识.

或许值得提到,这两本书中汇集了笔者自己的许多计算.例如,这两本书中提供了超过 1200 个积分及超过 1200 个和式(有限和或无穷级数)的计算,这些结果,绝大多数都未出现在 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik 的千页巨著 *Table of Integrals, Series, and Products* (7th ed., Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2007) 中.

或许这就是这两本书的特点.

(二)

本书《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》，共十六章。内容比较独立的有两章，即第一章与第十章。第一章涉及解析函数理论中的部分基本问题，包括以问答形式讨论了数学物理方法课程教学中的若干常见而教材中又很少展开的问题。第十章则讨论了 Γ 函数的幂级数展开，以及与 Γ 函数 (包括 B 函数与 ψ 函数) 有关的级数与积分。在本书的其余章节中会引用到其中的部分结果。

除了这两章之外，其余各章大体上可分为三个板块：

第二章到第五章是一个板块，围绕无穷级数而展开。在给出了几个略带技巧的展开式后，第二章与第三章进一步介绍了根据解析函数 Taylor 展开而演绎出的各种变型，包括 Lagrange 展开公式、倍乘公式以及加法公式。这些理论公式，大部分已由前人导出。笔者的工作是将它们系统地应用于常见的特殊函数，得到了 200 多个公式，其中只有极少数几个能在现有的文献中找到。第四章并非直接讨论常微分方程的幂级数解法，而是讨论了它的一种特殊应用：将已知函数的幂级数展开问题转化为求常微分方程幂级数解的问题。进一步发展这一思想，也可以将已知函数的级数展开问题转化为偏微分方程的求解问题，这方面的例子可以在《数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数》一书中找到。第五章介绍了卷积型级数的 Möbius 反演。这一创见是由陈难先院士提出的，他称之为加性 Möbius 反演，应用于求解 Fermi 体系的逆问题。该章讨论了各类特殊函数的 Möbius 反演，特别是涉及柱函数的级数反演，也得到了 100 多个新结果，遗憾的是未能给出在物理问题中的应用。将卷积型级数 Möbius 反演的思想发展，由离散过渡到连续，可以建立卷积型积分变换的 Möbius 反演 (见 §5.4)，但未展开。

第六章至第九章是另一个板块，中心是应用留数定理计算定积分。第六章按照围道分类，介绍了几种基本的围道，计算了形式各异的几十个定积分。这里需要特别提到 §6.6，笔者综合已有的引理，提出了一个新的引理；在此基础上，建立了计算含三角函数无穷积分的新方法。采用这一方法，原来一些较难 (或较烦) 计算的积分，现在就可以方便地计算出。第七章是第六章的继续，但仅限于多值函数的积分，着重于介绍应用留数定理计算时，如何选择合适的复变积分，亦即被积函数与积分围道。第八章又是前两章的发展。通过变量代换将 Jordan 引理变换为处理本性奇点出现在有限远处 (例如坐标原点) 的情形，从而可以计算形式更为复杂的积分。将半圆形围道加以修正，又计算了三角函数在有界区间上的瑕积分。在应用留数定理计算定积分时，经常用到半圆形的围道。在多数情况下，当圆弧的半径趋于 ∞ 时，沿半圆弧的积分趋于确定的极限，0 或者非零极限值。该章 §8.3 还讨论了沿半圆弧的积积极限不存在的情形。只要 (实的) 定积分确实存在，那么这些发

散项总会互相抵消. 第九章则是从一些简单的积分出发, 或是稍作变化后而重新组合, 或是将积分构成的无穷级数求和, 从而演绎出许多新的积分. 在这几章中出现了 500 多个积分, 但多数也难以在前述 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书中找到.

