高等学校教学参考书

微积分学教程

第二卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微积分学教程

第二卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社

本书第二卷根据菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著《微积分学教程》（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第二卷1951年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微积分学教程

第二卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0108　开本850×1168　1/32　印张8 4/16

字数255,000　印数77,101—135,100　定价（6）￥0.80

1956年12月新1版　　1979年12月北京第10次印刷

第一分册目录

第八章 原函数(不定积分)

第九章 定积分

第十章 积分学在几何学、力学与物理学中的应用

第八章　原函数(不定积分)

§1　不定积分与它的計算的最簡单方法

251. 原函数(即不定积分)的概念　在科学与技术的許多問題中，我們所需要的不是由給定的函数求它的微商，相反地，是要由一个函数的已知微商还原出这个函数。在第 **91** 目中，假定已知运动的方程 $s==s(t)$，即是，路程随时間而变化的变化規律，我們用微分法先得出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然后找出加速度 $a=\frac{dv}{dt}$。但实际上，时常需要解决反面的問題：給定加速度 a 是时間 t 的函数，$a=a(t)$，要求确定速度 v 与所經路程 s 依賴于 t 的关系。这样，就需要由函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$，它的微商就是 a，然后，知道了函数 v，再求一个函数 $s=s(t)$，而它的微商就是 v。

我們給出下面的定义：

如果在給定的整个区間上，$f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的微商，或 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx^{*},$$

那么，在所給定的区間上，函数 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数或 $f(x)$ 的积分。

求一个函数的所有的原函数，叫做求积分，这是**积分学**的問題之一；可以看出，这是微分学基本問題的反面問題。

---

* 在这情形下也可說函数 $F'(x)$ 是微分表达式 $f(x)dx$ 的原函数(或积分)。

定理 **如果在某一个区間$\mathscr{X}$(有穷的或无穷的,閉的或非閉的)上,函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,那么,函数$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数,其中C是任意常数。反过来說,在区間$\mathscr{X}$上$f(x)$的每一个原函数可表示成这种形式。**

证明只要限于$\mathscr{X}$是有穷閉区間$[a, b]$的情形就够了。

$F(x)$与$F(x)+C$同是$f(x)$的原函数,这个情形是十分明显的,因为$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。

現在設$\Phi(x)$是函数$f(x)$的任何一个原函数,于是在区間$[a, b]$上

$$\Phi'(x)=f(x).$$

因为函数$F(x)$与$\Phi(x)$在所考虑的区間上有相同的微商,所以它們只相差一个常数[126, 系理]:

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

这就是所要证明的。

由这定理推知,为要知道給定函数$f(x)$的所有的原函数,只要求出它的一个原函数$F(x)$就够了,因为它們彼此之間只差一个常数項。

由此,**表达式$F(x)+C$是微商为$f(x)$或微分为$f(x)dx$的函数的一般形状,其中C是任意常数。**这表达式称为$f(x)$的不定积分,用記号

$$\int f(x)dx$$

来表示,这个記号中已暗含有任意常数。乘积$f(x)dx$称为被积表达式,函数$f(x)$称为被积函数。

例題 設$f(x)=x^2$;不难看出,这个函数的不定积分是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

这很容易用反面的演算——微分法——来驗证。

我們提醒讀者注意,在"积分"記号$\int$下写的是所要求原函数的微分,而不是微商(在我們的例題里是x^2dx,而不是x^2)。以后在[282]中将要闡明,这样的記法是有历史根据的;而且它还表現着許多优点,因

而保留它是十分合理的。

从不定积分的定义直接推出下列的一些性质:

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$,

即是，記号 d 与 $\int$，当前者位于后者的前面时，可互相消去。

2. 因为 $F(x)$ 是函数 $F'(x)$ 的一个原函数，我們有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

这式子可以改写为

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

由此可見，在 $F(x)$ 前面的記号 d 与 $\int$，当 d 在 $\int$ 后面的时候，也可把它們消去，但必須在 $F(x)$ 后加上一个任意常数。

回到我們一开始就提出来的那个力学問題上，現在我們可以写

$$v=\int a(t)dt$$

与

$$s=\int v(t)dt.$$

为了明确起見，假定我們要討論的运动是等加速运动，例如，在重力作用下的运动；这时 $a=g$（沿鉛垂綫向下的方向为正方向），并且，不难了解

$$v=\int g\,dt=gt+C.$$

我們得到了速度 v 的表达式，在这表达式中，除时間 t 外，还包含有一个任意常数 C。在同一时刻，对于不同的 C 的值，我們将得到速度的不同的值；因此，对于問題的完全解决，我們已有的数据是不够的。为要得出問題的完全确定的解决，需要知道在某一时刻速度的数值才够。例如，設已知在 $t=t_0$ 时速度 $v=v_0$；我們把这些值代入所求得的速度的表达式中

