绪　言

自有历史记载以来，文化和科学的进步依赖了符号的运用。人类的文明史可以看作人类越来越熟练地应用符号的历史。任何领域里所用的符号随着该领域思想的发展而变得越来越抽象。

当符号所指的概念从本质上说基本上是非数量性概念时，就能够用逻辑学去研究这些符号及其关系，因此不需要数学。当符号实质上代表数量性概念时，数学不但有用，而且实际上是分析这些概念之间的关系所必不可少的。数学是逻辑学的一个分支，这个逻辑学分支提供了一个能够研究数量关系的系统体系。在纯数学中，先用符号来准确地描述定义(或公理)和假定，随后通过推导进行分析，以得出结论。应用数学与纯数学的一个很重要差别就是：在纯数学中，符号代表抽象概念，其性质由定义给定；在应用数学中，许多符号代表真实世界中所观测的变量，其性质不是由抽象定义确定而必须由观测确定，然后再用数学来描述。此外，应用数学推导的经验准确度能够加以确定。因此，应用数学分析以经验所得出的定义和假定为依据，从这些定义和假定着手，通过推导得出可用经验检验的结论。纯数学分析与应用数学分析只在定义、假定和结论的经验性上有所不同，而推导方法并没有差异。

因为从本质上说来，经济上所涉及的问题基本上是数量性概念（例如，价格、成本、工资标准、投资、收入和利润

等），所以许多经济分析实质上必然是数学分析。数学提供一个逻辑的能够研究数量关系的系统体系。当经济上的变量用一些符号来表示并且其性质用数学加以描述时，数学就提供了分析这些符号之间的关系、从而这些变量之间关系的方法。因此，许多经济分析就是数学分析。

在经济分析中，正如在一般应用数学中一样，数学分析推导出来的结论是用经验来解释和评价的。在这点上应该注意，如果根据一组定义和假定所推导出来的结论与经验观测的不符，那么不要归咎于数学分析（假如运用无误），而要从其定义或假定中去寻找问题的根源。数学使经济学家能够正确地定义有关变量、能够清楚地表达所做的假定、能够进行逻辑的分析并且能够考虑比用言语可能考虑的多得多的变量。但是，数学并不防止且不可能防止疏忽，或防止以经验方法对有关变量的不正确定义，也不可能防止以经验方法对假定的不准确或不完善描述。数学分析把定义或假定看作已知的并且根据这些定义或假定得出合乎逻辑的结论。因此，数学分析当然是逻辑性的而不是经验性的，并且假定作为结论依据的定义和假定为已知，数学分析只能保证结论在逻辑上正确，而不能保证在经验上准确。

因此，如果数学分析运用得正确，而其结论从经验上看来却是错误的，那么必须检验其定义和假定的准确度和完善性。数学分析为推导可用经验检验的结论，提供了一个系统体系，从而帮助经济学家确定他的定义和假定的准确度（如果结论靠不住，则必须检验并修正他的定义和假定）。

本书旨在帮助学生了解、重视并运用应用数学分析。数学证明，除非由于启发性示范的需要则尽量减少。本书是这样

编排的，对于一种分析类型，先讨论其数学（逻辑）方法，然后讨论它在企业管理与经济学中的应用。书中强调每种分析类型所需要的假定并用这些假定讨论这种类型的应用。

本章的以下各节复习一下以后几章中将要用到的一些基本数学概念和定义。

集　　合

集合（或集）就是若干个可区分的、界限分明的对象或事物之全体。属于某个集合的对象或事物叫做这个集合的元素（或元）。任何集合不是用一个元素表就是通过规定一条法则来确定，而这条法则规定一个已知对象或事物是否属于这个集合。这样的法则称为定义关系(defining relation)。集合用一对大括弧来表示，把集合的元素或定义关系写在大括弧内。

