算學叢書

第四種

初等方程式論

日本 林鶴一 小野藤太 合著

陳文譯

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日
敝公司突遭國難總務處印刷
所編譯所書棧房均被炸燬附
設之涵芬樓東方圖書館尚公
小學亦遭殃及盡付焚如三十
五載之經營隳於一旦迭蒙
各界慰問督望速圖恢復詞意
懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
困不敢不勉爲其難因將需用
較切各書先行覆印其他各書
亦將次第出版惟是圖版裝製
不能盡如原式事勢所限想荷
鑒原謹布下忱統祈 垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國十三年六月初版
中華民國二十一年十月國難後第一版
中華民國二十二年九月國難後第二版
(三二一九)

算學叢書 初等方程式論一冊

每冊定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

原著者 林鶴一 小野藤太
譯述者 陳文
發行兼印刷者 上海河南路 商務印書館
發行所 上海及各埠 商務印書館

五六三八上

原　序

本書之目的,在將代數方程式之理論,平易說明.　故其次序,令理論之易解者居先,難解者居後,先解關於能實證之數 2, 3, … 諸例題,後及關於一般數 n 之事項,又凡與幾何學相涉之處,概用圖解.　且舉一般理論之後,多揭其數字之例,各節末載有應用本節之理論能解之諸問題,處處附記其解法或注意.　故已學過普通之代數學,幾何學,三角法及解析幾何學之初步者,由本書研究方程式論,當見其易,不覺其難,而以是爲階梯更進習高等數學尤爲便利.又以此書爲高等學校程度之教科書,余亦信爲適合.

目 次

		頁
第 一 章	整函數及方程式	1
	問題 1.	10
第 二 章	方程式之根與係數	13
	問題 2.	23
第 三 章	方程式之變形法	27
	問題 3.	35
第 四 章	有理根	38
	問題 4.	44
第 五 章	三次方程式	46
	問題 5.	51
第 六 章	四次方程式	54
	問題 6.	59
第 七 章	相反方程式	62
	問題 7.	66
第 八 章	二項方程式	69
	問題 8.	75
第 九 章	兩方程式之共通根	78
	問題 9.	82
第 十 章	導來函數	84
	問題 10.	100
第十一章	方程式之等根	104
	問題 11.	112
第十二章	導來方程式	114
	問題 12.	130

第十三章 符號之變移與實根之個數 134
問題 13. 143
第十四章 實根之上下限 146
問題 14. 151
第十五章 Sturm 之定理 154
問題 15. 164
第十六章 Fourier-Budan 之定理 169
問題 16. 173
第十七章 將實根之略近值表以比例部分之方法. .174
問題 17. 180
第十八章 用誘導函數求實根之略近值之方法. . .182
問題 18. 186
第十九章 用連分數表實根之方法 188
問題 19. 194
第二十章 依除法求實根之略近值之方法. 196
問題 20. 200
第二十一章 根之對稱式 202
問題 21. 209
第二十二章 行列式 212
問題 22. 235
第二十三章 行列式之應用 241
問題 23. 261
附錄 1. 虛數論 266
附錄 2. 雜題 280
答 293

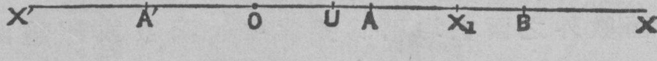
初等方程式論

第一章 整函數及方程式

1. 定義. 代數學中常用x, y, z等表不確定之數值,用具不確定數值諸文字所表之數曰**變數**,故表變數常用x, y, z等.反是用具確定數值諸文字所表之數曰**定數**. 在許多數學的問題內,變數僅有一個;然被若干個定數限制;此等定數常以$a, b, c, \cdots$ 或 $p_0, p_1, p_2, \cdots$ 等表之.

凡欲考查數性以依幾何學的表示爲便. 因是引軸線XX' 定原點 O 與長之單位 $OU=1$, 表 OA 之長之數爲 a 時即比 $\dfrac{OA}{OU}=a$ 時,則正數 a 得用 OX 上之點 A 表出,又負數 $-a$ 得用關於 O 點之 A 之對稱點A'表出. 如是其變數 x 當與此軸線上之任意點對應,定數當與定點對應. (第一圖)

第一圖



設變數 x 在區間 (a, b) 中爲$a \leqq x \leqq b$,故點 A, B, X_1 爲表數 a, b, x 之點則X_1在線分 AB 上.