$$v_0=gt_0+C,$$

由此

$$C=v_0-gt_0,$$

現在我們的解就有了完全确定的形状

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

其次，我們求得路程 s 的表达式

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(用微分法容易驗证，原函数可以取这样的形式)。例如，假定在 $t=t_0$ 时路程 $s=s_0$ 給定，我們就可以确定新的未知常数 C'；求得 $C'=s_0$ 之后，我們便可以写出解的最后的形状

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

习惯上称值 t_0, s_0, v_0 为量 t, s 与 v 的开始值。

我們知道，函数 $y=F(x)$ 的微商給出对应图形的切綫的斜率。因此，可以这样来解釋求給定函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的問題：要找出一条曲綫 $y=F(x)$，使它的切綫斜率适合給定的变化規律

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x).$$

如果 $y=F(x)$ 是这些曲綫之一，那么，只須把它順着 y 軸作簡单的平移，便可以得到所有其余的曲綫（移动的距离 C 是任意的，图 1)。为要从这族曲綫得出一条个别的曲綫，只需給出(举例来說)这曲綫应当通过的一点 (x_0, y_0) 就够；开始条件 $y_0=F(x_0)+C$ 就給出 $C=y_0-F(x_0)$。

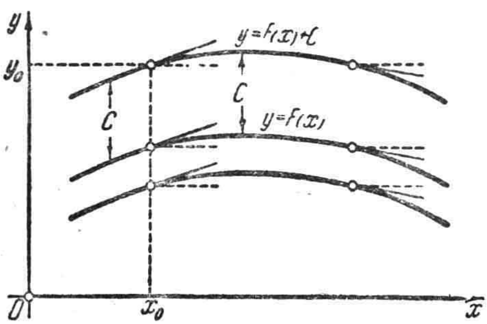

图 1

252. 积分与面积定义問題 把原函数解釋作曲綫图形的面积是更为重要的。因为在历史上原函数概念与面积的确定有极其紧密的联系，所以我們就在这儿来讲述这个問題(这儿只利用平面图形的面积的直觉的表示，而把这个問題的精确提法留到第十章去讲)。

設給定在区間 $[a,\ b]$ 上只取正(或非負)值的連續函数 $y=f(x)$。考慮限制在曲綫 $y=f(x)$ 下，x 軸上及两纵綫 $x=a$ 与 $x=b$ 之間的图形 $ABCD$ (图 2)；我們把这类图形叫做曲綫梯形。想要确定这图形的面积 P 的值，我們研究变动图形 $AMND$ 的面积的性质，这变动图形包含在开始纵綫 $x=a$ 以及跟区間 $[c,b]$ 上任意选出的 x 值相对应的纵綫之間。当 x 改变时，这个面积将随之而变，并且对应于每一 x 有它的一个完全确定的值，于是曲綫梯形 $AMND$ 的面积是 x 的某一函数；我們用 $P(x)$ 表示它。

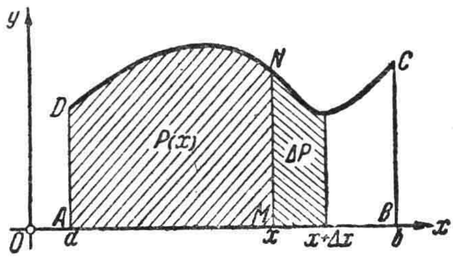

图 2

我們首先提出求函数 $P(x)$ 的微商的問題。为了这个目的，我們給 x 添上某一个(比方說，正的)改变量 Δx；此时面积 $P(x)$ 将获得改变量 ΔP。

以 m 及 M 分別表示在区間 $[x,\ x+\Delta x]$ 上函数 $f(x)$ 的最小值与最大值[84]，并将面积 ΔP 与底为 Δx，高为 m 及 M 的矩形的面积加以比較。显然

$$m\Delta x<\Delta P<M\Delta x,$$

由此

$$m<\frac{\Delta P}{\Delta x}<M.$$

如果 $\Delta x\to 0$，那么，由于連續性，m 与 M 趋于 $f(x)$，因而

$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x}=f(x).$$

这样，我們就得到一个有名的定理(通常叫做牛頓-莱不尼慈定理)*：**变动面积 $P(x)$ 对有穷的横坐标 x 的微商等于有穷的纵坐标**

* 其实，这个定理——虽然是在另一种形式里——已为**牛頓**的老师**巴若**(Is. Barow)发表过了。

$y=f(x)$。

换句話說，**变动面积 $P(x)$ 是給定函数 $y=f(x)$ 的原函数**。由于当 $x=a$ 时这个原函数变为 0 这一特点，使得它与原函数族中其他的原函数有所不同。因此，如果已知函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，則按前一目中的定理就有

