与人教版最新教材
同步配套

新编 数学ABC

《数学ABC》编写组编

走向大学丛书

SHUXUE

高中二年级〈下〉

浙江大學出版社

●高中二年级(下)

数学 A B C

《数学 ABC》编写组　编

浙江大学出版社

内容简介

《数学 ABC·高中二年级(下)》是配合部编新教材新编的教学辅导用书,本书内容包括高二第二学期教材中的第九章《直线、平面和简单几何体》(A,B 两种版本)和第十章《排列、组合和概率》。

本书编写特点是:

1. 同步　与教材、与学生日常学习同步;
2. 实用　按节编写,每节配有知识要点、典型例题和同步练习;
3. 层次　每单元、每章、期中和期末都配有 A、B 卷,A 卷属于基本要求,B 卷属于较高要求。

本书适合高中学生作同步练习,也适合作为职高、技校同学的自学辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学 ABC. 高中二年级. 下 /《数学 ABC》编写组编. 5 版. —杭州:浙江大学出版社,2002.1
(走向大学丛书)
ISBN 7-308-02884-4

Ⅰ.数...　Ⅱ.数...　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 090116 号

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　张作梅
出版发行　浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027)
(网址:http://www.zjupress.com)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10.25
字　　数　310 千
版 印 次　2002 年 1 月第 5 版　2005 年 11 月第 13 次印刷
书　　号　ISBN 7-308-02884-4/G·442
定　　价　10.00 元

再版前言

在这姹紫嫣红的春天，我社迎来了“高中 ABC 丛书”出版的第八个年头。丛书出版以来，发行量逐年攀升，备受广大师生的关注和青睐。新学期伊始，我社邀请了杭州二中等著名中学的特级教师、高级教师，对“高中 ABC 丛书”进行了全面的改版和修订。

改版后的“高中 ABC 丛书”有如下特点：

1. 内容结构合理　丛书与现行人教版教材密切配套，按章分节编写，由知识要点、例题精析、同步练习及能力测试等板块组成。

2. 注重能力培养　丛书力求贯彻现代教育新理念，以思维训练为焦点，以方法创新为主线，以能力培养为核心。

3. 突出重点难点　题型归纳分类解析，思维激活举一反三，重点内容反复强调，难点之处逐个解决。

4. 题量丰富，试题新颖　丛书通过丰富的试题覆盖所学的知识与技能，在练习设计上注重梯度，并针对不同层次的学生安排 A、B、C 多组题目；试题设计新颖，切中高考重点、热点。

目　　录

第九章　直线、平面和简单几何体(A)

一、空间直线与平面

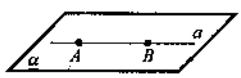
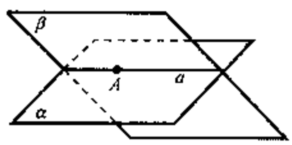
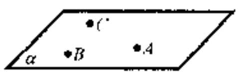
9.1　平面

【知识要点】

1. 平面的概念：平面是数学中只描述而不定义的数学概念之一，它是从我们日常生活中见到的具体平的面抽象而来的，它的基本特征是："平"而可以无限延伸.

2. 平面的基本性质

(1)三个公理：

内容	作用	图形	数学符号
公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.	判定直线是否在平面内.		$A\in a, B\in a$ $A\in \alpha, B\in \alpha \Rightarrow a\subset \alpha$
公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.	判定两个平面相交于一条直线及确定交线的位置		$A\in \alpha$, $A\in \beta$, $\Rightarrow \alpha\cap\beta=a$ 且 $A\in a$
公理 3：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.	确定平面的依据		

(2)三个推论：

推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

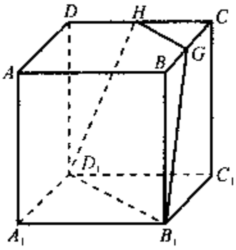
【典型例题】

例 1　如图：在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，G、H 分别是 BC、CD 的中点. 求证：D_1，B_1，G，H 四点共面.

证明：分别延长 B_1G 和 C_1C 的延长线相交于 P.

∵　G 是 BC 的中点. ∴　C 是 C_1P 的中点. 再延长 D_1H 和 C_1C 延长线相交于 P'，而 H 是 DC 的中点，所以 C 是 C_1P' 的中点. ∴　P 与 P' 重合.

∵ B_1G 和 D_1H 相交于 P. ∴ 直线 B_1G 和 D_1H 可以确定一个平面. 所以 D_1,B_1,G,H 共面.

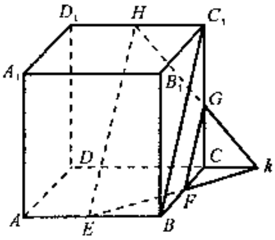


说明:证明空间元素共面的一般步骤是:

(1)利用公理3或三个推论,根据已知条件中的某些元素确定(或找到)一个平面;

(2)利用公理1证明其他元素在所找到的平面内.

