现代通信工程数学（2）

矩 阵 方 法

胡正名　陈启浩　编著

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍现代通信技术中的矩阵方法，包括矩阵的基本理论和在通信技术中的应用。全书共分六章，依次为：矩阵的基础知识、正交阵、矩阵方法在电路网络分析中的应用、码理论中的矩阵方法、数字信号处理中的矩阵方法以及信号系统中的矩阵方法。

本书是当前集中讲矩阵方法在通信中应用的一本专著，要求读者具有微积分和线性代数初步知识。

现代通信工程数学(2)

矩 阵 方 法

胡正名 陈启浩 编著

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：1168×850 1/32 1985年7月第一版

印张：16 页数：256 1985年7月京北第一次印刷

字数：424 千字 印数：1—7,000 册

统一书号：15045·总3000-无6320

定价：4.15元

丛 书 前 言

为了帮助我国通信工程技术人员有系统地掌握通信学科有关专业的基础理论知识，提高解决专业科技问题、做好实际工作的能力，了解通信技术的新知识和发展趋势，以便为加快我国通信建设、实现通信现代化作出应有的贡献，我会与人民邮电出版社协作，组织编写这套“通信工程丛书”，准备陆续出版。

这套丛书的主要读者对象是从事通信工作不久的大专院校通信学科各专业毕业生、各通信部门的助理工程师、工程师和其他通信工程技术人员。希望能够有助于他们较快地实际达到通信各专业工程师所应有的理论水平和技术水平。

这套丛书的特点是力求具有理论性、实用性、系统性和方向性，丛书内容从我国实际出发，密切结合当前通信科技工作和未来发展的需要，阐述通信各专业工程师应当掌握的专业知识，包括有关的系统、体制、技术标准、规格、指标、要求，以及技术更新等方面。力求做到资料比较丰富完备，深浅适宜，条理清楚，对专业技术发展有一定的预见性。这套丛书不同于高深专著或一般教材，不仅介绍有关的物理概念和基本原理，而且着重于引导读者把这些概念和原理应用于实际；论证简明扼要，避免繁琐的数学推导。

对于支持编辑出版这套丛书的各个通信部门和专家们，我们表示衷心感谢。殷切希望广大读者和各有关方面提出宝贵的意见和建议，使这套丛书日臻完善。

中国通信学会

目　　录

第一章　矩阵的基础知识

矩阵是一种数学表达手段，它已广泛地应用于通信理论的各个方面。本章叙述通信理论中常用的矩阵基础知识。

第一节　向　　量

向量是矩阵的基础。我们先介绍有关向量的概念。

1.1　向量及其运算

如图 1.1.1 所示的电桥电路，当 a、c 两端与电源 E 相连接时，各个支路 ab，bc，da，cd 及 bd 上都有电流流过，设它们分别为 i_1，i_2，i_3，i_4，i_5（流向如图中所指，如果最后算得的结果为负值，表明该电流的实际流向应与图中所指的相反）。通常称i_1，i_2，i_3，i_4，i_5 这一组有先后次序的数为该电路的支路电流向量。一般地有

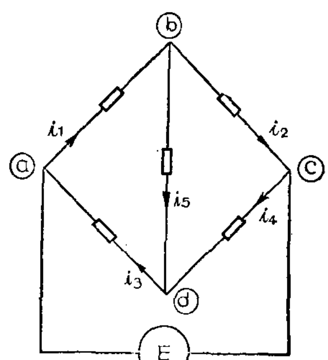

图 1.1.1

定义 1.1　有序数组 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 称为向量，记为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 分别称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的第一、第二、$\cdots$、第 n 分量，数 n（即分量的个数）称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的维数。(1.1)是一个维数等于 n 的向量，简称 n 维向量。而称

$$[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$$

为 $\boldsymbol{x}$ 的转置向量，记为 $\boldsymbol{x}^T$。

显然，$n=2$ 时

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

是一个平面向量；$n=3$ 时

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

是一个空间向量。高于三维的向量无法给出几何表示，但可以仿照二、三维向量定义它们的各种运算。

设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 都是 n 维向量：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