例：

$A=\{a,b,c\}$意指集合A由元素a、b和c组成。

$B=\{x:x$为奇整数$\}$意指集合B由奇整数组成。

$C=\{1,2,3,4,5,6\}$意指集合C由数1、2、3、4、5和6组成。

$D=\{y:y$为整数$\}$意指集合D由整数组成。

记号$x\in S$意指事物或对象x是集合S中的一个元素。记号$x\notin S$意指x不是集合S中的元素。

若任何元素都不能满足定义关系，则称定义了一个空集，空集记作$\varnothing$。

例：

参照上例

$a \in A$

$b \notin B$

$4 \notin B$

$4 \in C$

$4 \in D$

$7 \notin C$

$7 \in B$

$7 \in D$

$d \notin A$

$d \notin D$

例：

$S = \{x: x$为末位是2的奇数$\} = \varnothing$。

$P = \{y: y$为一个偶数平方的奇数$\} = \varnothing$。

如果集合S中的每个元素也是集合T中的元素，则说S是T的子集。如果T中至少有一个元素不同时在S中，S就是T的真子集。记号$S \subset T$意指S是T的子集，记号$S \not\subset T$意指S不是T的子集。注意，空集为每个集合的子集。如果$S \subset T$又$T \subset S$，则S中每个元素也在T中，并且反之也成立，因而S和T是相同的集合，记作$S = T$。

例

参照上几例

$A \not\subset B$

$B \subset D$

$B \not\subset C$

$C \subset D$

S和T两个集合的并集或称并是一个由S的元素和T的元素组成的集合。S和T的并集记作$S \cup T$，描述为

$S \cup T = \{x : x \in S$和/或$x \in T\}$

注意，两个集合所共有的某个元素在并集中不计两次。

S和T两个集合的交集或称交是一个由S和T所共有的元素组成的集合。S和T的交集记作$S \cap T$，描述为

$S \cap T = \{x : x \in S$且$x \in T\}$

S和T两个集合的差集(或称差)是由S的但不属于T的元素组成的集合。S和T的差集记作$S - T$，描述为

$S - T = \{x : x \in S$且$x \notin T\}$

全集（universal set或universe）是包含与某个特定讨论有关的全部元素的集合。如果两个集合有如下性质，它们的并集是全集而交集是零集，则称一个集合为另一个集合对全集的补集（或余集）。如果U表示全集，一个已知集合S的补集记作S'，则补集描述为

$S' = U - S$

除非明显地知道全集，否则必须把取补叙述清楚。例如，如果对U同时也对V取S的补集，则记作 S'_U和 S'_V。

例：

参照上例

$B \cup D = D$

$A \cup C = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap D = \varnothing$

$B \cap D = B$

$B \cap C = \{1, 3, 5\}$

$C \cap D = C$

$C - D = \varnothing$

$C - B = \{2, 4, 6\}$

$D - A = D$

$D - B = \{x: x$为偶整数$\}$

若$\text{U} = \{x: x$为整数$\}$，则

$B'_U = \{x: x$为偶整数$\}$

$D'_U = \varnothing$

若$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，则

$C'_V = \{7, 8, 9, 10\}$

若$W = \{x: x$为英语字母表中的小写字母$\}$，则

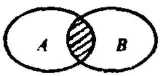
$A'_W = \{d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p: q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

这里用图解法表示由并、交和补所形成的各种集合，阴影区是各图下面所指的集合。这种集合的样式称为文恩图(Venn diagram)。

$A \cup B$

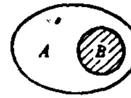
$A \cup B$

$A \cup B$

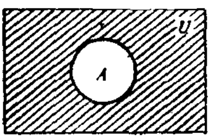


$A \cap B$

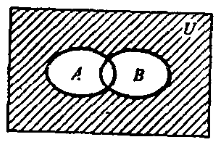
$A \cap B = \phi$



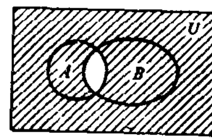
$A \cap B$



A'



