



21 世纪大学本科
计算机专业系列教材

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著

离散数学习题解答与学习指导

<http://www.tup.com.cn>

- 根据教育部高教司主持评审的《中国计算机科学与技术学科教程 2002》组织编写
- 与美国 ACM 和 IEEE/CS *Computing Curricula 2001/2005* 同步

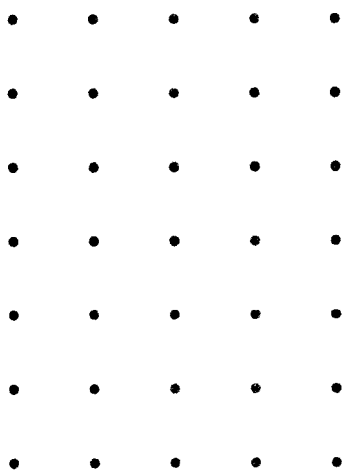


清华大学出版社

21世纪大学本科计算机专业系列教材

离散数学习题解答与学习指导

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据中国计算机学会“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”《离散数学》以及电子教案编写的配套教学指导用书。全书分为 14 章,每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分。内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等;习题部分包含与上述内容配套的数十道题;习题解答与分析部分不但对上述习题给出了比较详细的解答,而且对一些典型的解题方法做了比较深入的分析 and 总结。解答的习题总计超过 500 道,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等不同模块的基本内容和典型的解题方法。

本书既可以作为上述主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的其他读者在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答与学习指导/屈婉玲,耿素云,张立昂编著. —北京:清华大学出版社,2006.2

(21 世纪大学本科计算机专业系列教材)

ISBN 7-302-12039-0

I. 离… II. ①屈… ②耿… ③张… III. 离散数学—高等学校—教学参考资料 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124733 号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:张瑞庆

文稿编辑:王冰飞

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×230 印张:18.25 字数:384 千字

版 次:2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-12039-0/TP·7793

印 数:1~3000

定 价:25.00 元

21 世纪大学本科计算机专业系列教材编委会

名誉主任：陈火旺

主任：李晓明

副主任：钱德沛 焦金生

委员：(按姓氏笔画为序)

马殿富	王志英	王晓东	宁 洪	刘 辰
孙茂松	李大友	李仲麟	吴朝晖	何炎祥
宋方敏	张大方	张长海	周兴社	侯文永
袁开榜	钱乐秋	黄国兴	蒋宗礼	曾 明
廖明宏	樊孝忠			

秘书：张瑞庆

本书责任编辑：李晓明

序 言

PREFACE

21 世纪是知识经济的时代,是人才竞争的时代.随着 21 世纪的到来,人类已步入信息社会,信息产业正成为全球经济的主导产业.计算机科学与技术的信息产业中占据了最重要的地位,这就对培养 21 世纪高素质创新型计算机专业人才提出了迫切的要求.

为了培养高素质创新型人才,必须建立高水平的教学计划和课程体系.在 20 多年跟踪分析 ACM 和 IEEE 计算机课程体系的基础上,紧跟计算机科学与技术的发展潮流,及时制定并修正教学计划和课程体系是尤其重要的.计算机科学与技术的发展对高水平人才的要求,需要我们从总体上优化课程结构,精炼教学内容,拓宽专业基础,加强教学实践,特别注重综合素质的培养,形成“基础课程精深,专业课程宽新”的格局.

为了适应计算机科学与技术学科发展和计算机教学计划的需要,要采取多种措施鼓励长期从事计算机教学和科技前沿研究的专家教授积极参与计算机专业教材的编著和更新,在教材中及时反映学科前沿的研究成果与发展趋势,以高水平的科研促进教材建设.同时适当引进国外先进的原版教材.

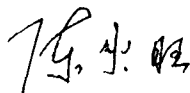
为了提高教学质量,需要不断改革教学方法与手段,倡导因材施教,强调知识的总结、梳理、推演和挖掘,通过加快教案的不断更新,使学生掌握教材中未及时反映的学科发展新动向,进一步拓宽视野.教学与科研相结合是培养学生实践能力的有效途径.高水平的科研可以为教学提供最先进的高新技术平台和创造性的工作环境,使学生得以接触最先进的计算机理论、技术和环境.高水平的科研还可以为高水平人才的素质教育提供良好的物质基础.学生在课题研究中不但能了解科学研究的艰辛和科研工作者的奉献精神,而且能熏陶和培养良好的科研作风,锻炼和培养攻关能力和协作精神.