第十一章至第十六章是又一个板块, 讨论的是积分变换, 包括 Fourier 变换、Laplace 变换和 Mellin 变换. 第十一章和第十二章先后简要介绍了 Fourier 级数和 Fourier 积分收敛性的基本结论, 并应用 Fourier 变换方法计算了一些积分, 包括初等函数的积分和特殊函数的积分. 在计算这些积分时, Fourier 变换方法特别有效, 而 Fourier 变换的 Parseval 公式和卷积公式更是两个重要的工具. 第十三章讨论了 Laplace 变换, 也只着重于理论概念的介绍, 如 Laplace 积分的收敛性、一致收敛性与解析性, 以及据此定义的收敛横标、绝对收敛横标与正则横标, 这都超出了数学物理方法课程的教学要求. 第十四章至第十六章集中介绍了 Mellin 变换, 它与 Fourier 变换或 Laplace 变换密切相关, 在数学物理方法课程中鲜有触及, 然而却又是处理某类问题的有用工具, 在计算涉及柱函数的积分时尤为突出. 读者在第十五章与第十六章中可以找到这方面的大量例子. 这两章中计算了 200 多个积分, 半数左右也未曾收录入 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书.

(三)

需要声明, 本书成书于现在, 但资料积累跨越数十年. 尽管书中的计算均为笔者所为, 但也不乏某些内容, 或是直接采自某书籍资料, 或是受其启发而就. 现在由于笔者记录不全, 原始资料也难以寻觅, 以致无法一一列出文献出处. 有些计算结果, 或许可能已经见诸文献, 但笔者孤陋寡闻, 还误以为是新结果, 因此文字表述亦有不实之嫌. 笔者深致歉意之余, 亦请知情者指出, 本书再版时, 自当补正.

最后, 在此书付梓之际, 笔者感谢“中外物理学精品书系”编委会诸位对于本书的支持. 在本书出版过程中, 北京大学出版社提供了方便, 陈小红和尹照原二位编辑为此付出了辛勤劳动, 笔者一并致谢.

吴崇试

2012 年于蓝旗营

本书常用符号

数 学 符 号

$\forall$	任何; 凡	$\mathbb{N}$	非负整数 (自然数)
$\exists$	有; 存在	$\mathbb{Z}$	整数
$\exists!$	存在唯一的	$\mathbb{R}$	实数
$\nexists$	不存在	$\mathbb{R}^+$	正数
$\wedge$	并且; 与	$\mathbb{R}^-$	负数
$\vee$	或	$\mathbb{C}$	复数; 复平面
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A	$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面
$a \notin A$	a 不属于 A		
$\cup$	并集	$\mathcal{R}_n$	n 维实空间
$\cap$	交集	$\mathcal{C}_n$	n 维复空间
$\supset$	包含	$\mathcal{E}_n$	n 维 Euclid 空间
$\subset$	子集	$\mathcal{C}$	连续函数空间
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$	$\mathcal{C}^n$	$\mathcal{C}^n$ 类函数空间 (n 阶 连续可微函数的集合)
$\overline{\lim}$	上极限	$\mathcal{H}$	Hilbert 空间
$\underline{\lim}$	下极限	$\mathcal{D}$	分段连续且只有有限个 第一类间断点的函数类
$\Rightarrow$	一致收敛	$\mathcal{L}_1$	绝对可积函数类
$\ \cdot \ $	范数	$\mathcal{L}_2$	平方可积函数类
$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)$		
$\mathcal{F}\{f\}$	f 的 Fourier 变换	$\mathcal{F}^{-1}\{f\}$	f 的 Fourier 逆变换
$\mathcal{M}\{f\}$	f 的 Mellin 变换	$\mathcal{M}^{-1}\{f\}$	f 的 Mellin 逆变换
$\mathcal{L}\{f\}$	f 的 Laplace 变换	$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	f 的 Laplace 逆变换
$F(p) \doteq f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) \doteq F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$

特殊函数与常数符号一览表

符 号	名 称
$A_n(z; a)$	Abel 多项式
$\text{Ai}(z)$	Airy 函数
$B(p, q)$	Beta 函数
$B_\alpha(p, q)$	不完全 Beta 函数
$\text{bei}_\nu(z)$	Kelvin 函数
$\text{ber}_\nu(z)$	Kelvin 函数
$\text{Bi}(z)$	Airy 函数
$B_k^{(n)}$	广义 Bernoulli 数
$B_k^{(n)}(x)$	广义 Bernoulli 多项式
B_n	Bernoulli 数
$B_n(x)$	Bernoulli 多项式
$C(z)$	Fresnel 积分
$\text{ci}(z)$	余弦积分
$C_\alpha^\lambda(z)$	Gegenbauer 函数
$C_n^\lambda(z)$	Gegenbauer 多项式
$D_\nu(z)$	抛物线柱函数 (Weber 函数)
$\text{Ei}(z)$	指数积分
E_n	Euler 数
$E_n(x)$	Euler 多项式
$\mathbb{E}_\nu(z)$	Weber 函数
$\text{erf}(z)$	误差函数
$\text{erfc}(z)$	余误差函数
$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$	超几何函数
$F(\alpha; \gamma; z)$	合流超几何函数 (Kummer 函数)
${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; z)$	广义超几何级数
$G_n(\zeta; \alpha, \beta)$	Gould 多项式

