吴文俊论数学机械化

WuWenjun lun shuxue jixiehua

山东教育出版社

吴文俊论数学机械化

山 东 教 育 出 版 社

1995 年·济南

鲁新登字2号

吴文俊论数学机械化

*

山东教育出版社出版发行
(济南经九路胜利大街)
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

850毫米×1168毫米 32开本 20.875印张 4插页 498千字
1996年7月第1版 1996年7月第1次印刷
印数1—2000

ISBN 7—5328—2267—2／G·2106

定价：27.20元

序

本书的前身是1986年由山东教育出版社出版的《吴文俊文集》。如该书前言中所说，该书并非是以专门论著为主要内容的选集或文集，而是一本比较通俗的写作的汇集。这些写作围绕着数学机械化这一主题，结合有关的史实研讨，反映了作者对整个数学的认识，作者思想的实质，以及作者对发展数学的主张与意图。自该书出版以来，已有十年。在这十年期间，作者又陆续写了不少类似的文章。现乘重版之机，一并收集在内。

作者倡导数学机械化已有二十来年，经过二十年的惨淡经营，从未知到已知，浅识到深识，数学机械化的思想与方法，已逐渐为较广泛的数学各界人士所认识与认可。为了方便更广的人士能参与这方面的工作，本书添入了稍为专门的若干论著，其中包括关于程序编写的解方程器文章，以及原来用英文发表的几篇论文。作者恳切希望，这一导源于中国古代传统数学，由于计算机的出现而呈现旺盛生命力的数学机械化思想能在即将进入的二十一世纪中，在数学研究上发扬它应有的巨大威力。

不论是本书还是它的前身，都得到了山东教育出版社的热情关注与大力支持。作者谨在此致以深切的谢意。

吴文俊

1996年4月17日

目录

综合报告与论述

数　学　史

数学机械化

附　录

综合报告与论述

数　　学*

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的，简单地说，数学是数和形的科学。

由于生活和劳动上的需求，即使是最原始的民族，也知道简单的计数，并由用手指或实物计数发展至用数字计数。在中国，至迟在商代，即已出现用十进制数字表示大数的方法；又至迟至秦汉之际，即已出现完满的十进位值制。在成书不迟于1世纪的《九章算术》中，已载有只有位值制才有可能的开平、立方的计算法则，并载有分数的各种运算以及解线性联立方程组的方法，还引入了负数概念。刘徽在他注解的《九章算术》（3世纪）中，还提出过用十进小数表示无理数平方根的奇零部分。但直至唐宋时期，欧洲则在16世纪S．斯蒂文以后十进小数才获通用。在《九章注》中，刘徽又用圆内接正多边形的周长逼近圆周长，成为后世求圆周率更精确值的一般方法。虽然中国从来没有过无理数，或实数的一般概念，但在实质上，那时中国已完成了实数系统的一切运算法则与方法，这不仅在应用上不可缺，也为数学初期教育所不可少。至于继承了巴比伦、埃及、希腊文化的欧洲地区，则侧重于数的性质及这些性质间的逻辑关系的研究。早在欧几里得的《几何原本》中，即有素数的概念和素数个数无穷及整数唯一分解等论断。古希腊发现了有非分数的数，即现称的无理数。16世纪以来

---

* 本文摘自《中国大百科全书·数学卷》，中国大百科全书出版社，1988年。

由于解高次方程又出现了复数。在近代，数的概念更进一步抽象化并依据数的不同运算规律而对一般的数系统进行独立的理论探讨，形成数学中的若干不同分支。

开平方和开立方是解最简单的高次方程。在《九章算术》中，已出现解某种特殊形式的二次方程，发展至宋元时代，引进了“天元”（即未知数）的明确观念，出现了求高次方程数值解与求多至四个未知数的高次代数联立方程组的解的方法，通称为天元术与四元术。与之相伴出现的多项式的表达、运算法则以及消去方法，已接近于近世的代数学。在中国以外，9世纪阿拉伯的花拉子米的著作阐述了二次方程的解法，通常被视为代数学的鼻祖，其解法实质上与中国古代依赖于切割术的几何方法具有同一风格。中国古代数学致力于方程的具体求解，而导源于古希腊、埃及传统的欧洲数学则不同，一般致力于探究方程解的性质。16世纪时F. 韦达以文字代替方程系数，引入了代数的符号演算。对代数方程解性质的探讨，则从线性方程组导致行列式、矩阵、线性空间、线性变换等概念与理论的出现。从代数方程导致复数、对称函数等概念的引入以至伽罗瓦理论与群论的创立。近代极为活跃的代数几何，则无非是高次联立代数方程组解所构成的集体的理论研究。

形的研究属于几何学的范畴。古代民族都具有形的简单概念而往往以图画来表示，形之成为数学对象是由工具的制作与测量的要求所促成。规矩以作圆方，中国古代夏禹治水时即已有规、矩、准、绳等测量工具。《墨经》中对一系列的几何概念，有抽象概括，作出了科学的定义。《周髀算经》与刘徽《海岛算经》给出了用矩观天测地的一般方法与具体公式。在《九章算术》及刘徽注解的《九章算术》中，除勾股理论外，还提出了若干一般原理以解多种问题。例如出入相补原理以求任意多边形面积；阳马鳖臑的二比一原理（刘徽原理）以求多