因與變數 x 之各值對應而他之變數 y 之值有定曰 y 爲 x 之**函數**,表此關係常用 $y=f(x)$ 或 $y=F(x)$ 等. 與 x 以特別之值 a 即 $x=a$ 而求 $y=f(x)$ 之值將其所得之形用 $f(a)$ 表之,是謂**函數之代入值**. 特於 $f(a)=0$ 時曰 a 爲函數 $f(x)$ 之**根**或**零**.

作縱橫軸於平面,以變數 x 爲橫線,與之對應之函數 y 爲縱線,求點 (x,y),因而得作方程式 $y=f(x)$ 之幾何學的表出之曲線,此曲線亦得稱爲表示函數 $f(x)$ 者. **此曲線截 x 軸之點與函數之實根對應.**

2. 整函數. 令指數 n 爲正整數,係數 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 爲定數,就變數 x 作次之函數,

(1) $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$. 謂之 x 之 **n 次整函數.**

二個整函數之商曰**分數函數**,如 $\frac{1}{x}$, $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ 是. 總稱整函數及分數函數曰**有理函數.**

函數式中有根號者謂之**無理函數**,如 $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt[3]{x^2+1}$, $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$ 是.

有理函數及無理函數均在**代數的函數**(或曰**代數函數**)之中. 故在變數 x 之上,以加減乘除羃根之運算記號施行有限囘數所成之式,均爲代數函數.

代數函數外之函數均稱爲**非代數的函數**或**超越函數**.若將其中常用者舉出,則 e^x, a^x 爲**指數函數**, $\log x$ 爲**對數函數**, $\sin x$, $\cos x$ 等爲**圓函數**或**三角函數**, $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ 等爲**反圓函數**,而 $\sinh x$ 即 $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x$ 即 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等有**雙曲線函數**之名稱,其他則進習高等數學時諸種超越函數當隨時現出,玆不詳說.

以上俱爲一變數之函數,然變數得有二個以上. 例如令二變數爲 x 及 y,若各與以任意之值檢查因是限定之變數

z, 則 z 爲二變數 x, y 之函數得用 $z=f(x, y)$ 表之. 又作縱橫高三軸於空間,置點(x, y)於縱橫軸所在之平面上,令與是對應之函數 z 爲高線,求點 (x, y, z), 因而得作方程式 $z=f(x, y)$ 之幾何學的表示曲面.

3. 方程式. 取前條之整函數(1)設之等於 0, 得 $f(x)=0$, 卽得次式,

$$(2)\qquad p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0.$$

是謂 **n 次整方程式.** $p_0=1$ 時曰最簡形, p_n 曰**末項或絕對項**, 由初項至末項迄 $n+1$ 個項完備時曰**完全形**,又如無 x^{n-1} 項時曰**缺項形**,有缺項時得令其係數爲 0 成完全形.

凡方程式皆隨在其左邊之函數而異其名稱,故無理方程式,超越方程式等之意義各自分明.

本書所研究之函數專爲整函數,所用之方程式唯與整方程式相關,故單言函數或方程式則爲 (1) 或 (2) 兩形之式,是宜注意. 又因以實用爲主令其係數 $p_0, p_1, p_2, \cdots$ 俱爲實數.

有得爲實數或虛數之一數 a 在 $f(a)=0$ 時曰 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之根,然略爲 a 爲 $f(x)$ 之根者頗多.

在函數中稱 x 爲**變數**,在方程式中稱 x 爲**末知數或元**,蓋從習慣.

方程式之研究本歸宿於函數之研究,故欲求方程式之根在求函數之根,依與變數 x 之變化對應而知其函數之變化如何,則其爲零時卽爲方程式之根. 故方程式論無異整函數論,然後者以考察其變化爲主,前者以得其根之性質及其求法爲主,茲爲便利計將兩者各別講解.