(1) 相等

如果向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的对应分量分别相等，即

$$x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 相等，记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

(2) 加法

向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的加法运算用符号“+”表示。定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的各个分量分别等于 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的对应分量相加。

由(1)，(2)可见，对于同维向量才有相等和加法可言。

(3) 数乘

$k\boldsymbol{x}$(或者 $\boldsymbol{x}k$)表示数 k 与向量 $\boldsymbol{x}$ 相乘(简称数乘)。定义

$$k\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

由(2)，(3)可知，对于同维向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 及数 k，l 有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$$

$$\left.\begin{array}{r} k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y} \\ (k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x} \end{array}\right\}$$

向量

$$\boldsymbol{0}=\left.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\}(n\text{个零})$$

称为 n 维零向量；向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(其中每个向量都是 n 维的)称为 n 维基本向量组。

根据上述向量运算的定义，对于任意一个 n 维向量

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

可以表示成

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

1.2　向量组的线性相关性

按照向量运算的定义，可以讨论若干个向量(即向量组)之间的相关性，其中最主要的就是线性相关性。

定义 1.2　如果对一组 m 个同维向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 可以找到一组不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_m，使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.2}$$

(右端的 $\boldsymbol{0}$ 是与 $\boldsymbol{x}_i$，$i=1, 2,\cdots, m$，同维的零向量)，则称向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性相关；如果仅当

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

时(1.2)才能成立，则称向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

例 1.1　试证明向量组

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性相关。

解：只要证明能够找到一组不全为零的数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=0 \tag{1}$$

为此将 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 的具体表达式代入(1)得

$$k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}k_1\\4k_2+2k_3\\2k_2+k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

于是由向量相等的定义得

$$\begin{cases}k_1=0\\4k_2+2k_3=0\\2k_2+k_3=0\end{cases}\tag{2}$$

显然，$k_1=0$，$k_2=1$，$k_3=-2$ 是(2)的一组解。从而找到了一组不全为零的数 k_1，k_2，k_3，能使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}$$

因此，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 是线性相关的。

例 1.2 试证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

(即三维基本向量组)是线性无关的。

解：要证 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性无关，只需证明仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，才有

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=0\tag{1}$$

为此将 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的具体表达式代入(1)得

$$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

即 $k_1=k_2=k_3=0$。因此，仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，(1)才成立，从而证明了 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性无关。

用完全同样的方法可以证明 n 维基本向量组是线性无关的。

向量组线性相关和无关的概念总称线性相关性。

根据定义 1.2，可以得到关于向量组线性相关性的几个性质。

性质 1 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性相关，则组中必存在某一个向量(例如 $\boldsymbol{x}_s$，$1\leqslant s\leqslant m$)，它可以用其余向量线性表示，即

$$\boldsymbol{x}_s=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+a_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m$$

(其中，a_1，$\cdots$，a_{s-1}，a_{s+1}，$\cdots$，a_m 都是常数)；反之亦然。

事实上，由于向量组 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性相关，一定可以找到一组不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_m，使得

$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_s\boldsymbol{x}_s+k_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0}$。如果其中的 $k_s\neq0$，则

$$-k_s\boldsymbol{x}_s=k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m$$

或者

$$\boldsymbol{x}_s=\left(-\frac{k_1}{k_s}\right)\boldsymbol{x}_1+\cdots+\left(-\frac{k_{s-1}}{k_s}\right)\boldsymbol{x}_{s-1}+\left(-\frac{k_{s+1}}{k_s}\right)\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_s}\right)\boldsymbol{x}_m$$

记

$$a_i=-\frac{k_i}{k_s},\quad i=1,\ \cdots,\ s-1,\ s+1,\ \cdots,\ m$$

于是有

$$\boldsymbol{x}_s=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+a_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m$$

即 $\boldsymbol{x}_s$ 可以用组中的其余向量线性表示。

反之，设 $\boldsymbol{x}_s$ 可以用组中的其余向量线性表示，即

$$\boldsymbol{x}_s=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+a_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m$$

因此

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}-\boldsymbol{x}_s+a_{s+1}\boldsymbol{x}_{s+1}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0}$$