例2 已知 E、F、G、H 分别是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1 的中点,证明 EF、HG、DC 三线共点.



证明:∵ E、F、G、H 是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 各棱的中点. ∴ $GF /\!/ BC_1$　$EH /\!/ BC_1$.

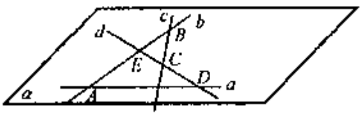
∴ E、F、G、H 四点共面. 设该平面为 α.

又∵ EF 与 HG 不平行. 设 $EF\cap HG=k$,则 $k\in$ 直线 EF. $k\in$ 直线 HG. ∴ $k\in$ 平面 D_1DCC_1　$k\in$ 平面 $ABCD$.

∴ $k\in$ 平面 $ABCD\cap$ 平面 $D_1DCC_1=CD$. ∴ 三条 EF、HG、DC 交于点 k.

说明:证明三条直线交于一点,一般先考虑两条直线交于一点,然后再证明第三条直线过此点.

例3 试证:两两相交且不过同一点的四条直线必在同一个平面内.



分析:两两相交且不过同一点的四条直线有两种不同情况:①两两相交且不过同一点,也无三条直线共点;②两两相交不过同一点,但有三条直线共点.

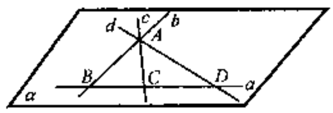
证明:1)如图,已知 $a\cap b=A$,$b\cap c=B$,$c\cap d=C$,$d\cap a=D$. $b\cap d=E$.

∵ $a\cap b=A$,∴ 由直线 a 和 b 可以确定一个平面记为 α,∴$a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,∴ $D\in a$,∴$D\in\alpha$,

又∵$E\in b$,∴$E\in\alpha$,又∵$D\in d$,$E\in d$,∴$d\subset\alpha$.

同理可证 $c\subset\alpha$,所以 a,b,c,d 共面.

2)如图,已知 $b\cap c=A$,$c\cap d=A$,$d\cap b=A$,$a\cap b=B$,$a\cap c=C$,$a\cap d=D$. 求证:a,b,c,d 共面.

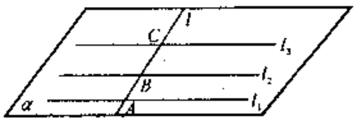


证明:∵$A\notin a$,∴由点 A 与直线 a 可以确定一个平面记为 α,∴ $A\in\alpha$. $a\subset\alpha$.

又∵$B,C,D\in a$,∴$B,C,D\in\alpha$.

而 $A\in b$,$B\in b$,∴$b\subset\alpha$. 同理 $c,d\subset\alpha$,∴a,b,c,d 都在 α 内,即 a,b,c,d 共面.

例4 如图,已知 $l_1/\!/l_2/\!/l_3$,$l\cap l_1=A$,$l\cap l_2=B$,$l\cap l_3=C$. 求证:l_1,l_2,l_3,l 共面.



证明:∵$l_1/\!/l_2$,∴l_1 和 l_2 可以确定平面 α,∵$l_2/\!/l_3$,∴l_2 和 l_3 可以确定平面 β.

又∵ $A\in l_1$,$l_1\subset\alpha$,∴$A\in\alpha$,同时 $B\in\alpha$. 又∵ $A\in l$,$B\in l$,∴$l\subset\alpha$.

同理可证 $l\subset\beta$. ∵$l\cap l_2=B$,且 $l,l_2\subset\alpha$,$l,l_2\subset\beta$,而两条相关直线 l 和 l_2 可以确定一个平面,所以 α 与 β 重合,所以 l,l_1,l_2,l_3 共面.

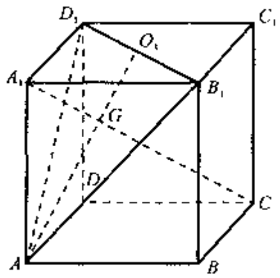
说明:用重合法证明空间元素共面一般分两步完成.

例5 已知 O_1 是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的上底面的中心,G 是对角线 A_1C 和截面 B_1D_1A 的交点. 求证 O_1、G、A 三点共线.

证明:在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 $A_1C_1\cap$ 直线 $B_1D_1=O_1$,$B_1D_1\subset$ 平面 B_1D_1A,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1ACC_1, ∴ $O_1\in$ 平面 B_1D_1A. $O_1\in$ 平面 A_1ACC_1

又∵ $A_1C\cap$ 平面 $B_1D_1A=G$, ∴$G\in$ 平面 A_1ACC_1

∴ G 是平面 B_1D_1A 和平面 A_1ACC_1 的公共点.



同理 A 是平面 B_1D_1A 和平面 A_1ACC_1 的公共点.

∴ O_1、G、A 在平面 B_1D_1A 和平面 AA_1CC_1 的交线上. 即 O_1、G、A 三点共线.