进入 21 世纪,我国高等教育进入了前所未有的大发展时期,时代的进步与发展对高等教育质量提出了更高、更新的要求.2001 年 8 月,教育部颁发了《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》.文件指出,本科教育是高等教育的主体和基础,抓好本科教学是提高整个高等教育质量的重点和关键.随着高等教育的普及和高等学校的扩招,在校大学本科计算机专业学生的人数将大量上升,对适合 21 世纪大学本科计算机科学与技术学科课程体系要求的,并且适合中国学生学习的计算机专业教材的需求量

也将急剧增加.为此,中国计算机学会和清华大学出版社共同规划了面向全国高等院校计算机专业本科生的“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”.本系列教材借鉴美国 ACM 和 IEEE/CS 最新制定的 *Computing Curricula 2001* (简称 CC2001) 课程体系,反映当代计算机科学与技术学科水平和计算机科学技术的新发展、新技术,并且结合中国计算机教育改革成果和中国国情.

中国计算机学会教育专业委员会和全国高等学校计算机教育研究会,在清华大学出版社的大力支持下,跟踪分析 CC2001,并结合中国计算机科学与技术学科的发展现状和计算机教育的改革成果,研究出了《中国计算机科学与技术学科教程 2002》(*China Computing Curricula 2002*, 简称 CCC2002),该项研究成果对中国高等学校计算机科学与技术学科教育的改革和发展具有重要的参考价值和积极的推动作用.

“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”正是借鉴美国 ACM 和 IEEE/CS CC2001 课程体系,依据 CCC2002 基本要求组织编写的计算机专业教材.相信通过这套教材的编写和出版,能够在内容和形式上显著地提高我国计算机专业教材的整体水平,继而提高我国大学本科计算机专业的教学质量,培养出符合时代发展要求的具有较强国际竞争力的高素质创新型计算机人才.



中国工程院院士

国防科学技术大学教授

21 世纪大学本科计算机专业系列教材编委会名誉主任

2002 年 7 月

前言

FOREWORD

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科. 美国 ACM 和 IEEE *Computing Curricula 2001/2005* (CC2001/CC2005) 与我国教育部高教司主持评审的《中国计算机科学与技术学科教程 2002》(CCC2002) 都把离散数学列为计算机科学与技术专业的核心课程. 通过离散数学的学习, 不但可以使學生掌握处理离散结构的描述工具和方法, 为后续课程的学习创造条件, 而且能够提高学生的数学素养, 培养抽象思维和严格的逻辑推理能力, 对将来参与创新性的研究和开发工作也是非常有益的.

离散数学具有数学类课程的内容抽象、体系严谨、逻辑性强、习题量大、解题思路灵活多变等特征, 除此之外还有它自己的特点, 主要体现如下:

- 概念多, 定理多, 知识点比较散, 概念容易混淆, 不太容易掌握知识点之间的内在联系与知识体系.
- 数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各部分内容分别来自不同的数学分支, 所采用的数学模型和处理方法差别较大, 特别是解题的思路和技巧有着明显的区别.
- 在学习中间要用到初等数学、微积分、线性代数等多门课程中的相关的概念与结果.
- 与计算机专业的其他课程, 如数据结构、编译技术、人工智能、信息安全、算法设计与分析、数据库原理、网络技术等联系紧密, 应用背景较强.

由于这些特点, 初学者往往会感到比较困难, 特别是拿到题目后不知道如何着手. 为了帮助学生更好地掌握这门课程, 我们在多年教学实践和大量习题资料积累的基础上, 编写了这本《离散数学习题解答与学习指导》.