4. 函數之比較. 命 x 爲 1 以上之任意數則 $x^n>x^{n-1}>\cdots>x$ 易明.今 $p_0, p_1, p_2, \cdots$ 爲正數時得定 1 以上之 a, 若 $x>a$ 可證次之不等式恒成立.

$$(3)\qquad p_0x^n>p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n.$$

因是,命 p_1 乃至 p_n 之最大數爲 p 則(3)之右邊小於

$$p(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\quad 即\quad \frac{p(x^n-1)}{x-1}$$

故 $$p_0x^n>\frac{p(x^n-1)}{x-1}\quad 即\quad x^n>\frac{p}{p_0(x-1)}(x^n-1)$$

則(3)式成立,而 $p_0(x-1)\geqq p$ 時 x^n-1 之係數爲 1 或 1 以下故大小易明,即 $x\geqq\frac{p}{p_0}+1$ 時則定 $a=\frac{p}{p_0}+1$ 甚合.

次設 x 爲 1 以下之任意正數則 $x^n<x^{n-1}<\cdots<x$ 易明.今可定 1 以下之正數 β, 而設 $x<\beta$ 可證次之不等式恆得成立,但命各係數爲正.

$$(4)\qquad p_{n-1}x>p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-2}x^2.$$

因是,命 p_0 乃至 p_{n-2} 之最大數爲 q 則(4)之右邊小於

$$\frac{qx^2(x^{n-1}-1)}{x-1}\quad 即\quad \frac{qx^2(1-x^{n-1})}{1-x}$$

故 $$p_{n-1}x>\frac{qx^2(1-x^{n-1})}{1-x}\quad 即\quad 1>\frac{qx}{p_{n-1}(1-x)}(1-x^{n-1})$$

則(4)式成立,而此爲 $x<1$, $\frac{qx}{p_{n-1}(1-x)}\leqq 1$ 時 $1-x^{n-1}$ 之係數爲 1 或 1 以下故大小易明,即 $qx\leqq p_{n-1}(1-x)$ 從而 $x\leqq\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+q}$ 時則定 $\beta=\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+q}$ 甚合. 不等式(4)之左邊爲 x^k 之形而右邊帶 k 以上之指數,亦有同樣之結果,是宜注意.

5. 定理. 在函數 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n$ (p_0 恆爲正, p_1 以下爲正或負)內,令變數 x 之絕對值爲適當大,(1 2 7 1)則此函數之符號與初項 p_0x^n 之符號同,而此函數之絕對值與 x 之值俱無限增大.

先設 x 爲正,且將 a 之絕對值用 $|a|$ 表之,則由前條有 $p_0x^n>|p_1x^{n-1}|+|p_2x^{n-2}|+\cdots+|p_n|$ 之 x, 且第二項以下有負項存時,有 $p_0x^n>p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots$ 之 x, 自不待言.故 x 爲適當大(1 2 7 1)時, $f(x)$ 有 p_0x^n 之符號而爲正. 次設 x 爲負,亦取其絕對值,同樣,由前條得使 $|p_0x^n|>|p_1x^{n-1}|+|p_2x^{n-2}|+\cdots$ 成立,故可作 n 爲偶數則 $f(x)$ 成正, n 爲奇數則 $f(x)$ 成負之 $-x$.

又 $$\frac{f(x)}{p_0x^n}=1+\frac{p_1}{p_0x}+\frac{p_2}{p_0x^2}+\cdots+\frac{p_n}{p_0x^n}$$

而 $|x|$ 甚大時此右邊接近於1, 故 $|x|$ 甚大時 $|p_0x^n|$ 成甚大從而 $|f(x)|$ 亦爲甚大,易言之,則 $f(x)$ 之絕對值當與 $|x|$ 俱無限增大,而此對於某一定值以上之 $|x|$ 恆爲可能.

故就曲線 $y=f(x)$ 言,則在 X 軸正側方者,曲線恆延於此軸之上方無限界,又在負側方者, n 爲偶數時曲線延於上方,爲奇數時,則反對而延於下方.