说明:在立体几何中,证明三点共线的基本方法是:

(1)证明这些点是某两个平面的公共点;

(2)把所证明的共线三点归结到某平面图形中,逐个分析这些点的特征,从而转化为平面几何中证明三点共线.

【同步训练】

1. 若点 M 在直线 b 上,b 在平面 β 内,则 M,b,β 之间的关系可以记作( ).

(A)$M\in b,b\in\beta$ (B)$M\subset b\subset\beta$ (C)$M\in b,b\subset\beta$ (D)$M\subset b\in\beta$

2. 下列推理错误的是( ).

(A)$A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

(B)$A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

(C)$l\not\subset\alpha,A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$.

(D)$A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 A,B,C 不共线$\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合

3. 空间四点中,三点共线是这四点共面的( ).

(A)充分条件 (B)必要条件

(C)充要条件 (D)既不充分也不必要条件

4. 下列命题中,真命题是( ).

(A)两条相交直线上的三点确定一个平面

(B)两两相交的三条直线共面

(C)不共面的四点中可以有三点共线

(D)三角形和梯形一定是平面图形

5. 一条直线和直线外两点可以确定的平面的个数是( ).

(A)1 个 (B)2 个 (C)3 个 (D)1 个或 2 个

6. 四条线段顺次首尾相接,可以确定平面的个数是( ).

(A)1 个 (B)3 个 (C)4 个 (D)1 个或 4 个

7. 将命题"平面 α 内的一直线 l 上的一点 P 必在 α 内"改写成符号表示应是( ).

(A)$l\in\alpha,P\in l\Rightarrow P\in\alpha$ (B)$l\subset\alpha,P\subset\alpha\Rightarrow P\subset\alpha$

(C)$l\subset\alpha,P\in\alpha\Rightarrow P\subset\alpha$ (D)$l\subset\alpha,P\in l\Rightarrow P\in\alpha$

8. 已知点 $P,Q\in$ 平面 α,点 $M\in$ 平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,$M\notin l$,直线 $PQ\cap l=R$,过 P、Q、M 的平面记为 γ,则 $\beta\cap\gamma$ =( ).

(A)直线 PM (B)直线 RM (C)直线 QM (D)直线 PQ

9. 平面 α,β 相交,α,β 内各取两点,这四点都不在交线上,这四点能确定平面____个.

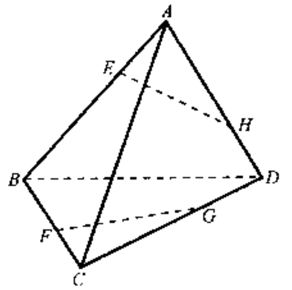
10. 一个平面把空间分成____部分;两个平面把空间分成____部分.

11. 与空间不共面的四点距离相等的平面数为____个.

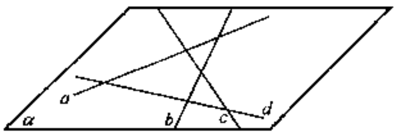
12. 根据下列条件画出直观图形:

平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=AB$,直线 $a\subset\alpha$,直线 $b\subset\beta$,$a/\!/AB$,$b/\!/AB$.

13. 如图，空间四边形 $ABCD$，点 E,F,G,H 分别在 AB,BC,CD,DA 上，且 E,F,G,H 共面，EH 与 FG 不平行，求证：EH 和 GF 的交点必在直线 BD 上.



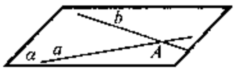
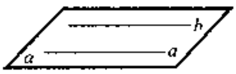
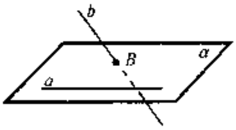
14. 如图，已知：a,b,c,d 是两两相交而不共点的四条直线. 求证：a,b,c,d 在同一个平面内.



9.2 空间直线(1)

【知识要点】

1. 空间两条直线的位置关系

位置关系		图形	符号
两条直线共面	相交直线：有且仅有一个公共点		$a\cap b=A$
	平行直线：在同一个平面内，没有公共点		$a/\!/b$
异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点			

2. 空间两条异面直线

(1) 定义；

(2) 直观图画法：平面衬托法；

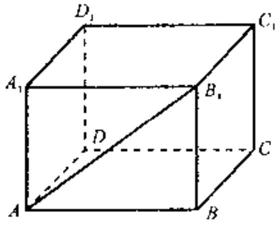
(3) 证明两条直线是异面直线的方法：

i. 定义法，即用两条异面直线的定义证明它们不同在任何一个平面内，一般用反证法；

ii. 利用定理：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不过该点的直线是异面直线.

【典型例题】

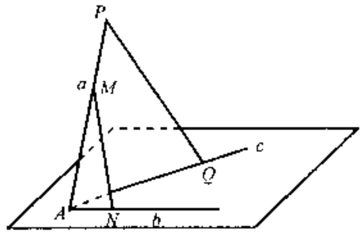
例 1 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，每个面有两条对角线，那么六个面的 12 条对角线中，成为异面直线的有______对.