(续表)

符 号	名 称
γ	Euler 常数
$\gamma(\nu, z), \Gamma(\nu, z)$	不完全 Gamma 函数
$\Gamma(z)$	Gamma 函数
$H_n(x)$	Hermite 多项式
$\mathbb{H}_\nu(z)$	Struve 函数
$h_\nu^{(1)}(z), h_\nu^{(2)}(z)$	球 Hankel 函数
$H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(1)}(z)$	第三类柱函数 (Hankel 函数)
$I_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$J_\nu(z)$	第一类柱函数 (Bessel 函数)
$\mathbb{J}_\nu(z)$	Anger 函数
$j_\nu(z)$	球 Bessel 函数
$K_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$\text{li}(z)$	对数积分
$L_n(x)$	Laguerre 多项式
$L_n^{(\alpha)}(x)$	广义 Laguerre 多项式
$L_n^{(n+\alpha)}(x)$	赝 Laguerre 多项式
$M_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$M_n(z)$	Mittag-Leffler 多项式
$n_\nu(z)$	球 Neumann 函数
$N_\nu(z)$	第二类柱函数 (Neumann 函数)
$O_n(t)$	Neumann 多项式
$P_l^m(x)$	m 阶 l 次第一类连带 Legendre 函数
$P_n(z)$	Legendre 多项式
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi 多项式
$P_n^\lambda(x; a, b)$	Pollaczek 多项式
$P_n^\lambda(x, \phi)$	Pollaczek 多项式
$P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$	圆环函数

(续表)

符 号	名 称
$P_\nu(z)$	第一类 Legendre 函数
$P_\nu^\mu(z)$	第一类连带 Legendre 函数
$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$P_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos \theta)$	圆锥函数
$\psi(z)$	Psi 函数
$Q_l^m(x)$	m 阶 l 次第二类连带 Legendre 函数
$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$	圆环函数
$Q_\nu(z)$	第二类 Legendre 函数
$Q_\nu^\mu(z)$	第二类连带 Legendre 函数
$Q_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos \theta)$	圆锥函数
$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$R_{m,\nu}(z)$	Lommel 多项式
$S(z)$	Fresnel 积分
$\text{Si}(z), \text{si}(z)$	正弦积分
$s_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_n(t)$	Schläfli 多项式
$T_n(x)$	第一类 Chebyshev 多项式
$U(\alpha; \gamma; z)$	合流型超几何函数 (Kummer 函数)
$U_n(x)$	第二类 Chebyshev 多项式
$W_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$Y_\nu(z)$	第二类 Bessel 函数 (Neumann 函数)
$Z_\nu(z)$	柱函数
$\zeta(s)$	Reimann ζ 函数
$\zeta(s, a)$	广义 ζ 函数

目 录

第一章 解析函数	(1)
§ 1.1 关于复变函数的若干问答	(1)
§ 1.2 函数可导的充分必要条件	(12)
§ 1.3 Cauchy 定理与 Cauchy 积分公式	(13)
第二章 无穷级数	(19)
§ 2.1 无穷级数的收敛性	(19)
§ 2.2 幂级数的收敛半径	(25)
§ 2.3 无穷级数的 Cesàro 和与 Abel 和	(27)
§ 2.4 解析函数的幂级数展开	(29)
§ 2.5 几个级数的和	(38)
§ 2.6 Lagrange 展开公式	(43)
§ 2.7 Taylor 展开的倍乘公式	(47)
第三章 Taylor 展开公式新认识	(51)
§ 3.1 Taylor 展开公式的一个特殊形式	(51)
§ 3.2 超几何函数	(53)
§ 3.3 特殊的超几何函数	(55)
§ 3.4 合流超几何函数	(60)
§ 3.5 Whittaker 函数	(66)
§ 3.6 Taylor 展开公式的变型	(69)
§ 3.7 柱函数	(77)
§ 3.8 特殊函数的加法公式	(79)
第四章 常微分方程的幂级数解法	(85)
§ 4.1 二阶线性常微分方程按奇点分类	(85)
§ 4.2 二阶线性常微分方程的不变式	(87)
§ 4.3 由解反求常微分方程	(93)
§ 4.4 解析函数的幂级数展开	(94)