$$P(x)=F(x)+C,$$

那么，令 $x=a$，就容易定出常数 C

$$0=F(a)+C, \text{ 于是 } C=-F(a).$$

最后
$$P(x)=F(x)-F(a).$$

特別地，要求得整个曲綫梯形 $ABCD$ 的面积 P，需要取 $x=b$:

$$P=F(b)-F(a).$$

作为例子，我們求界限在抛物綫 $y=ax^2$ 下，x 軸上及对应于給定横坐标 x 的纵坐标之間的图形的面积 $P(x)$（图 3）；因为抛物綫交 x 軸于坐标軸的原点，所以，在这儿 x 的开始值为 0。容易找出函数 $f(x)=ax^2$ 的原函数：$F(x)=\dfrac{ax^3}{3}$。当 $x=0$ 时这个函数恰好变为 0，所以

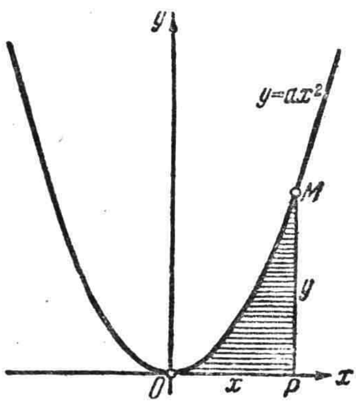

图 3

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[比較 **32, 4**)]。

由于在計算积分与求平面图形的面积之間有联系，通常习惯于把积分計算本身叫作求积。

为了把以上所讲的全部事实推广到也取負值的函数的情形，只要約定把图形中位于 x 軸下面那一部分的面积的值算为負值就行了。

这样，在区間 $[a,b]$ 上不管怎样的連續函数 $f(x)$，讀者总可以把它的原函数想象成給定函数的图形所划出的变动面积的形式。可是，

把这个几何的解釋就认为是原函数存在性的证明，当然是不可以的。因为面积概念本身还沒有根据。

在下章[293]中，我們可以对下面的重要事实給出严格的并且純粹分析的证明，这个事实就是：**在給定区間上的每个連續函数 $f(x)$ 都有在这区間上的原函数。**这个断言我們現在就加以采用。

在本章中我們只讲連續函数的原函数。如果实际給出的函数有間断点，那么我們将只在它連續的区間上考虑它。因此，承认了上述断言之后，我們就无須每次預先讲明积分是否存在：我們所考虑的积分总是存在的。

253. 基本积分表　由微分学中的每个公式，这公式建立着某一函数 $F(x)$ 的微商是 $f(x)$，可以直接导出相当的积分学中的公式

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

現在选出第 94 目中計算初等函数的微商的那些公式，也选出后来(对于双曲函数)推出的一些公式，就可作出下面的积分表：

1. $\int 0\cdot dx=C.$

2. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C.$

3. $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ (\mu\neq-1).$

4. $\int \frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C.$

5. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$

6. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

7. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C.$

$$\int e^x dx=e^x+C.$$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

关于公式 4, 我們要作一点說明: 它是应用在不包含零的任何区間上的。实际上, 如果这个区間在零的右方, 就有 $x>0$, 而由已知的微分公式 $[\log x]' = \frac{1}{x}$ 即可直接推出

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

如果区間在零的左方, 就有 $x<0$, 那么, 用微分法容易证实 $[\log(-x)]' = \frac{1}{x}$, 由此

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C.$$

合并这两个公式就得公式 4。

用积分法則, 还可以将上面所得到的积分表的范圍加以扩充。

254. 最簡单的积分法則 I. 若 a 是常数 $(a \neq 0)$, 則

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

实际上，把右端的表达式取微分，我們便得到[**104, I**]

$$d[a\cdot\int f(x)dx]=a\cdot d[\int f(x)dx]=a\cdot f(x)dx,$$

所以这个表达式是微分表达式 $a\cdot f(x)dx$ 的原函数，而这正是所要证明的。因此，**常数因子可以拿到积分記号的外面来。**

II. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$

把右端的表达式取微分[**104, II**]:

$$d[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx]=d\int f(x)dx\pm d\int g(x)dx=$$

$$=[f(x)\pm g(x)]dx;$$

所以，該表达式就是微分表达式 $[f(x)\pm g(x)]dx$ 的原函数，这就是所要证明的。**微分式的和(或差)的不定积分，等于每个微分式各自积分的和(或差)。**