解 如图：以 AB_1 为例，与 AB_1 异面的对角线共有 5 条，即 BC_1、D_1C、A_1D、A_1C_1、BD. 即与 AB_1 组成异面直线的有 5 对. 那么 12 条对角线组成 $12\times5=60$ 对，但其中有重复. 例如 AB_1 与 BC_1 一对与 BC_1 与 AB_1 一对相同，所以一共有 30 对异面直线.

例 2 如图，已知直线 a,b,c 不共面，且都经过同一点 A，点 M,P 是直线 a 上两点，点 N 是直线 b 上一

点，点 Q 是直线 c 上一点，求证：直线 MN 和 PQ 是异面直线.



证：假设 MN 和 PQ 不是异面直线，则它们必在同一平面内，设该平面为 α，即 $MN\subset\alpha$，$PQ\subset\alpha$，$\therefore P\in\alpha$，$M\in\alpha$，$\therefore a\subset\alpha$.

又 $\because A\in a$　$\therefore A\in\alpha$，而 $N\in b$，$N\in\alpha$，$\therefore b\subset\alpha$，

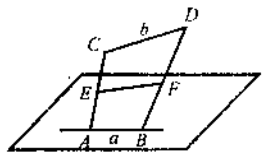
同理 $c\subset\alpha$.

$\therefore$ 直线 a,b,c 都在平面 α 内即它们共面，这与已知 a,b,c 不共面矛盾.

$\therefore$　MN 和 PQ 是异面直线.

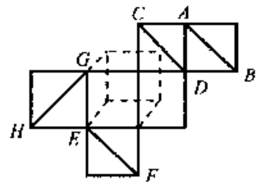
说明：证明两条直线是异面直线，往往用反证法.

例 3　已知 a、b 是异面直线，A、$B\in a$，C、$D\in b$，E、F 分别是线段 AC、BD 的中点，判断 EF 和 b，EF 和 a 的位置关系，并证明你的结论.



解　假设 EF 和 a 共面，假设该平面为 α. 则 $EF\subset\alpha$，$a\subset\alpha$　$\therefore A$、B、E、$F\in\alpha$，故 $FB\subset\alpha$，$EA\subset\alpha$　又 $\because$　$C\in EA$，$D\in FB$　$\therefore C$、$D\in\alpha$，于是直线 $b\subset\alpha$，从而 a、b 共面，这与 a 和 b 为异面直线矛盾. $\therefore$　EF 和 a 不共面. $\therefore$　EF 和 a 是异面直线. 同理可得 EF 和 b 也是异面直线.

例 4　下图表示一个正方体表面的一种展开图，图中有四条线段 AB、CD、EF 和 GH 在原正方体中相互为异面直线的有______对.



解　首先把展开图复原为正方体的直观图，然后从直观图中可得 AB 和 CD，AB 和 HG、EF 和 GH 成异面直线，所以共有 3 对.

【同步训练】

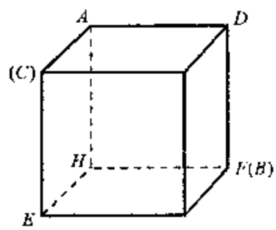
1. 两条异面直线指的是(　　)

   (A)不同在一个平面内的两条直线

   (B)分别在某两个平面内的两条直线

   (C)既不平行又不相交的两条直线

   (D)平面内的一条直线和平面外的一条直线



2. 若 a、b 是异面直线，b、c 是异面直线，则 a、c 的位置关系是(　　)

   (A)相交、平行或异面　　(B)相交或平行

   (C)异面　　(D)平行或异面

3. 直线 a 和 b 是两条异面直线，点 A、C 在 a 上，点 B、D 在 b 上，那么直线 AB 和 CD 一定是(　　).

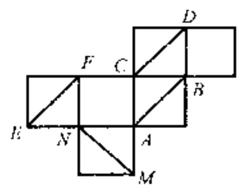
   (A)平行直线　　(B)异面直线

   (C)相交直线　　(D)相交或异面直线

4. 直线 a、b 与异面直线 m、n 相交于不同四点，则 a、b 的位置关系为(　　).

   (A)平行　　(B)相交

   (C)垂直　　(D)异面



5. 右图是一个正方体的展开图，在原正方体中有下列命题：

   ①AB 与 EF 所在直线平行；

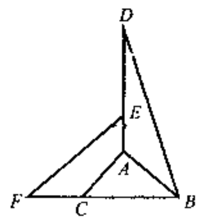
   ②AB 与 CD 所在直线异面；

   ③MN 与 BF 所在直线互相垂直.

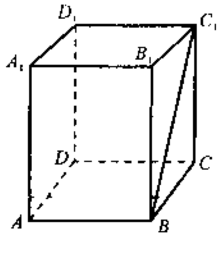
   其中正确命题的序号是________.

6. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与对角线 AC_1 异面的棱有______条.

7. 如图：点 D 在平面 ABC 外，确定在直线 AB、BC、AC、EF、AD、BD 中有多少对异面直线______.



8. 正三角形 ABC 所在平面外有一点 P，$PA=PB=PC=AB$，D、E 是棱 PC 上不重合的两点；F、H 分别是棱 PA、PB 上的点，且与 P 点不重合. 求证：EF 和 DH 是异面直线.



9. 如图，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，从它的 12 条棱和各面上的 12 条对角线共 24 和中选出 m 条. 使得其中任何两条线段所在的直线都是异面直线，求 m 的最大值.

9.2 空间直线(2)

【知识要点】

1. 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

2. 等角定理及推论.

定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.

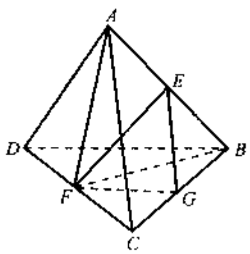
推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

【典型例题】

例 1 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点.

1. 求证：E，F，G，H 四点共面；2. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证：(1)连接 BD，在△ABD 中，E，H 分别是 AB，AD 的中点，所以 $EH/\!/BD$. 在△CBD 中，F，G 分别是 CB，CD 的中点，所以 $FG/\!/BD$.



∴$EH/\!/FG$. ∴过直线 EH 和 FG 可以确定一个平面，即 E，F，G，H 共面.

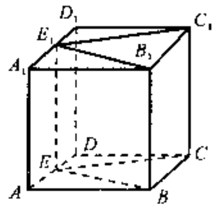
(2)连接 AC，在△ABC 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点. ∴$EF/\!/AC$，同理可证 $HG/\!/AC$.

∴$EF/\!/HG$，又∵$EH/\!/FG$.

∴四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

说明：在已知条件中，若再加上对角线 $BD=AC$，四边形 $EFGH$ 有何改变？又若再加条件对角线 $AC\perp BD$，四边形 $EFGH$ 有何改变？

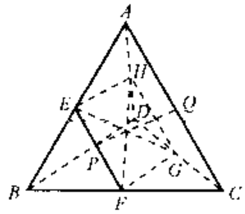
例 2 如图：已知 E，E_1 是正方体 AC_1 的棱 AD，A_1D_1 的中点，求证$\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.



证明 连结 EE_1，由 E_1，E 分别为 A_1D_1，AD 的中点，知 $A_1E_1 \underline{/\!/} AE$，故 A_1E_1EA 为平行四边形，即 $A_1A \underline{/\!/} E_1E$，又 $A_1A \underline{/\!/} B_1B$，得 $E_1E \underline{/\!/} B_1B$，故四边形 E_1EBB_1 是平行四边形. 于是 $E_1B_1 \underline{/\!/} EB$. 同理 $E_1C_1/\!/EC$，又$\angle C_1E_1B_1$ 与$\angle CEB$ 方向相同，故$\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.

例 3 如图：设 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边中点，P、Q 分别是两条对角线的中点. 求证：EG、FH、PQ 三线共点.

证明 由 E、H 分别为 AB、AD 的中点，知 $EH \underline{/\!/}\frac{1}{2}BD$.



同理 $FG \underset{=}{/\!/} \frac{1}{2}BD$. 故 $EH \underset{=}{/\!/} FG$(公理 4). 于是四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 从而 EG、FH 互相平分于点 O. 同理可证四边形 $PFQH$ 是平行四边形,因此 PQ、FH 互相平分,即 PQ 经过 FH 的中点 O.

$\therefore EG$、FH、PQ 三线共点.

例 4 已知三个平面两两相交,有三条交线,求证这三条交线交于一点或互相平行.

证明 设三个平面分别为 α、β、γ,且 $\gamma\cap\beta=a$,$\alpha\cap\beta=c$,$\alpha\cap\gamma=b$,由 $\alpha\cap\beta=c$,$\alpha\cap\gamma=b$,知 $c\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,从而 c 与 b 或交于一点或互相平行. (1)若 c 与 b 交于一点,设 $c\cap b=P$,由 $P\in c$,且 $c\subset\beta$,有 $P\in\beta$;又由 $P\in b$,且 $b\subset\gamma$,有 $P\in\gamma$,于是 $P\in\beta\cap\gamma=a$,故 a、b、c 交于一点 P. (2)若 $c/\!/b$,则 $a/\!/b$. 事实上,因 $a\subset\gamma$,$b\subset\gamma$,假设 $a\not/\!/ b$,则 a 与 b 必相交于一点,记为 Q,仿照(1)可证明直线 c 也过点 Q,故 b 与 c 均过点 Q,与 $c/\!/b$ 相矛盾. 因此假设不成立. 于是 $a/\!/b$,又 $c/\!/b$,故 $a/\!/b/\!/c$.