又同樣得證明次之定理.

定理. 在函數 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_kx^{n-k}$ 內,令變數 x 之絕對值爲適當小,則此函數之

符號與最末項 $p_k x^{n-k}$ 之符號同,而此函數之絕對值與 x 之值俱無限減少,易言之,卽令 $|x|$ 接近於0則 $|f(x)|$ 亦然.

6. 函數之連續性 通例,在函數 $y=F(x)$ 內,稱與變數 x 之特別值 x_0 及 x_0+h (h 爲正或負)對應之函數值之差 $F(x_0+h)-F(x_0)$,曰與變數 x 之**增分** h 對應之函數 $F(x)$ 之**增分**. 今令此函數之增分與變數之增分俱接近於0,用極限式表之如次,

$$\lim_{h=0} |F(x_0+h)-F(x_0)|=0.$$

且 $F(x)$ 對於 $x=x_0$ 曰**連續**.

設變數之區間 (a, b),對於在此區間之各 x 而 $F(x)$ 成連續時,曰 $F(x)$ 在區間 (a, b) **連續**.

例如函數 ax^n 在任意區間連續,如何言之,因對於 x 之任意值而成

$$a(x+h)^n-ax^n=nahx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}ah^2x^{n-2}+\cdots+ah^n$$

卽 $b_1h+b_2h^2+\cdots+b_nh^n$ 之形,故此由前條與 $|h|$ 俱接近於0,是以然也.

又整函數 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ 亦在任意區間連續,如何證之,因

$$f(x+h)-f(x)$$

$$=p_0[(x+h)^n-x^n]+p_1[(x+h)^{n-1}-x^{n-1}]+\cdots+p_{n-1}[(x+h)-x],$$

是亦形成 $b_1h+b_2h^2+\cdots+b_nh^n$,故與 $|h|$ 俱接近於0故也.

7. 不連續函數. 本書主論在整函數,故此恆與連續函數相關.然因欲使函數連續性之意義成對照的明瞭,乃更舉其不然者(即**不連續函數**)若干例,以便比較.

第一. 因成虛數值之不連續. 例. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ 但爲取其正根者.

此在區間 $(-1,1)$ 連續,但在其兩端及他區間不連續,何則, $F(1+h)-F(1)=\sqrt{-2h-h^2}$ 在 $h>0$ 時爲虛數,故無大小之意義,從而不能言與 h 俱大或俱小.

曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表半圓,此圓在點 $x=1, y=0$ 之處終止,其右方不延長,故與之對應之 y 在此點爲不連續.

第二. 因成無限大之不連續. 例. $F(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

此對於 $x=1$ 不連續而在他之任意區間連續,何則 $f(1)=\dfrac{1}{0}$ 不能知其值,僅得言 $f(1+h)=\dfrac{1}{-h}$ 故令 h 爲負之微小數則赴 $+\infty$,爲正則赴 $-\infty$. 通例,分數函數,若分母爲 0 對於 x 爲無限大的不連續.

曲線 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 爲直線 $x=1$ 與 X 軸成兩漸近線之雙曲線.

第三. 因有飛躍值之不連續. 例. $F(x)=1\div\left(1+a^{\frac{1}{1-x}}\right)$ 但 $a>1$.

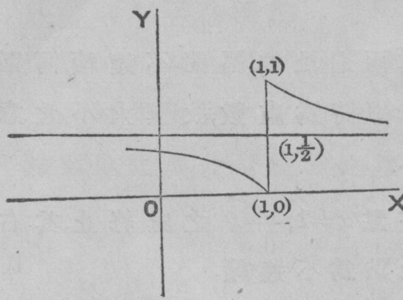
令 h 爲微小數則如次,

$$F(1-h)=\frac{1}{1+a^{\infty}}=0, \qquad F(1+h)=\frac{1}{1+a^{-\infty}}=1.$$

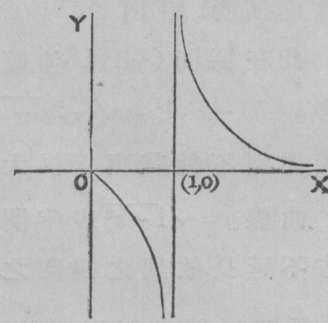
故變數 x 通過 1 時函數 $F(x)$ 由 0 急遽飛躍成 1, 即對於 $x=1$ 而不連續,在其他之任意區間連續.