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$

习　　题

1. 设有集合A、B和C且$A \subset B \subset C$，试问集合$C-B$和$C-A$之间是什么关系？

2. 试证明，一般说来 $(A \cap B)' = A' \cup B'$。

3. 试证明，一般说来 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

4. 试证明$(S \cap T') \cup (S \cap T) = S \cap (S \cup T) = S \cup (S \cap T) = S$。

5. 试证明 $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M)$。

6. 设$A \cap B = \varnothing$且$A \cap C = \varnothing$，试问$B \cap C = \varnothing$是否必然成立？

7. 设$A \neq B$且$B \neq C$，试问$A \neq C$是否必然成立？

8. 设$A \not\subset B$且$B \not\subset C$，试问$A \not\subset C$是否必然成立？

9. 设$A \subset C$且$B \subset D$，试问$A \cup B \subset C \cup D$是否必然成立？

10. 设$A \subset C$且$B \subset D$，试问$A \cap B \subset C \cap D$是否必然成立？

11. 设$S \cup T = \{1,2,3,4\}$，$S \cap T = \{1,3\}$和$S - T = \{2\}$，试

求S和T。

12. 设$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C\neq\varnothing$和$B\cap C\neq\varnothing$，试问$A\cap B\cap C\neq\varnothing$是否必然成立？

13. 设U为全集，请指出下列哪些叙述是错误的并用修改其等式右边项的办法加以纠正。

(a) $B\cup\varnothing=B$
(b) $C\cap U=C$
(c) $A\cup A'=U$
(d) $B\cup U=U$
(e) $D\cap\varnothing=\varnothing$
(f) $A\cap A'=A$
(g) $B\cap B=\varnothing$
(h) $C\cup C=C$
(i) $(D')'=U$
(j) $(A-C)\cup C=A-C$
(k) $B\cap(B-D)=B\cup D$
(l) 设$A=B'$，则$B=A'$
(m) $(C-D)'=C'-D'$
(n) $(A\cup D)-D=A-D$

14. 设$A=\{e,f,g\}$和$B=\{e,h\}$，试求

(a) $A-B$
(b) $B-A$
(c) $A\cap B$
(d) $A\cup B$

15. 设$R=\{w,x,y\}$，$S=\{u,v,w\}$，$T=\{u,v,w,x\}$以及其全集$U=\{u,v,w,x,y,z\}$，试求

(a) $R'\cap T'\cap S'$
(b) $(R-S)\cap T$
(c) $(R'-T')\cup S$
(d) $(R'\cup S')'$
(e) $(S\cup T)-T'$
(f) $(R-T)-(S-R)$
(g) $(S-R)-[(T-R)\cup(T-S)]$
(h) $(T-R)\cup S$

16. 设$A\cap B=\varnothing$且$A'=C$，试问$B\subset C$是否必然成立？

奇数习题答案

1. $C-B\subset C-A$

7. 否

9. 是

11. $S=\{1,2,3\}$

$T=\{1,3,4\}$

13. $(f)A\cap A'=\varnothing$　　$(j)(A-C)\cup C=A\cup C$

$(g)B\cap B=B$　　$(k)B\cap(B-D)=B-D$

$(i)(D')'=D$　　$(m)(C-D)'=C'\cup D$

15. $(a)\{z\}$　　$(c)S$　　$(e)T$　　$(g)\varnothing$

$(b)\{x\}$　　$(d)\{w\}$　　$(f)\{y\}$　　$(h)S$

变　量

数学中存在两种类型的量，常量（或常数）和变量。常量是在某个特定问题中其值保持不变的量。绝对常量或数值常量在所有问题中都具有相同的值，任意常数或参数常量(或参数)在某个问题中具有相同的值但在不同问题中可以取不同的值。常量a的绝对值或数值记作$|a|$，意指a的大小而不考虑其代数符号。因此，$|+a|=|-a|=|a|=a$