【同步训练】

1. 下列命题中,正确的是(　　).

(A)一条直线与两条平行直线中的一条直线相交,必与另一条直线也相交或异面

(B)一条直线和两条平行直线中的一条能确定一个平面,必与另一条直线也能确定一个平面

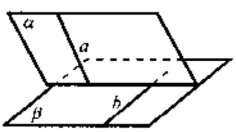
(C)一条直线与两条平行直线中的任何一条都没有公共点,那么这三条直线互相平行

(D)一条直线和两条平行直线中的一条直线是异面直线,则它与另一条直线也成异面直线

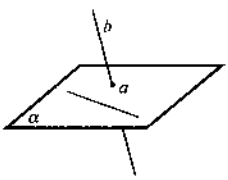
2. 若 $a/\!/b$,$b\cap c=A$,则 a,c 的位置关系是(　　).

(A)异面直线　　(B)相交直线　　(C)平行直线　　(D)相交或异面直线

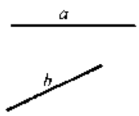
3. 下面各图中,不能确定 a,b 表示异面直线的图形是(　　).



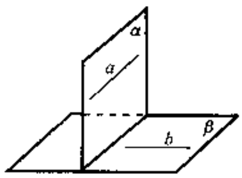
(A)



(B)



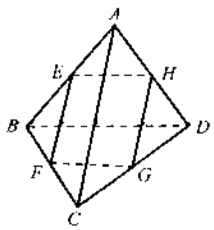
(C)



(D)

4. 若 $a/\!/b$,$c\perp a$,$d\perp b$,则 c 与 d 的位置关系是________.

5. 空间两个角的两边分别平行,则这两个角的大小关系是________.



6. 在空间四边形 $ABCD$ 中,已知 $AB=AD=BC=Cd$,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

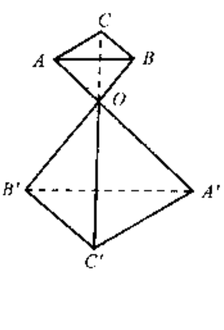
(1)若 $AC=BD$,求证四边形 $EFGH$ 是菱形;

(2)若 $AC=BD$,$AC\perp BD$,求证 $EFGH$ 是正方形.

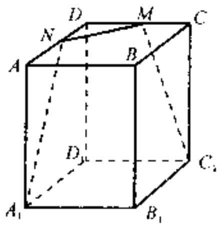
7. 如图已知:两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA',BB',CC' 交于同一点 O,且 $\frac{AO}{OA'}=\frac{BO}{OB'}=\frac{CO}{OC'}=\frac{2}{3}$.

(1)求证 $AB/\!/A'B'$,$AC/\!/A'C'$,$BC/\!/B'C'$.

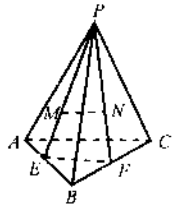
(2)求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ 的值.



8. $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，底面是边长为 a 的正方形，高为 $2a$，M、N 分别是 CD 和 AD 的中点.(1)求证 M、N、A_1、C_1 四点共面，且 MNA_1C_1 是等腰梯形；(2)求梯形 MNA_1C_1 的面积.



9. 已知 P 是△ABC 所在平面外一点，M、N 是△PAB 和△PBC 的重心，已知 $AB=5$，$BC=3$，$\angle ABC=120°$，求 MN 的长.



9.2　空间直线(3)

【知识要点】

1. 异面直线所成的角

(1)定义：直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O 分别作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，相交直线 a'，b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a、b 所成的角.

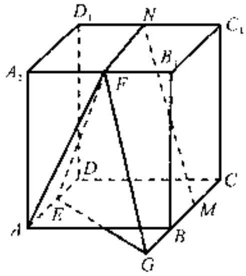
(2)垂直：两条异面直线所成的角是直角，称两条异面直线垂直.

(3)公垂线：和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线.

(4)两条异面直线之间的距离：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段(公垂线段)的长度，叫做两条异面直线的距离.

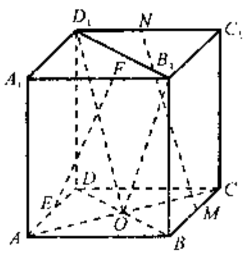
【典型例题】

说明：求异面直线的距离只要会求已经给出的两条异面直线的公垂线的题目即可，而求两条异面直线所成的角时必须注意锐角(或直角)的条件.



例 1：在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，M，N，F 分别是棱 AD，BC，D_1C_1，A_1B_1 的中点，求异面直线 EF 和 MN 所成的角的余弦值.