面体体积；5世纪祖暅提出“幂势即同则积不容异”的原理以求曲形体积特别是球的体积；还有以内接正多边形逼近圆周长的极限方法（割圆术）。但自五代（约10世纪）以后，中国在几何学方面的建树不多。中国几何学以测量与面积体积的量度为中心，古希腊的传统则重视形的性质与各种性质间的相互关系。欧几里得的《几何原本》，建立了用定义、公理、定理、证明构成的演绎体系，成为近代数学公理化的楷模，影响及于整个数学的发展。特别是平行公理的研究，导致了19世纪非欧几何的产生。欧洲自文艺复兴时期起出现了射影几何。18世纪，G. 蒙日应用分析方法于形的研究，开微分几何的先河。C. F. 高斯的曲面论与B. 黎曼的流形理论开创了脱离周围空间以形作为独立对象的研究方法。19世纪F. 克莱因以群的观点对几何学进行统一处理。此外，如G. 康托尔的点集理论扩大了形的范围，H. 庞加莱，又创立了拓扑学，使形的连续性成为几何研究的对象。这些都使几何学面目一新。

在现实世界中，数与形，如影之随形、难以分割。中国的古代数学反映了这一客观实际，数与形从来就是相辅相成，并行发展的。例如勾股测量提出了开平方的要求，而开平、立方的方法又奠基于几何图形的考虑。二次、三次方程的产生，也大都来自几何与实际问题。至宋元时代由于天元与相当于多项式概念的引入，出现了几何代数化。在天文与地理中的星表与地图的绘制，已用数来表示地点，不过并未发展到坐标几何的地步。在欧洲，14世纪N. 奥尔斯姆的著作中已有关于经纬度与函数图形表示的萌芽，而17世纪R. 笛卡儿提出了系统的把几何事物用代数表示的方法及其应用，在其启迪之下，经G. W. 莱布尼茨、I. 牛顿等的工作，发展成了现代形式的坐标制解析几何，使数与形的统一更臻完美，不仅改变了几何证题过去遵循欧氏几何的老方法，还引起了导数的产生，成为微

积分产生的根源。这是数学史上的一件大事。在这一世纪中，由于科学与技术上的要求促使数学家们研究运动与变化，包括量的变化与形的变换（如投影），还产生了函数概念和无穷小分析即现在的微积分，使数学从此进入了一个研究变量的新时代。18 世纪以来，以解析几何与微积分这两个有力工具的创立为契机，数学以空前的规模迅猛发展，出现了无数分支。由于自然界的客观规律大多以微分方程的形式表现，因而微分方程的研究，一开始就受到重视。微分几何基本上与微积分同时诞生，高斯与黎曼的工作又产生了内在的现代微分几何。19、20 世纪之交，庞加莱创立了拓扑学，开辟了对连续现象进行定性与整体研究的途径。对客观世界中随机现象的分析，产生了概率论。第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制理论与数理统计学等学科。实际问题要求具体的数值解答，产生了计算数学。选择最优途径的要求又产生了各种优化的理论、方法。力学、物理学同数学的发展始终是互相影响互相促进的，特别是相对论与量子力学推动了微分几何与泛函分析的成长。此外，在 19 世纪还只用到一次方程的化学和几乎与数学无缘的生物学，都已要用到最前沿的一些高深数学。19 世纪后期，出现了集合论，还进入了一个批判性的时代，由此推动了数理逻辑的形成与发展。也产生了把数学看作一个整体的各种思潮和数学基础学派。特别是 1900 年 D. 希尔伯特关于当代数学重要问题的演讲，以及 30 年代开拓以结构造概念统观数学的法国布尔巴基学派的兴起，对 20 世纪数学发展的影响至深且巨。科学的数学化一语也往往为人们所乐道。数学的外围向自然科学、工程技术甚至社会科学不断渗透扩大并从中吸取营养，出现了一些边缘数学。数学本身的内部需要也孳生了不少新的理论与分支。同时其核心部分也在不断巩固提高并有时作适当调整以

适应外部需要。总之，数学这棵大树茁壮成长，既枝叶繁茂又根深蒂固。本卷对于数学各分支与各种流派有较全面的介绍。

在数学的蓬勃发展过程中，数与形的概念不断扩大，日趋抽象化，以至于不再有任何原始计数与简单图形的踪影。虽然如此，在新的数学分支中仍有着一些对象和运算关系借助于几何术语来表示，如把函数看成是某种空间的一个点之类。这种做法之所以行之有效，归根结底还是因为数学家们已经娴熟了那种简易的数学运算与图形关系，而后者又有着长期深厚的现实基础。而且，即使是最原始的数字如 1、2、3、4，以及几何形象如点与直线，也已经是经过人们高度抽象化了的概念。因此，如果把数与形作为广义的抽象概念来理解，则前面说到的把数学作为研究数与形的科学这一定义，对于现阶段的近代数学，也是适用的。