显然，a_1，$\cdots$，a_{s-1}，-1，$a_{s+1},\cdots,a_m$ 是一组不全为零的数(至少 -1 不为零)，因此向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关。

性质 2 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 中有一部分，例如 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_r(1\leqslant r<m)$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关（即"部分线性相关必然整体线性相关"）。

事实上，因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性相关，因此可以找到一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0}$$

于是 $k_1,k_2,\cdots,k_r,\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m-r\text{ 个}}$ 也是一组不全为零的数，且使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r+0\cdot\boldsymbol{x}_{r+1}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{x}_m=\mathbf{0}$$

所以，向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关。

性质 3 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_m$ 线性无关，则向量组中任一部分线性无关（即"整体线性无关必然部分线性无关"）。

事实上，如果结论不成立，例如 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\ (1\leqslant r<m)$ 线性相关，则由性质 2 知向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 一定线性相关，这与向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_m$ 线性无关的假设矛盾，所以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 一定线性无关。

1.3 向量组的秩

1.2 中性质 2 表明，向量组部分线性相关，必然整体线性相关。但是整体线性相关未必其任何一部分也线性相关，例如线性相关的向量组

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

的一部分 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 恰是线性无关的（读者可自行检验）。因此，需要讨论线性相关向量组中线性无关向量的最大个数。

定义 1.3 向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 中线性无关向量的最大个数称为向量组的秩，简记为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$。特别，当 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=$

$\cdots=\boldsymbol{x}_m=\mathbf{0}$ 时，约定 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=0$。

显然，

$$0\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\leqslant m$$

如果向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 中有 $r(1\leqslant r\leqslant m)$ 个向量线性无关，而任何多于 r 个的向量都线性相关，那么 r 就是这一向量组的线性无关向量的最大个数，因此，由定义 1.3 知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=r$。这实际上给出了计算向量组的秩的一个方法。如本段开头的例子中，向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 的 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 线性无关，而 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性相关，所以

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=2$$

再举一个例子。

例 1.3 试求 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$，其中

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\-10\end{bmatrix}$$

解：可以看到

$$4\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_4=0$$

即 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{x}_4$ 线性相关。但是，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 线性无关。事实上，设

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=0$$

将 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 的具体表达式代入得方程组

$$\begin{cases}k_1\quad+3k_3=0 & (1)\\-k_1+3k_2=0 & (2)\\2k_1+k_2+7k_3=0 & (3)\\2k_2+14k_3=0 & (4)\end{cases}$$

由(4)得 $k_2+7k_3=0$，代入(3)得 $k_1=0$，再代入(1)，(2)得 $k_2=k_3=0$。这就表明 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关.

根据定义 1.3，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)=3$

如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=r$，则由定义 1.3 知，在向量组 $\boldsymbol{x}_1$，

$x_2, \cdots, x_m$ 中，一定有 r 个线性无关的向量，而 $r+1$ 个向量的向量组一定是线性相关，于是其中任一个向量都可以由这 r 个线性无关向量线性表示。这 r 个线性无关向量好象一付“骨架子”，它把整个向量组“支撑”起来了；抓住了这个 r 个线性无关向量，就能把握住整个向量组的线性相关性。所以，向量组的秩是表征向量组线性相关性的一个重要数字指标。

第二节　矩阵及其秩

2.1　矩阵的概念

如果我们把向量组

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}7\\5\\6\\1\end{bmatrix},\quad x_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}$$

合排在一起，就可以得到一个由 12 个数字（分四个横行，三个竖列）组成的阵列：

$$\begin{bmatrix}1&7&0\\3&5&0\\2&6&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

这种数字阵列在通信理论中广泛地应用。

例 2.1　在通信理论中，常要对各种系统进行研究，一个器件中的电子电路就构成一个系统。现在设某个系统的状态可以用电感 L_1, L_3, L_5 上的电流 i_1, i_3, i_5 及电容 C_2, C_4 上的电压 v_2, v_4 表示（其中 L_1, L_3, L_5, c_2, c_4 都是常数）。它们满足如下的微分方程组（设电感之间不存在互感）：