变量是在某个特定问题中可取不同值的量，某个变量可取的值之集合就是该变量的范围。变量可分连续变量和离散变量。连续变量是在一个规定的实数(也许全部实数)区间内可以取任何值的变量，因此一个连续变量的相继两个值可以相差一个无穷小量。离散变量是只可以在可数域中取规定值的变量。注意，任何规定的实区间(比如说5与10之间)中点的个数或值的个数是不可数的并且要获得所有这样可能的值并无一定法则可循。然而，任何规定区间中的整数的个数或整数值的个数是可数的。实线（或实线上的任何部分)上点的个数被认为是不可数无穷大。实线上整数的个数被认为是

可数无穷大，并且按某种规定法则由整数得到的任何集合也是可数的。

因此，任何一个问题中可能有下列量：

1. 绝对常量，总是具有相同的值。这样的量不是数就是代表数的符号；
2. 参数常量，在某个给定问题中具有相同的值而在不同问题中可以具有不同的值，这样的量取决于该问题所表示的特定情况；
3. 变量，可取该问题有意义的所有值，这种量可以离散地变化或连续地变化，并可以被限制，例如，在正值。

例：

一条直线的方程，

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

式中，1为数值常量，a和b为参数而x和y为变量。

例：

一个圆面积的方程，

$$A=\pi r^2$$

式中，π为数值常数（近似等于3.1416），A和r为变量。

在纯数学中，通常把位于字母表首部的一些字母用来代表参数，位于末尾的一些字母用来代表变量。但是在应用数学中，常常违背这条常规，经常用变量名称的第一个字母代表这个变量，例如，p代表价格（price）、q代表数量（quantity）、c代表成本（cost）、s代表储蓄额（savings）、

等等。

以后所考虑的常量或变量的值只限于实数。实数系统包括所有常见类型的数，即有理数（正整数、负整数、分数和小数）和无理数（某些有理数的根和其他不能表示成分数的数）。实数系统不包括负数的偶次根，(即 所谓虚数)，或者具有实、虚二部的数，(即所谓复数）。全部实数的集合记作$\mathscr{R}$。

例：

方程$x^2+6=0$没有实数解，因为$\sqrt{-6}$为虚数。

例：

方程$x^5+32=0$有实数解$x=-2$，它还有四个复数解，与现在讨论无关。

a和b两数的商a/b是数x，并且$a=bx$。按照这种定义，用零去除是不许可的。注意，如果$b=0$，则$a=0\cdot x$，这只有当$a=0$时才成立，此时x可以是任何数。因此，

$$\frac{a}{0}\text{和}\frac{0}{0}$$

是没有意义的。为了区别$a/0$与$0/0$，有时称$a/0$为“无定义的”，$0/0$为“不定的”。注意，对于$b\neq0$，则有$0/b=0$，因为$0/b$是$b\cdot x=0$中的x值，因而对于$b\neq0$时，$0/b$必须等于零。

有关不等式的关系表示如下：

记号＜表示“小于”

记号＞表示“大于”

记号≤表示“小于或等于”

记号≥表示“大于或等于”

关 系 与 函 数

数学中许多问题涉及有序数对集合。例如，表示沿直线运动的一个物体就涉及数对，它规定该物体离出发点的距离及相应的运动时间。表示某种已知商品的需求量也涉及数对，它规定其需求量及相应价格。

有序实数对之集合被称作二元关系。在二元关系中，把第一个元素之集合称作该关系的定义域，而把第二个元素之集合称作该关系的值域。对于已知集合$\{(x,y)\}$，x和y都称为变量。变量x可取的值之集合是定义域，通常称x为自变量；变量y可取的值之集合是值域，通常称y为因变量。当变量的个数从上下文看来是一目了然时，可以把二元关系简单地称为关系。

