联合国教科文组织(UNESCO)资助出版

水环境中污染物扩散输移原理与水质模型

余常昭　M.马尔柯夫斯基　李玉梁　编著

中国环境科学出版社

水环境中污染物扩散输移原理与水质模型

水环境中污染物扩散输移原理与水质模型

余常昭　M.马尔柯夫斯基　李玉梁　编著

中国环境科学出版社

1989

内容简介

本书系统地介绍了水环境中污染物混合输移的原理、分析计算方法以及海洋废水排放系统的设计。

全书共分三篇。第一篇介绍了流体运动基本方程，保守物质在水环境中的混合输移原理，污染远区内的扩散和离散以及近区流场和浓度场分析计算的射流理论。第二篇主要介绍非保守物质在河流、水库和湖泊中的混合输移和转化规律。着重介绍了完全混合系统模型、混合单元系列模型和移流扩散模型以及这些模型在热污染、耗氧性有机污染和水体富营养化问题中的应用。第三篇介绍了污染物在河口中的混合输移规律及废水排海工程的试验和分析计算方法与设计过程。

本书内容丰富，具有基本概念与专题相结合；基础理论与特例相结合的特点。可作研究生、大学生的环境水力学及水质模型课程的教材或主要参考书，亦可供从事环境工程的科技人员使用。

水环境中污染物扩散输移原理与水质模型

余常昭　M.马尔柯夫斯基　李玉梁　编著

责任编辑　杨吉林

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

三河县印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

1989年3月第一版　　开本：787×1092　1/16

1989年3月第一次印刷　　印张：24 1/8

印数：1—5,000　　字数：587千字

ISBN　7—80010—201—2／X·185

定价：8.80　元

前　　言

随着我国工农业生产和建设的迅速发展，水环境污染治理问题日益突出，因此对于水环境中污染物质的混合输移原理和计算，已成为从事环境保护工作与学习研究的迫切需要。

1985年底在联合国教科文组织的资助下，清华大学水利系举办了“水环境中污染物混合输移的分析与计算”的继续教育班，由清华大学水利系教授余常昭、副教授李玉梁和德意志联邦共和国汉诺威大学马尔柯夫斯基(Mark Markofsky)教授分别讲授了“水环境中扩散与输移原理”、“水质模型”和“河口中的混合及海洋废水排放系统的设计”。这些内容综合了国内外的研究成果，也是作者长期从事教学工作和水环境研究工作的产物。该继续教育班取得了很好的效果。为推动我国的环境保护事业，在联合国教科文组织的继续资助下，将以上三部分内容合编为《水环境中污染物扩散输移原理与水质模型》出版。第一篇由余常昭执笔，第二篇由李玉梁执笔，第三篇在马尔柯夫斯基英文和德文讲授提纲的基础上由清华大学水利系吕贤弼副教授编译。在出版过程中，作者根据这几年环境工作的发展，对原稿进行了修改与补充。

按由浅入深、理论联系实际的原则，本书第一篇着重介绍无生物化学作用的保守物质在水环境中的混合输移规律。第二篇介绍有生物化学作用的非保守物质在河流、水库及湖泊中的混合输移和转化规律，及几种常用的水质模式，并将它们用于热污染、耗氧性有机污染和水体富营养化等问题。第三篇专门介绍有潮汐作用的河口地区污染物的混合输移问题和废水排海工程的设计，以适应我国沿海地区迅速发展的需要，为合理利用海洋的环境容量提供具体的分析计算方法。

联合国教科文组织驻华代表泰勒(H.L.Teller)博士对本书的出版给予大力支持，谨此表示衷心感谢。

作　者

1988年9月

目录

第一篇 水环境中扩散与输移原理

第二篇　水质模型

第三篇　河口中的混合及海洋废水排放系统的设计

第一篇 水环境中扩散与输移原理

引 言

水环境问题从广义上说包括很多，除水源的污染与保护外，还有许多其它方面的问题，如水土保持、河道冲淤、洪水的破坏作用和水利工程对环境的影响等等。这里只从狭义上讨论环境的污染方面。

为了预报水域中水体受污染的程度，据以制订控制和保护的措施，必须掌握污染物质在水域中的扩散与输移规律，建立在各种水环境条件下的分析方法，，求得污染物质的浓度分布。试以废水排入河流为例，如图0—1所示，废水由管道或明渠排放，进入河道后以射流方程逐渐扩散，同时受到河水流动的作用而被推向下游。这股废水在中小河渠可能很快扩展至全河断面，在大江大河则可能靠岸形成--条污染带。对污染的范围和污染物质的浓度分布进行预报，在排污口附近的近区，射流出口动量起主导作用，按射流的运动规律分析；离排污口较远出口动量基本上已不起作用的远区，则要按随流扩散的规律分析。