第五章 卷积型级数的 Möbius 反演	(113)
§ 5.1 定义	(113)
§ 5.2 应用	(116)
§ 5.3 卷积型级数 Möbius 反演与柱函数	(124)
§ 5.4 卷积型积分变换的 Möbius 反演	(134)
第六章 应用留数定理计算定积分	(136)
§ 6.1 几个引理	(136)
§ 6.2 圆形围道	(140)
§ 6.3 半圆形围道和扇形围道	(144)
§ 6.4 矩形围道	(152)
§ 6.5 实轴上有奇点的情形	(163)
§ 6.6 计算含三角函数无穷积分的新方法	(173)
第七章 多值函数的积分	(180)
§ 7.1 含根式函数的积分	(180)
§ 7.2 含对数函数的积分	(189)
§ 7.3 含 $\ln \tan \theta$ 的积分	(200)
§ 7.4 含 $\ln \sin \theta$ 或 $\ln \cos \theta$ 的积分	(206)
§ 7.5 含 $\arctan x$ 的积分	(217)
第八章 应用留数定理计算定积分: 进一步的例子	(224)
§ 8.1 有限远处出现本性奇点的情形	(224)
§ 8.2 含多值函数的积分	(238)
§ 8.3 应用留数定理的非常规方式	(248)
第九章 既有积分的进一步演绎	(263)
§ 9.1 既有积分的简单演绎	(263)
§ 9.2 由既有积分构成无穷级数	(267)
§ 9.3 再讨论含 $\ln \tan \theta$ 的积分	(279)
§ 9.4 再讨论含 $\ln \sin \theta$ 的积分	(303)
第十章 Γ 函数	(307)
§ 10.1 Γ 函数的幂级数展开	(307)
§ 10.2 导致 Γ 函数或 B 函数的积分	(314)
§ 10.3 含 ψ 函数的级数	(323)

第十一章 Fourier 级数	(332)
§ 11.1 Fourier 级数	(332)
§ 11.2 Fourier 级数的收敛性	(333)
§ 11.3 Fourier 级数的 Cesàro 和与 Abel 和	(342)
第十二章 Fourier 积分与 Fourier 变换	(351)
§ 12.1 Fourier 积分	(351)
§ 12.2 Fourier 变换的 Parseval 公式	(358)
§ 12.3 Fourier 变换的卷积公式	(364)
§ 12.4 Γ 函数的 Fourier 变换	(370)
§ 12.5 复平面上的 Fourier 变换	(383)
§ 12.6 用 Fourier 变换方法解积分方程	(387)
第十三章 Laplace 变换	(391)
§ 13.1 Laplace 积分	(391)
§ 13.2 Laplace 积分的收敛半平面	(392)
§ 13.3 Laplace 积分的解析性	(395)
§ 13.4 Laplace 变换举例	(397)
§ 13.5 Laplace 变换的反演	(406)
§ 13.6 Laplace 变换像函数的必要条件	(413)
§ 13.7 Laplace 变换像函数的充分条件	(416)
§ 13.8 Laplace 变换卷积定理的应用	(419)
第十四章 Mellin 变换	(423)
§ 14.1 Mellin 变换的定义	(423)
§ 14.2 Mellin 变换举例	(428)
§ 14.3 特殊函数的 Mellin 变换	(433)
§ 14.4 Mellin 变换的卷积公式	(436)
第十五章 柱函数的 Mellin 变换	(445)
§ 15.1 柱函数的 Mellin 变换	(445)
§ 15.2 柱函数乘积的 Mellin 变换	(449)
§ 15.3 导致柱函数的初等函数 Mellin 变换	(458)
§ 15.4 导致柱函数的初等函数积分	(464)