解法 1　如图，连接 NF，延长 MB 至 G，使得 $MG=NF$，再连接 EG. ∴相交直线 EF 和 FG 所成的锐角(或直角)就是异面直线 EF 和 MN 所成的角. 设正方体的棱长为 a. 在△EFG 中，$EF^2=AF^2+AE^2=A_1A^2+A_1F^2+AE^2=a^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{2}$，$EG^2=BD^2=2a^2$，$FG^2=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$. ∴$\cos\angle EFG=\frac{EF^2+FG^2-EG^2}{2\cdot EF\cdot FG}=\frac{\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}-2a^2}{2\times\frac{3a^2}{2}}=\frac{1}{3}$. ∴异面直线 EF 和 NM 所成的角的余弦值为 $\frac{1}{3}$.



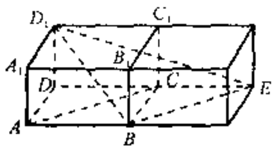
解法 2　如图，设 O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心，连接 OB_1，OD_1，于是 $OB_1 \parallel EF$，$OD_1 \parallel MN$.

∴相交直线 OB_1 与 OD_1 所成的锐角(或直角)就是异面直线 EF 与 MN 所成的角. 连接 B_1D_1，在△OB_1D_1 中，$OD_1=OB_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，$B_1D_1=\sqrt{2}a$. ∴$\cos\angle B_1OD_1=\frac{OB_1^2+OD_1^2-B_1D_1^2}{2\cdot OB_1\cdot OD_1}=\frac{1}{3}$.

说明：解法 1 利用"补体"平行移动一条直线. 而解法 2 同时移动两条异面直

线得到两条相交直线，从两种解法和数量关系可知，解法 2 比解法 1 简单.

例 2　在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2a$，$BC=a$，$CC_1=a$，求异面直线 D_1B 与 AC 所成的角.

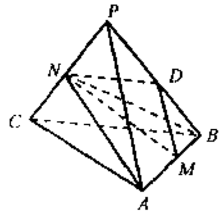


解　在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 旁，补上一个全等的长方体，则 $BE \underline{\underline{/\!/}} AC$，$\angle D_1BE$(或其补角)就是异面直线 AC 与 D_1B 所成的角，$D_1B=\sqrt{AB^2+BC^2+AA_1^2}=\sqrt{6}\,a$，故 $\cos\angle D_1BE=\dfrac{D_1B^2+BE^2-D_1E^2}{2D_1B\cdot BE}=\dfrac{6a^2+5a^2-17a^2}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}\,a^2}=-\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

由异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$，故 AC 和 BD_1 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

例 3　已知 P 是$\triangle ABC$ 所在平面外的一点，M、N 分别是 AB 和 PC 的中点，$PA=BC=m$，$PB=AC$.(1)求证 MN 是 AB 和 PC 的公垂线；

(2)当 PA，BC 成 $90°$角时，求 AB 和 PC 间的距离.



解　(1)连结 AN 和 BN，在$\triangle PAC$ 和$\triangle CBP$ 中，$PA=BC$，$AC=PB$，$PC=PC$，故$\triangle PAC\cong\triangle CBP$. 由 N 是公共边 PC 的中点，知 $AN=BN$. 由 M 是 AB 的中点，知 $NM\perp AB$. 同理 $MN\perp PC$. 因此 MN 是 AB 和 PC 的公垂线.

(2)取 PB 的中点 D，连结 DM，DN，于是 $DM/\!/PA$，且 $DM=\dfrac{1}{2}PA=\dfrac{1}{2}m$；同理 $DN/\!/BC$，且 $DN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}m$，于是$\angle MDN$ 是异面直线 PA、BC 所成的角，故$\angle MDN=90°$. 从而 $NB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$，即 AB 和 PC 间的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$.

【同步训练】

1. 空间里垂直于同一条直线的两条直线的位置关系应是

(1)平行　　(2)异面

(3)相交　　(4)不能确定的

2. 判断下列命题的真假：

(1)两条直线和第三条直线成等角，则这两条直线平行(　　)

(2)平行移动两条异面直线中的任何一条，它们所成的角不变(　　)

(3)过空间四边形 $ABCD$ 的顶点 A 引 CD 的平行线段 AE，则$\angle BAE$ 是异面直线 AB 与 CD 所成的角(　　)

(4)四边相等，且四个角也相等的四边形是正方形(　　)

3. 正方体的两条对角线相交所成角的正弦值等于(　　)

(A)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(B)$\dfrac{1}{3}$

(C)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　(D)$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

4. a，b，c 是两两垂直的异面直线，直线 d 是 b，c 的公垂线，则 d 和 a 是(　　)

(A)相交直线　　(B)平行直线

(C)同一条直线　　(D)互相垂直的异面直线

5. 经过空间一点 A 作直线，与直线 l 成 $60°$角的直线共有(　　).

(A)2 条　　(B)3 条　　(C)4 条　　(D)无数条

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 A_1A 的中点，则 D_1E 与 B_1F 所成的角的余弦值是(　　).

(A)$\dfrac{1}{2}$　　(B)$\dfrac{3}{5}$　　(C)$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(D)$\dfrac{2}{5}$

7. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2AA_1$，E，F 分别是 A_1B_1，BB_1 的中点，则 EF 与 DD_1 所成的角的正切为(　　).