曲線 $y=F(x)$ 在直線 $x=1$ 之上由點 $(x=1, y=0)$ 之處切至點 $(x=1, y=1)$ 之所,其前者之左方在直線 $y=\frac{1}{2}$ 之下而與之漸近,後者之右方在同直線之上而與之漸近.(第二圖)

第二圖



第三圖



更有一例考 $F(x)\frac{1}{log\ x}$, 對於 $x<0$ 爲虛數,對於 $0<x<1$ 爲 0 乃至 $-\infty$, 對於 $1<x$ 爲 $+\infty$ 乃至 0, 而對於 $x=0$ 及 1 爲不連續.曲線 $y=F(x)$ 以直線 $x=1$ 爲漸近線,其左方之一枝在 X 軸之下方於原點處停留,右方之一枝以同直線及 X 軸爲漸近線,在此軸之上方.(第三圖)

此外尙有諸種之不連續之事項,整函數 $y=f(x)$ 無如上之不連續性,從而以此表示之曲線不具如上之不連續點.

注意. 通例連續函數之和或積亦連續. 連續函數之商在其分母不成零之區間連續

8. 定理. $f(a)$, $f(b)$ 爲異符號時,方程式 $f(x)=0$, 其根具在區間 (a, b) 之一數 x_0, 此根至少有一個,就一般言則有奇數個.

何則,假定$f(a)<0$, $f(b)>0$而將本定理否定,是$f(x)$無在區間(a, b)爲零之x. 然設0之前後有二數$-h$, $+k$,又分(a, b)爲兩區間(a, x_0), (x_0, b),在前區間函數$f(x)$爲$f(a)$乃至$f(x_0)=-h$,　在後區間不得不成$f(x_0)=+k$乃至$f(b)$,故對於$x=x_0$,函數$f(x)$飛躍而失其連續性,是不合理;故有$a<x_0<b$之一數x_0存在而爲$f(x_0)=0$.

用曲線$y=f(x)$之表示則此定理成直覺的明瞭,蓋點$x=a$, $y=f(a)<0$在X軸之下方,點$x=b$, $y=f(b)>0$在X軸之上方,曲線由此軸之下方及於上方,故至少有一回截此軸之點,此點與方程式$f(x)=0$之一實根對應　就一般言則延於X軸之上下方之曲線恆截此軸奇數回,故當生奇數個實根.

注意. $f(a)$, $f(b)$爲同符號時,方程式$f(x)=0$或不具在區間(a, b)的一個根,或有偶數個根又本定理不以$f(x)$爲整函數爲限,在(a, b)間連續之函數一般得適用之,若爲不連續則必其間無根.

9. 定理. 奇數次方程式至少必有一箇實根.

何則,在奇數次方程式

$$f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

內,(p_0恆爲正,以下準此),令$p_n<0$則$f(0)<0$, $f(+\infty)>0$,故區間$(0, \infty)$至少有一根(卽正根),又令$p_n>0$則同樣至少有一負根.

注意. $f(\infty)$可視爲以變數或定數以上之甚大數值代入,以定其符號者.

10. 定理. 偶數次方程式之絕對項爲負時,至少有正負根各一個.

何則, $f(0)<0$ $f(\infty)>0, f(-\infty)>0$, 故兩區間 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ 至少各有一個根.

11. 定理. 方程式之最初若干項爲正而其後項悉爲負時,其正根唯有一個.

何則,設方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_rx^{n-r}-p_{r+1}x^{n-r-1}-\cdots-p_{n-1}x-p_n=0$$

則在

$$f(x)=x^{n-r}\left\{(p_0x^r+\cdots+p_r)-\left(\frac{p_{r+1}}{x}+\cdots+\frac{p_n}{x^{n-r}}\right)\right\}=x^{n-r}(A-B)$$

內, A 隨 x 俱增大, B 反 x 而減少,故 x 通過區間 $(0, \infty)$ 時 $A=B$ 唯起一回,其時之 x 之值唯爲一個正根.