附注　关于这两个公式，我們要注意下面这一点。这两个公式中的每个不定积分都包含一个任意常数項。这类等式应了解为等式左右两端之間的差是一个常数。也可以从字面上来了解这些等式，但这时所有出現于其中的积分之中有一个积分不再是任意原函数：这个积分中的积分常数，在其他几个积分常数选定之后，就被确定了。这个重要的附注，在此后应当加以注意。

III. 若
$$\int f(t)dt=F(t)+C,$$
则
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C'.$$

实际上，所給的关系式相当于:

$$\frac{d}{dt}F(t)=F'(t)=f(t).$$

但如此，则　$\frac{d}{dx}F(ax+b)=F'(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b),$

于是 $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

即是，$\frac{1}{a}F(ax+b)$确是函数$f(ax+b)$的一个原函数。

特别时常遇到的情形是$a=1$或$b=0$，这时：

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C_1,$$

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}\cdot F(x)+C_2.$$

[实际上，规则Ⅲ是不定积分中换元法则的极特别的情形。关于换元法则，在下面256目就要讲到。]

255. 例题 1) $\int(6x^2-3x+5)dx.$

利用规则Ⅱ与Ⅰ(及公式3，2)我們有

$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=6\int x^2dx-3\int x\,dx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

2) 容易积分一般形状的多项式

$$\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)dx=$$

$$=a_0\int x^ndx+a_1\int x^{n-1}dx+\cdots+a_{n-1}\int xdx+a_n\int dx=$$

$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C. \qquad (\text{II, I; 3, 2})$$

3) $$\int(2x^2+1)^3dx=\int(8x^6+12x^4+6x^2+1)dx=$$

$$=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C. \qquad (\text{例题 2})$$

4) $$\int(1+\sqrt{x})^4dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx=$$

$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int xdx+4\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^2dx=$$

$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C. \qquad (\text{II, I; 3, 2})$$

5) $$\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx=\int\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\log x+\frac{1}{x}+C. \qquad (\text{II, I; 3, 2, 4})$$

6) $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx =$

$$= \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C. \qquad \text{(II; 3)}$$

现在給一些应用規則 III 的例題:

7) (a) $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C.$ (III; 4)

(б) $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}dx = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C =$

$$= -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C,\ (k>1). \qquad \text{(III; 3)}$$

8) (a) $\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C,\ (m\neq 0)$ (III; 8)

(б) $\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + C,\ (m\neq 0).$ (III; 9)

(в) $\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$ (III; 7)

9) (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ (a>0).$ (III; 6)

(б) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C,\ (a>0).$ (III; 5)

用到全部規則的例題:

10) $\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x})dx =$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C. \qquad \text{(II, III; 7, 2)}$$

11) $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx.$

以分母除分子后,把被积表达式表示成下面的形状

$$\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}.$$

由此,所求积分等于

$$\frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\log|cx+d| + C. \qquad \text{(II, I, III; 2, 4)}$$

12) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx = \int \left(2x-5+\frac{6}{x+1}\right)dx = x^2 - 5x + 6\log|x+1| + C.$

把分母較复杂的分式求积分时，先把此分式分解为分母更簡单的分式的和，常会变得容易些。例如，

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right);$$

因此[参看例題 7)(a)]

13) $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

这种方法可以說明，例如，更普遍形状的分式

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

显然，$(x+a)-(x+b)=a-b$。此时有恒等式

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right).$$

由此可見，

14) $$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(a-b)}\log\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

特别地，

15) (a) $$\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$$

(б) $$\int\frac{dx}{4x^2+4x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{8}\log\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$$

16) $\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$(当 $B^2-AC>0$ 时)。

分母可分解为这样的实因式：$A(x-\alpha)(x-\beta)$，其中

$$\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},\quad \beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

于是，按照例題 14)，假定 $a=-\beta,\ b=-\alpha$，我們得到

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\log\left|\frac{Ax+B-\sqrt{B^2-AC}}{Ax+B+\sqrt{B^2-AC}}\right|+C'.$$

有些三角表达式，經过某些初等变换后，也可以利用这些簡单方法来求积分。

例如，显然

$$\cos^2 mx=\frac{1+\cos 2mx}{2},\quad \sin^2 mx=\frac{1-\cos 2mx}{2},$$

由此

17) (a) $$\int\cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,$$

$(m\neq 0)$

(б) $$\int\sin^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,$$