例：

$S_1=\{(1,2),(2,8),(2,3)\}$是一个二元关系，其定义域为$\{1,2\}$，值域为$\{2,3,8\}$。

$S_2=\{(x,y):x$、y实数，$x\leq y\}$是一个二元关系，其中某些元为$(2,2)$、$(3,4)$、$(5,5)$和$(8,20)$。注意，例如$(2,1)$、$(3,2)$、和$(25,20)$都不属S_2中的元。

$S_3=\{(x,y):y=x^2,\ x\in\mathscr{R}\}$是一个二元关系。$S_3$的定义域为$\mathscr{R}$，其值域为全部非负实数之集合。

$S_4=\{(x,y):y=x^2$若$0\leq x\leq 2$，$y=3-x$若$2<x<3$和$y=3$若$x=3\}$是一个二元关系，其定义域是集合$\{x:0\leq x\leq 3\}$，

值域是集合$\{y:0\leqslant y\leqslant 4\}$。

如果某个关系具有这样的性质，对定义域中的每一个元素都有值域中的一个且仅有一个元素与之对应，则说这关系是一个函数。若干函数构成一个关系子集——所有函数都是关系，但不是所有关系都是函数。注意，上例中关系S_3和S_4是函数，但关系S_1和S_2则不是函数。为了表示值域中一个元素对应于定义域中一个元素，特给函数规定一个特殊记号。如果f表示函数$\{(x,y)\}$，则伴随于已知x的数y记作$f(x)$，读作“x的函数”。可以用这个记号把定义f的这个数对的集合写成$\{(x,f(x))\}$，其中$y=f(x)$。

例：

参照上例，可以将S_3和S_4分别写为

$S_3=\{(x,\ f(x)):f(x)=x^2,\ x\in\mathscr{R}\}$

$S_4=\{(x,f(x)):f(x)=x^2$若$0\leqslant x\leqslant 2, f(x)=3-x$若$2<x<3$和$f(x)=3$若$x=3\}$

另外一些字母，例如，g、F、G、ϕ和Γ也时常用来表示一个函数。一个方程，例如$g(x)=x^2+(1/x)$提供一个求数对第二个元素的法则，而数对第一个元素为x。这样一种方程或公式称作定义函数，尽管函数并不是公式，然而是有序(数)对集合$\{(x、g(x))\}$或$\{(x,y)\}$。当x的一个值代入函数的公式时，其结果称为x值的函数值。

在含有两个变量的函数的情况下，自变量值一指定，因变量值就被确定了。自变量就是被认为可以任意地指定其值（除不允许值以外）因而也就确定因变量值的变量。在应用数学中，习惯上用x代表自变量，用y代表因变量。

对于解析几何和纯数学的其他分支中的大多数问题，自变量和因变量的选择只是从方便出发，而x和y的习惯命名法只用于图示法，如下面讨论所示。例如，考虑方程

$$x-4y^2+2y+6=0$$

显然求点对的较方便的做法是，把y当作自变量，把x当作因变量，如下所示：

$$x=4y^2-2y-6$$

当变量是纯数学的量而不代表某一特定范围中的量时，对于自变量和因变量的选择，除了方便之外别无任何依据。但是，当变量确实代表某个特定主题范围中的量时，通常这个问题的内在关系就确定了自变量和因变量的选择。例如，产量被认为是总成本的主要决定因素，而不是相反。但是即使这类问题中也有例外情况，例如，既可以认为价格确定需求量，又可以认为需求量确定价格。

例：

设$f(x)=x^2-x+2$，则

$$f(z)=z^2-z+2$$

$$f(2)=4-2+2=4$$

$$f(-3)=9+3+2=14$$

$$f(0)=0-0+2=2$$

$$f(a)=a^2-a+2$$

$$\begin{aligned}f(x+2)&=(x+2)^2-(x+2)+2\\&=(x^2+4x+4)-(x+2)+2\\&=x^2+3x+4\end{aligned}$$