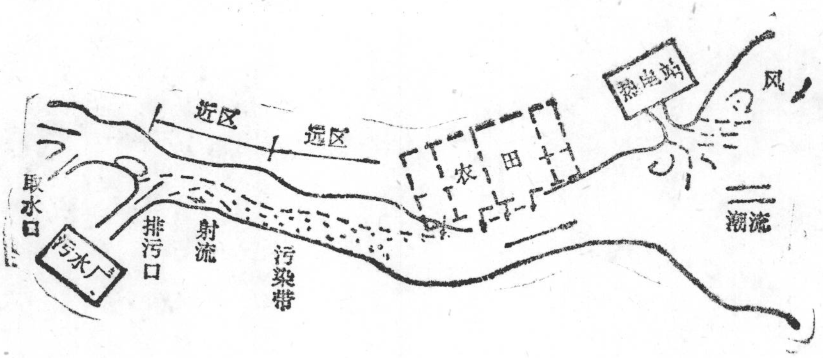

图 0—1

当然纳污的水体不限于河道，也可能是水库、湖泊和港湾。有些还可能渗入到地下水域中，如农田的农药污染和河道中沉积毒物和核污染等都可能向地下渗入。由于水域性质的不同，影响污染物质扩散输移的因素也各异，如在水库中水有温度分层的特点，港湾内则可能有密度的分层、潮汐和风力的作用等影响。

另一方面，由于污染物性质的不同，在水体中浓度分布的规律也会变化。例如热污染中温度的分布受许多因素的影响，化学污染中污染物质受生化作用在水体中有其生长质与衰减的过程。重金属污染中则还有固液两相和吸附等复杂作用。但不管怎样，由于水体运动所引起的对含有物质的扩散输移作用总是重要而需首先弄清楚的。过去一般研究

都是从简单的情况出发，先不考虑污染物质对流动的影响，即把它看作一种标志物质或示踪物质来分析，而将污染物质的特性部分另作专门处理。

本篇将着重介绍水体中含有物质的扩散输移的基本原理，先回顾一下流体运动的基本方程。因为这是分析水环境中水流运动的基础。然后分扩散理论、剪切流中的离散和紊动射流几部分这些与分析污染物的扩散输移有关的基本知识进行讨论。至于各种水域中水质的具体分析方法，包括污染物的生长与衰减的作用等将在第二篇中介绍。

参考文献

1. H. B. 弗希尔等著，清华大学水力学教研组译，内陆及近海水域中的混合，水利电力出版社，1987。

2. 余常昭，水环境的扩散与输移问题，《力学与生产建设》，北京大学出版社，1982年5月。

第一章　流体运动基本方程的回顾

第一节　控制流体运动的三个守恒方程

水作为流体的一个重要种类其运动必然受流体运动基本规律的支配，而这些基本规律也就是物理学上几个普遍性守恒定律：质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律在流体运动上的表现形式，写成数学表达式即为控制流体运动的三个基本方程：连续方程、运动方程和能量方程。

一、连 续 方 程

在流体是连续介质的前提下，根据质量守恒定律，按欧拉描述流动的方法可推导出可压缩流体的连续性微分方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{1—1a}$$

它的矢量形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \tag{1—1b}$$

式中ρ为流体密度，u、v、w分别为x、y、z三个方向的流速分量。将（1—1a）展开得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{1—1c}$$

对于不可压缩流体，即质点在运动过程中其密度不改变，密度的质点导数

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=0$$

（1—1c）式简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1—2a}$$

或　　$\mathrm{div}\,\vec{V}=0,\quad \nabla\cdot\vec{V}=0$　　（1—2b）

在柱坐标系中不可压缩流体的连续方程的形式为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{1—3}$$

式中v_r、v_φ及v_z分别为径向r、周向φ及轴向z的速度分量。

连续性微分方程不论是恒定流或非恒定流，实际流体或理想流体均可适用。

二、运动方程

流体的运动方程是牛顿第二运动定律在流体运动上的表现形式，因为它反映动量守恒的规律，也称为动量方程。

由牛顿定律力与加速度的关系可推导出以应力表示的欧拉流体运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= X + \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \\
\frac{Dv}{Dt} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \\
\frac{Dw}{Dt} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (1-4)$$

式中X、Y和Z分别为作用于每单位质量流体的质量力$\vec{F}$在x、y、z三个方向的分量。应力张量Σ为

$$\begin{pmatrix} -p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p_{zz} \end{pmatrix}$$

应力项的脚标中第一个表示作用面的法线方向，第二个表示应力的方向。

牛顿流体的本构关系即应力和流体变形的关系如下：

对切应力有

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (1-5)$$

对正应力有

$$
\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\
p_{yy} &= p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\
p_{zz} &= p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} - 3\mu\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (1-6)
$$