本书与清华大学出版社出版的中国计算机学会“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”《离散数学》以及配套的电子教案一起构成了立体化离散数学系列教材. 全书分为 14 章, 与主教材中的章对应. 每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分. 内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等; 习题部分包含与上述内容配套的数十道题; 习题解答与分析部分不但对上述习题给出了比较详细的解答, 而且对一些典型的解

题方法做了比较深入的分析和总结. 解答的习题(大题)总计超过 500 道,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各个不同离散数学模块的基本内容和典型的解题方法. 全书内容丰富,概念清晰,讲解翔实易懂,通过不同解法的对比与分析,进一步加强了解题技巧的训练,同时本书习题中也选择了计算机科学技术中的典型应用实例,以增加理论联系实际的感性认识.

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的其他读者在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助.

本书的第 1、2、3、6、7 章由耿素云编写,第 4、5、8、9、10、14 章由屈婉玲编写,第 11、12、13 章由张立昂编写.

在本书编写过程中参考了国内外多种版本的离散数学教材和相关的文献资料,本书的出版也得到 21 世纪大学本科计算机专业系列教材编委会与清华大学出版社的大力帮助,在此表示衷心的感谢. 由于水平所限,错误和疏漏之处期待着读者的批评指正.

作 者

2005 年 10 月于北京大学



CONTENTS

第 1 章 数学语言与证明方法	1
1.1 内容提要	1
1.2 习题	3
1.3 习题解答与分析	8
第 2 章 命题逻辑	22
2.1 内容提要	22
2.2 习题	26
2.3 习题解答与分析	31
第 3 章 一阶逻辑	59
3.1 内容提要	59
3.2 习题	62
3.3 习题解答与分析	67
第 4 章 关系	90
4.1 内容提要	90
4.2 习题	95
4.3 习题解答与分析	99
第 5 章 函数	106
5.1 内容提要	106
5.2 习题	108
5.3 习题解答与分析	111

第 6 章 图	115
6.1 内容提要	115
6.2 习题	118
6.3 习题解答与分析	123
第 7 章 树及其应用	142
7.1 内容提要	142
7.2 习题	143
7.3 习题解答与分析	146
第 8 章 组合计数基础	157
8.1 内容提要	157
8.2 习题	160
8.3 习题解答与分析	163
第 9 章 容斥原理	170
9.1 内容提要	170
9.2 习题	172
9.3 习题解答与分析	173
第 10 章 递推方程与生成函数	178
10.1 内容提要	178
10.2 习题	188
10.3 习题解答与分析	191
第 11 章 初等数论	203
11.1 内容提要	203
11.2 习题	205
11.3 习题解答与分析	209
第 12 章 离散概率	224
12.1 内容提要	224
12.2 习题	226

12.3	习题解答与分析·····	230
第 13 章	初等数论和离散概率的应用·····	246
13.1	内容提要·····	246
13.2	习题·····	247
13.3	习题解答与分析·····	249
第 14 章	代数系统·····	257
14.1	内容提要·····	257
14.2	习题·····	266
14.3	习题解答与分析·····	270

第 1 章

数学语言与证明方法

1.1 内 容 提 要

1. 常用的数学符号

- 集合符号;
- 运算符号;
- 逻辑符号.

2. 集合及其运算

集合与元素:

$x \in A$ (x 是 A 的元素), $x \notin A$ (x 不是 A 的元素).

特殊数的集合:

$\mathbf{N}$ (自然数集合); $\mathbf{Z}$ (整数集合);

$\mathbf{Z}^+$ (正整数集合); $\mathbf{Q}$ (有理数集合);

$\mathbf{Q}^*$ (非 0 有理数集合); $\mathbf{R}$ (实数集合);

$\mathbf{R}^*$ (非 0 实数集合).

集合之间的关系:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee A = B$$

$\emptyset$ (空集):

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

推论 空集是惟一的.

全集 全集不是惟一的.

集合的幂集:

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

定理 1.2 n 元集的幂集有 2^n 个元素.

集合的运算:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\sim A = \{x | x \notin A\} = E - A (E \text{ 为全集})$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

注意 (1) 以上有些运算可以推广到多个集合;

(2) 可以用文氏图直观表示运算结果;

(3) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是不交的.