由于数学研究对象的数量关系与空间形式都来自现实世界，因而数学尽管在形式上具有高度的抽象性，而实质上总是扎根于现实世界。生活实践与技术需要始终是数学的真正源泉。反过来，数学对改造世界的实践又起着重要的、关键的作用。理论上的丰富提高与应用的广泛深人在数学史上始终相伴相生，相互促进。但由于各民族各地区的客观条件不同，数学的具体发展过程是有差异的。大体说来，古代中华民族以竹为筹，以筹运算，自然地导致十进位值制的产生。计算方法的优越有助于对实际问题的具体解决。由此发展起来的数学形成了一个以构造性、计算性、程序化与机械化为其特色，以从问题出发从而解决问题为主要目标的独特体系。而在古希腊则着重思维，追求对宇宙的了解。由此发展成以抽象了的数学概念与性质及其相互间的逻辑依存关系为研究对象的公理化演绎体系。

中国的数学体系在宋元时期达到高峰以后，陷于停顿且几

至消失。而在欧洲，经过文艺复兴、宗教革命、资产阶级革命等一系列的变革，导致了工业革命与技术革命。机器的使用，不论中外都由来以久。但在中国，则由于明初被帝王斥为奇技淫巧而受阻抑。在欧洲，则由于工商业的发展与航海的刺激而得到发展。机器使人们从繁重的体力劳动中解放出来，又引导到理论力学和一般的运动和变化的科学研究。当时的数学家们积极参与了这些变革以及相应数学问题的解决，产生了积极的效果。解析几何与微积分的诞生，成为数学发展的一个转折点。17 世纪以来数学的飞跃，大体上可以看成是这些成果的延续与发展。

20 世纪出现各种崭新的技术，产生了新的技术革命。特别是计算机的出现，使数学又面临一个新时代。这一时代的特点之一将是部分脑力劳动的逐步机械化。与 17 世纪以来数学之以围绕连续，极限等概念为主导思想与方法不同，由于计算机研制与应用的需要，离散数学与组合数学开始受到重视。计算机对数学的作用已不限于数值计算，符号运算的重要性日趋明显（包括机器证明等数学研究）。计算机还广泛应用于科学实验。为了与计算机更好配合，数学对于构造性、计算性、程序化与机械化的要求也显得颇为突出。代数几何是一门高度抽象化的数学，最近出现的计算性代数几何与构造性代数几何的提法，即其端倪之一。总之，数学正随着新的技术革命而不断发展。

数学概况及其发展*

数学，这门基础学科，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学技术、生产建设、以至日常生活所不可缺少的有力武器。在现代的科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生关系，就不可能达到应有的精确度与可靠性。就科学来说，数学又是通向一切科学大门的钥匙，不仅所谓精确科学，如物理学、化学等已越来越需要较深较多的数学，甚至过去认为以描述为主，与数学关系不大的生物学、经济学等，也处于日益“数学化”的过程之中。这正象马克思早就指出过的那样，“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”。

数学研究的对象是现实世界中的数量关系与空间形式。数与形，这两个基本概念是整个数学的两大柱石。整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变与发展而发展着的。数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念而进行的。社会的不断发展，生产的不断提高，为数学提供了无穷源泉与新颖课题，促使数与形的概念不断深化，由此推动了数学的不断前进，在数学中形成了形形色色、多种多样的分支学科。这不仅使数学这一学科日益壮大，蔚为大成，而且使数学的应用也越来越广泛与深入了。

我们将以数与形这两个概念为中心对数学的概貌先作一简

---

* 本文摘自《现代科学技术简介》，科学出版社，1978 年。

单描述。

一、数学是研究数与形的科学

大体说来，数学中研究数量关系或数的部分属于代数学的范畴。研究空间形式或形的部分，属于几何学的范畴。此外，数与形是有机联系而不是相互割裂的。远古时代，关于长度、面积、体积的量度，我国宋元时代出现的几何代数化，以及17世纪的解析几何，把形与数这两个概念沟通了起来（因而也把几何与代数这两者沟通了起来）。近代函数概念与微积分方法的出现，在数学中形成了系统研究形、数关系的分析学，成为近代数学中发展最迅速的部分。几何、代数、分析三大类数学，构成了整个数学的本体与核心。在这一核心周围，由于数学通过数与形这两个概念与其它领域的互相渗透而出现了许多边缘学科与交叉学科。这是整个数学王国的一个总的轮廓。

先从数说起

最简单最基本的也是从远古时起人类就不得不与之打交道的数，乃是正整数或自然数：

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

在正整数之间有两种最简单的运算：加法与乘法。研究整数之间的联系与规律的学问叫做数论。从乘法产生了素数* 的概念，例如6（$=2\times3$）是非素数，而7由于不能分解成两个比7更小的正整数的乘积而是素数（1不算素数）。正整数的一个基本性质是，它总可以表示成若干个素数的乘积，例如12＝

* 对于大于1的整数来说，若除它本身与1之外再没有其它因子，则称此数为素数。