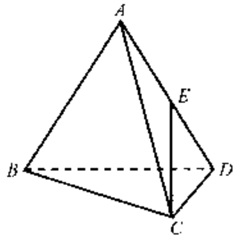
(A)$\frac{1}{2}$　　(B)2　　(C)$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(D)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 P 为 AB 的中点，Q 为 BC 的中点，R 为 A_1D_1 的中点，S 为 CC_1 的中点，则下面四对直线中不成异面直线的是(　　).

(A)AR 与 A_1P　(B)A_1P 与 C_1Q　(C)C_1Q 与 DS　(D)DS 与 AR

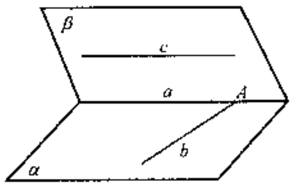
9. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，与 A_1B 异面的棱有____条；与 A_1C 异面的棱有____条；与 A_1B 异面的面对角线有____条.

10. 空间四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别为对角线 BD、AC 的中点，若 $AB=CD=2$，$MN=\sqrt{3}$，则 AB 与 CD 所成的角是______.

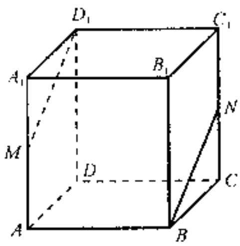


11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BC 的中点，F 为 CC_1 的中点. 连接 BF，B_1E，则 AB 与 B_1E 的公垂线是______，AB 和 B_1E 的距离等于______.

12. 如图：已知平面 $\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\alpha$，$c\subset\beta$，$b\cap a=A$，$c\,/\!/\,a$，求证：直线 b 与直线 c 是异面直线.



13. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 A_1A，C_1C 的中点. 求证 $D_1M\,/\!/\,BN$.

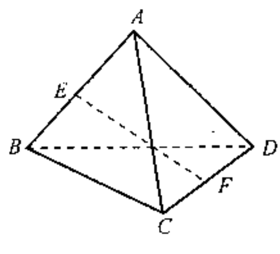


14. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=BD=a$，E、F 分别是 AB、CD 的中点.

(1)求证：EF 是 AB 和 CD 的公垂线；

(2)求：AB 和 CD 间的距离；

(3)求：AC 与 EF 所成的角.



《直线与直线的位置关系》单元测试(A 卷)

一、选择题

1. 直线 a 经过平面 α 外一点 M，记作(　　).

(A)$M\subset a, M\subset\alpha$　　(B)$M\not\subset a, M\subset\alpha$

(C)$M\in a, M\notin\alpha$　　(D)$M\notin a, M\in\alpha$

2. 过空间任意一点引三条直线，它们中的两条直线所确定的平面个数共有(　　).

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)1 或 3 个

3. 异面直线是指(　　).

(A)不相交的两条直线

(B)分别位于两个平面内的直线

(C)一个平面内的一条直线和不在这个面内的一条直线

(D)不同在任何一个平面内的两条直线

4. 分别与两条异面直线同时相交的两条直线(　　).

(A)一定是异面直线　　(B)不可能平行

(C)不可能相交　　(D)可能平行

5. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、BB_1 的中点，那么 A_1E 和 C_1F 所成的角是(　　).

(A)60°　　(B)$\arccos\frac{2}{5}$

(C)$\arccos\frac{\sqrt{21}}{5}$　　(D)45°

6. 空间两条直线平行是指它们(　　).

(A)没有交点　　(B)共面且没有公共点

(C)和同一条直线垂直　　(D)和同一直线所成的角相等

7. 正方体的一条对角线与正方体的棱可组成 n 对异面直线，则 n 等于(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)6　　(D)12

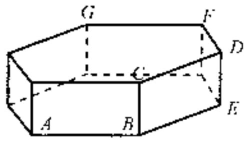
8. 下列图形中，不一定是平面图形的是(　　)

(A)三角形　　(B)梯形　　(C)四边形　　(D)菱形

二、填空题

9. 不重合的三个平面把空间最多分成________个部分；最少分成________个部分.

10. 如图：一个螺丝帽，它的高为 1cm.



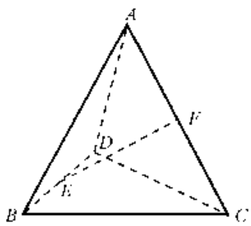
(1)AB 和 DE 所成的角为______；

(2)AB 和 CD 所成的角为______；

(3)AB 和 GF 所成的角为______；

(4)AB 和 CD 间的距离等于______.

11. 如图：空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是对角线 BD，AC 的中点，$BC=AD=2EF$，则 EF 与 AD 所成的角等于______.



三、解答题

12. 如图：正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，若 E，F 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，求异面直线 AD_1 与 EF 所成的角.