基本集合恒等式:

幂等律 $A \cup A = A; A \cap A = A.$

交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

德摩根律绝对形式 $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B;$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B.$$

德摩根律相对形式 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C);$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A.$

零律 $A \cup E = E; A \cap \emptyset = \emptyset.$

同一律 $A \cup \emptyset = A; A \cap E = A.$

排中律 $A \cup \sim A = E.$

矛盾律 $A \cap \sim A = \emptyset.$

余补律 $\sim \emptyset = E; \sim E = \emptyset.$

双重否定律 $\sim(\sim A) = A.$

补交转换律 $A - B = A \cap \sim B.$

对称差 $\oplus$ 运算满足:

交换律 $A \oplus B = B \oplus A.$

结合律 $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$

$\cap$ 对 $\oplus$ 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$

$$A \oplus \emptyset = A; A \oplus E = \sim A;$$

$$A \oplus A = \emptyset; A \oplus \sim A = E.$$

3. 证明方法概述

推理的形式结构

从前提 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 推结论 B 的形式结构

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B \text{ (简记为 } A \rightarrow B \text{)}.$$

上述推理正确,记为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B \text{ (简记为 } A \Rightarrow B \text{)}.$$

证明推理正确的方法:

直接证明法 由 A 为真,证明 B 为真.

间接证明法 证明 $\neg B \rightarrow \neg A$ 为真(从而 $A \rightarrow B$ 为真).

归谬法(也称反证法) 欲证 B 为真.若 $\neg B$ 为真,能推出矛盾,从而证明 B 为真.间接证明法也是特殊的归谬法.

分情况证明法(穷举法) 欲证 $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k) \rightarrow B$ 为真,只需证明 $(A_1 \rightarrow B), (A_2 \rightarrow B), \dots, (A_k \rightarrow B)$ 均为真.

构造性证明法 若 A 为真,能构造出 B 来,从而证明了 $A \rightarrow B$ 为真.

前件假证明法 若能证明 A 为假,从而证明了 $A \rightarrow B$ 为真.

后件真证明法(平凡证明法) 若能证明 B 为真,从而证明了 $A \rightarrow B$ 为真.

谬误的证明方法 举反例.

数学归纳法

第一数学归纳法的步骤:

(1) 归纳基础: 证明 $P(n_0) (n_0 \geq 1)$ 为真;

(2) 归纳步骤(或归纳推导): 若 $\forall n (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0)$, 有 $P(n)$ 为真,能证明出 $P(n+1)$ 为真.

第二数学归纳法的步骤:

(1) 归纳基础: 证明 $P(n_0)$ 为真;

(2) 归纳步骤: 若 $\forall n (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0)$, 有 $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$ 均为真,能证明 $P(n+1)$ 为真.

1.2 习 题

1.1 将下列各集合表示成列举法表示的集合.

(1) $\{x | x \text{ 是方程 } 2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ 的根}\}.$

(2) $\{x|x \text{ 是方程 } x^2-2x+5=0 \text{ 的实根}\}$.

(3) $\{x|x \text{ 是完全数} \wedge 5 \leq x \leq 10\}$.

(4) $\{x|x \text{ 是整数} \wedge x^2=3\}$.

(5) $\{x|x \text{ 是空集}\}$.

1.2 将下列各集合用谓词描述法表示.

(1) $\{x,y,z\}$.

(2) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

(3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(4) $\emptyset$.

1.3 判断下列每组的两个集合是否相等.

(1) $A=\{3,1,1,5,5\}, B=\{1,3,5\}$.

(2) $A=\emptyset, B=\{\emptyset\}$.

(3) $A=\emptyset, B=\{x|x \text{ 是有理数并且是无理数}\}$.

(4) $A=\{1,2,\emptyset\}, B=\{\{\emptyset\},2,1\}$.

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$.

(2) $\emptyset \subset \emptyset$.

(3) $\emptyset \in \emptyset$.

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

(5) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

(6) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$.

(7) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合, 判断下列命题是否为真.

(1) $\emptyset \in P(A)$.

(2) $\emptyset \subseteq P(A)$.

(3) $\{\emptyset\} \in P(A)$.

(4) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$.

(5) $\{\emptyset\} \in PP(A)$.

(6) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq PP(A)$.

1.6 求下列集合中的元素个数.

(1) $\{x|x \in \mathbf{Z} \wedge -3 \leq x < 2\}$.