式中 $$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \qquad (1\text{-}7)$$

为同一点上三个正交方向压应力的平均值，可以证明它与这组正交作用平面的方向无关，不随坐标轴的转动而改变，则 p 成为一个标量函数。

将（1—5）、（1—6）式代入（1—4）式得到

$$
\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]
$$

$$
+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]
$$

$$
\frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]
$$

$$
+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]
$$

$$
\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]
$$

$$
+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \qquad (1-8)
$$

这就是粘滞性流体的运动微分方程，即奈维-司托克斯方程（常简写为N-S 方程），是流体力学的重要理论基础公式。

对于不可压缩流体，$\nabla\cdot\vec{V} = 0$，并将D/Dt项展开后（1—8）式简化为

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 w
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1\text{-}9a)
$$

式中拉普拉斯算符$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$上式即为不可压缩粘滞性流体的运动方程，其矢量形式为

$$
\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\ \vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}\qquad(1\text{—}9b)
$$

对于理想流体$\mu=0$，运动方程进一步简化为

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
\right\}
\qquad(1\text{—}10)
$$

常称为欧拉运动方程。

在柱坐标系中不可压缩流体的奈维-司托克斯方程的形式为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v^2_\phi}{r^2}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\\
&=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\ \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\\
&=F_\phi-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{\mu}{\rho}\ \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r}-\frac{v_\phi}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2})$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial z}\\&=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2})\end{aligned}\right\}\quad(1\text{—}11)$$

三、能量方程

对于用欧拉法描述的流场，适用于空间坐标固定的控制体的能量守恒原理是：单位时间内传给控制体内流体的热量和外界对控制体内流体所作的功与通过控制面流入的总能量之和，等于控制体内流体的总能量对时间的变化率。流体的总能包括内能和动能，以e表示单位质量流体的内能，单位质量流体的动能为$\frac{V^2}{2}$，则能量守恒原理可表示为

$$\underset{(1)}{\oiint_A q_\lambda dA}+\underset{(2)}{\iiint_\tau \rho q_R d\tau}+\underset{(3)}{\iiint(\rho\vec{F}\cdot\vec{V})\,d\tau}+\underset{(4)}{\oiint_A \vec{P}_n\cdot\vec{V}dA}-$$

$$\underset{(5)}{\oiint_A\left[\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\rho\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)\right]dA}=\underset{(6)}{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]d\tau}\quad(1\text{-}12)$$

式中q_λ为单位时间内通过控制面积传入的热传导量，q_R为单位时间内由于辐射及其它原因传给控制体内单位质量流体的热量，第（3）项表示单位时间内通过控制面流入的总能量，第（6）项为单位时间内控制体中总能量的增量。

由傅立叶定律 $q_\lambda=\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=\vec{n}\cdot\lambda\nabla T$

λ为热传导系数，T为温度，利用推广的高斯公式将（1—12）式中的面积分化为体积分，有

$$\oiint_A q_\lambda dA=\iint_A(n\cdot\lambda\nabla T)\,dA=\iiint_\tau\nabla\cdot(\lambda\nabla T)\,d\tau$$

及 $$\oiint_A(\vec{P}_n\cdot\vec{n})\,dA=\oiint_A(\vec{n}\cdot\Sigma)\cdot\vec{V}dA=\iiint_\tau[\nabla\cdot(\Sigma\cdot\vec{V})]d\tau$$

$$\oiint_A[(e+\frac{V^2}{2})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})]dA=\iiint_\tau\left\{\nabla\cdot[\rho(e+\frac{V^2}{2})\vec{V}]\right\}d\tau$$

则方程（1—12）成为

$$\iiint_\tau \left[\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) - \rho\vec{F}\cdot\vec{V} - \nabla\cdot(\Sigma\cdot\vec{V}) - \nabla\cdot(\lambda\nabla T) - \rho q_R \right] d\tau = 0$$

由此导出相应的微分形式的能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{V}\cdot\nabla)\left(e+\frac{V^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot\vec{V} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\Sigma\cdot\vec{V})$$

$$+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\lambda\nabla T) + q_R \tag{1—13a}$$

在直角坐标系中为

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[e+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right]$$

$$= \rho(uX+vY+wZ) + \frac{\partial}{\partial x}(-p_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u - p_{yy}v + \tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u + \tau_{zy}v - p_{zz}w) +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho q_R \tag{1—13b}$$

将方程右边应力与速度乘积的导数项展开，经整理并项并用（1—4）式的关系，方程（1—13b）可简化为

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - p_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} - p_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) +$$

$$\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho q_R \tag{1—14}$$

对于大多数流体有

$$e = C_V T \tag{1—15}$$

引入导温系数 $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$

Cv为定容比热，Cp为定压比热。对于液体两种比热接近相等，设为常数，并将(1-14)式的各应力与作功项综合表示为$\mu\Phi$，Φ称为耗散函数，则方程（1—14）可写为

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha\nabla^2 T + \frac{\mu}{\rho C}\Phi \frac{q_R}{C} \tag{1—16}$$

在柱坐标系，略去粘性耗散项和辐射项时，能量方程表示为