注意　揭於次之事項乃欲學者得直覺的明瞭.

(1)　$f(x)$ 之係數悉爲正時不具一個正根.

(2)　$f(x)$ 之偶數冪項悉爲同符號而奇數冪項悉爲與之反對之同符號時,此不具一個負根.

(3)　$f(x)$ 僅偶數冪項爲同符號時,此不具一個實根.

問　題　1.

1.　畫次之曲線,

$$y=3x-5,\quad y=x^2,\quad y=x^3,\quad y=x^4,\quad y=x^{-1},$$

$$y=-x^2,\quad y=2^x,\quad y=x^{\frac{3}{2}},\quad y=log(1+x).$$

$y=\mathrm{I}(x)$, $y=x.\mathrm{I}(x)$, $y=\sqrt{x.\mathrm{I}(x)}$, 此處 $\mathrm{I}(x)$ 謂 x 之整數部,

例如 $\mathrm{I}\left(\frac{13}{5}\right)=2$, $\mathrm{I}(7)=7$, $\mathrm{I}\left(-\frac{13}{5}\right)=\mathrm{I}\left(-3+\frac{2}{5}\right)=-3$.

2. 述次之曲線之不連續性,

$$y=\frac{1}{(1-x)^2},\quad y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2},\quad y=x\sqrt{x-1}.$$

3. 令 A, B, C 爲同符號之數,又 $a<b<c$, 述次之方程式之實根之所在.

$$f(x)\equiv\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}-1=0.$$

解 令 A, B, C 爲正則以 h 爲微小數而視其代入值之符號如次,

$$\begin{array}{cccccc} f(a+h) & f(b-h) & f(b+h) & f(c-h) & f(c+h) & f(+\infty) \\ + & - & + & - & + & - \end{array}$$

故於三區間 (a, b), (b, c), (c, ∞) 各有一根,但 $f(b-h)<0$, $f(b+h)>0$ 不得言於 $(b-h, b+h)$ 間有根,以其對於 $x=b$ 而 $f(x)$ 爲不連續故也. (8 注意)

此解法得用於 $f(x)$ 有 n 個之分數項時.

4. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 爲大之順序,又令 $a>0$, 則方程式

$$f(x)\equiv(x-x_1)(x-x_3)(x-x_5)+a(x-x_2)(x-x_4)(x-x_6)=0$$

於三區間 (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6) 各有一根.

注意. $f(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_4)(x_1-x_6)>0$, $f(x_2)<0$, $f(x_3)<0$, $f(x_4)>0$, ...

5 論二次整函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之變化.

解 有 $a>0$, 又 1° $b^2-4ac>0$ 卽二個實根 x_1, x_2, 令 $x_1<x_2$ 則 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. 故 $x<x_1$ 時 $x-x_1$, $x-x_2$ 俱爲負而 $f(x)>0$,

又 $x>x_2$ 時俱爲正而 $f(x)>0$, 唯 $x_1<x<x_2$ 時一爲負一爲正而 $f(x)<0$. 2^0 有 $b^2-4ac=0$ 卽等根 x_1 時 $f(x)=a(x-x_1)^2$, 故 $f(x)$ 恆爲正. 3^0 有 $b^2-4ac<0$ 卽二虛根 x_1, x_2 時依如上之因數爲不明,在此場合記爲 $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, 此不拘 x 如何,得知 $f(x)$ 恆爲正. $a<0$ 之場合亦得同樣論之.

6. 於 $x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{b}{4}=0$ 令 $-1<b<1$ 則於區間 $\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 各有根存在,試述其理由. 又 $b=1$ 或 $b=-1$ 時如何.

7. 於 $x^3-3x+a(1-3x^2)=0$ 內令 $a\neq 0$, 此方程式於由 $-\infty$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $+\infty$ 所生各區間有根.

8. 在 $|x|>a$ 時 $x^4-5x^3+4x^2-2x+3$ 爲大於 1000 者,試求此正數 a