(2) $\{x|x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ 是偶素数}\}$.

(3) $\{x|x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ 是奇数} \wedge x \text{ 是偶数}\}$.

(4) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

$$(5) \{\{\{\emptyset\}\}\}.$$

$$(6) P(A), A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

1.7 设 $A = \{a, 2, \{3\}, 4\}$, $B = \{\{a\}, 4, 3, 1\}$. 判断下列命题是否为真.

$$(1) a \in A.$$

$$(2) a \in B.$$

$$(3) \{a\} \in A.$$

$$(4) \{a\} \in B.$$

$$(5) \{a\} \subseteq A.$$

$$(6) \{a\} \subseteq B.$$

$$(7) \{a, \{3\}, 4\} \subseteq A.$$

$$(8) \{a, \{3\}, 4\} \subseteq B.$$

$$(9) \emptyset \subseteq A.$$

$$(10) \emptyset \subseteq \{\{a\}\} \subseteq B.$$

1.8 已知 A, B 为两个集合, 且 $A \subseteq B$, 则 $A \notin B$ 一定为真吗?

1.9 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 试求出 A 的全部 2 元子集.

1.10 设 $A = \{\emptyset, a\}$, 求出 A 的全部子集.

1.11 求下列集合的幂集.

$$(1) \emptyset.$$

$$(2) \{1, \{a, b\}\}.$$

$$(3) \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

$$(4) \{2, 2, 2, 3\}.$$

1.12 设全集 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 其子集 $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$. 求下列集合.

$$(1) A \cap \sim B.$$

$$(2) (A \cap B) \cup \sim C.$$

$$(3) \sim (A \cap B).$$

$$(4) P(A) \cap P(B).$$

$$(5) P(A) \cap \sim P(B).$$

1.13 画出下列集合的文氏图.

$$(1) A \cap (B \cup C).$$

$$(2) \sim A \cap \sim B \cap \sim C.$$

$$(3) (A - (B \cup C)) \cup ((B \cup C) - A).$$

1.14 设 $A = \{\emptyset\}$, $B = \{1, 2\}$, 求 $P(A) \oplus P(B)$.

1.15 设 $A \subseteq B \wedge C \subseteq D$, 证明 $A \cup C \subseteq B \cup D$.

1.16 设 $A \subset B \wedge C \subset D, A \cup C \subset B \cup D$ 一定为真吗?

1.17 设 A, B 为两个集合, 已知 $A \subseteq B, B \in A$ 可能吗? 为什么?

1.18 试确定下列集合之间的包含或属于关系.

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x > 0 \wedge x^2 = 4\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$C = \{\{x\} | x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ 为偶数}\}$$

$$D = \{\{2\}, \{4\}, \{3\}, 2, 3\}$$

1.19 对于题 1.18 中的 A, B, C, D , 计算:

(1) $A \cup B \cup D$.

(2) $A \cap B \cap D$.

(3) $A \oplus B$.

(4) $(A \cap B) \oplus A$.

(5) $A \oplus C$.

1.20 设 $A = \{x | x \text{ 是北大文科学生}\};$

$$B = \{x | x \text{ 是北大理科学生}\};$$

$$C = \{x | x \text{ 喜欢看小说}\};$$

$$D = \{x | x \text{ 喜欢数学}\}.$$

已知: 北大文科学生都爱看小说, 北大理科学生都喜欢数学, 试确定 A, B, C, D 之间的包含关系.

1.21 若 $A \oplus C = B \oplus C$, 一定有 $A = B$ 吗? 证明之.

1.22 设 $A_i = \{1, 2, \dots, i\}, i = 1, 2, \dots$, 求:

(1) $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

1.23 设 $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}, i = 1, 2, \dots$, 求:

(1) $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

1.24 下列集合中, 哪些是彼此相等的?

$$A = \{3, 4\}; \quad B = \{3, 4\} \cup \emptyset;$$

$$C = \{3, 4\} \cup \{\emptyset\};$$

$$D = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x^2 - 7x + 12 = 0\};$$

$$E = \{\emptyset, 3, 4\};$$

$$F = \{3, 4, 4\};$$

$$G = \{4, \emptyset, \emptyset, 3\}.$$