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-(x+h)+2-(x^2-x+2)$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 2 - x^2 + x - 2$$
$$= 2hx + h^2 - h$$

例：

设 $y = f(x) = (x+1)/x$，则

$$f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = 0$$

$$f(0) = \frac{1}{0}\text{（无定义）}$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{a+h+1}{a+h} - \frac{a+1}{a}$$
$$= \frac{a^2 + ah + a - a^2 - ah - a - h}{a(a+h)}$$
$$= -\frac{h}{a(a+h)}$$

将一种函数形式代入另一种函数形式中就能得到一种新的函数形式。设 $y = f(x)$ 和 $u = g(y)$，又设 $u = g[f(x)] = h(x)$，则称 h 为 g 和 f 的复合函数。

例：

设 $f(x) = x^2 - x - 1$ 和 $g(x) = x - 1$，则

$$f[g(x)] = (x-1)^2 - (x-1) - 1 = x^2 - 3x + 1$$

与

$g[f(x)]=(x^2-x-1)-1=x^2-x-2$

上例说明，一般说来$f[g(x)]\neq g[f(x)]$。

例：

设$g(x)=x^2+2$，则

$$g[g(x)]=(x^2+2)^2+2=x^4+4x^2+6$$

例：

设$f(x)=10^x$和$\phi(x)=\log_{10}x$①，证明$f[\phi(x)]=\phi[f(x)]=x$。

$$f[\phi(x)]=10^{\phi(x)}=10^{\log_{10}x}=x$$

$$\phi[f(x)]=\log_{10}f(x)=\log_{10}10^x=x$$

①我国目前流行的常用对数记作"lg"，故此式相当于$\lg x$，以下同—译注。

习　题

1. 请写出下列各关系的定义域和值域，并说明该关系是不是函数。

   (a) $S=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 5)\}$

   (b) $A=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3),\ (4,\ 3)\}$

   (c) $T=\{(x,\ y): y=4x+1$ 若$0\leqslant x\leqslant 2$，$y=10-x^2$ 若 $2<x\leqslant 3\}$

   (d) $B=\{(x,\ y): y^2=x$，y是整数且$|y|\leqslant 8\}$

2. 试确定下列各题根据其给出法则而构成的实数对集合$\{(x,\ y)\}$是不是函数。

   (a) $y^2=x$　　　　(b) $y^3=x$

(c) $y^4 = x$

(d) $x^2 + y = 1$

(e) $x + y^2 = 1$

(f) $x^2 + y^2 = 1$

(g) $y = x^2 + 4$

(h) $xy = 1$

(i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

(j) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6}$

(k) $x = \dfrac{1}{y^2 - y + 2}$

(l) $\dfrac{1}{y^2 + 2} = x$

3. 设$f(x) = x^3 - x^2 + 6$，求 (a) $f(0)$； (b) $f(-2)$；(c) $f(a)$ 和 (d) $f(y^2)$ 。

4. 设 $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8}{x - 1}$，求 (a) $f(3)$；(b) $f(-1)$；(c) $f(x-2)$ 和 (d) $f(a-b)$ 。

5. 设$f(y) = \sqrt{\dfrac{y^2 - 4}{y}}$，求 (a) $f(-1)$； (b) $f(4)$；(c) $f(a^2)$和 (d) $f(x+2)$ 。

6. 设$f(y) = 2^y + y$，求 (a) $f(0)$； (b) $f(-1)$； (c) $f(5)$ 和 (d) $f(y+b)$ 。

7. 设$f(x) = 3x - x^2$，求 (a) $f(1)$；(b) $f(-2)$； (c) $f(a)$ 和 (d) $f(1/h)$ 。

8. 设 $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$，求(a)$g(0)$ ；(b) $g(3)$ ；(c) $g(1/x)$ 和 (d) $g(x+b)$ 。

9. 设$h(x) = 4x - x^2$，求(a) $h(2) - h(4)$；(b) $h(1/2)$