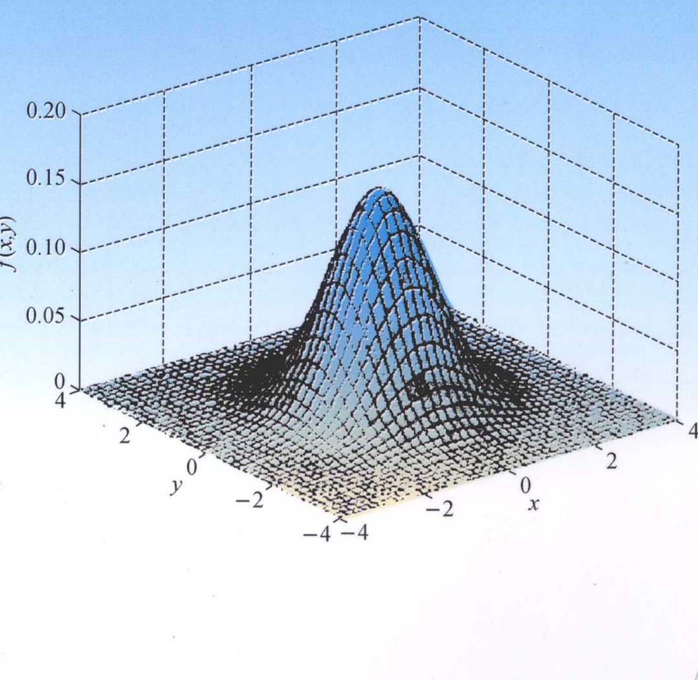
高等院校（非数学类）数学基础课教材

Probability and Mathematical Statistics

概率论与数理统计（第二版）

梁飞豹 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校(非数学类)数学基础课教材

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　梁飞豹

编　著　梁飞豹　刘文丽　薛美玉

　　　　吕书龙　徐荣聪

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/梁飞豹主编. —2 版. —北京：北京大学出版社，2012.7
(高等院校(非数学类)数学基础课教材)
ISBN 978-7-301-20910-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①梁… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 137050 号

书　　　名：概率论与数理统计(第二版)
著作责任者：梁飞豹　主编
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-20910-3/O·0875
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62767347　出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
787mm×980mm　16 开本　18.5 印张　380 千字
2005 年 8 月第 1 版
2012 年 7 月第 2 版　2012 年 7 月第 1 次印刷(总第 10 次印刷)
印　　　数：49501—54501 册
定　　　价：35.00 元

第二版前言

本书第一版自 2005 年 8 月出版以来，被许多高等院校选作教科书，受到广大读者的肯定，已重印 9 次，共发行约 5 万册. 但近年来，高等教育飞速发展为高等学校的教学提出了许多新的课题. 由于高等教育向大众化发展，学生的学习需求趋向于多样化，面对高等教育的发展，我们认为有必要把最近几年我们在教学过程中发现的一些问题进行系统的总结，对原有内容进行进一步凝练、加工和增删. 这就有了再版的想法. 与第一版比较，内容的变动和我们的主要想法如下：

(1) 保持第一版内容简明扼要、注重概念和理论的直观解释、注重方法的应用. 但在第二版中我们进一步注意了学生对于内容及其叙述的可接受性，对部分内容作了增删和修改，使之更为顺畅或简洁，特别是对各章的例题都进行了调整和增删，以提高例题的代表性，加强学生对相关知识应用的掌握.

(2) 我们把原版中第七章"参数估计"和第八章"假设检验"合并成现有的第七章"参数估计与假设检验". 特别是对正态总体参数的区间估计与假设检验问题，我们把它们放在一起，用统一的方法解决，以便于学生理解和记忆. 这部分的处理是第二版的一大特色，也是国内同类教材中首创(如果习惯于原版教材的叙述方式，同样可以分开讲授，并不影响本教材的使用).

(3) 考虑到学生学习需求的多样化，我们对各章的习题进行了分类. 第一类为基本题，包括选择题、填空题和计算题，可作为学生的基本要求. 第二类为提高题，在这部分我们精选了一些典型试题，并给出详细解答. 其编写目的有三：一是作为各章例题的补充；二是丰富各章试题题型，特别是综合题的题型；三是为学生提供课外练习和参考.

(4) 考虑到硕士研究生教育的快速发展以及本科生学习的多层次需要，我们收集了近几年(2008—2012)来硕士研究生招生考试中的概率统计试题，并给出了详细解答，形成了附录三. 它可以作为学生的课外练习，也可以作为考研读者的参考.

同时，第二版也改正了原版中的一些不妥之处，不再一一列举. 在此，还想强调一点，虽然各章习题(特别是提高题)和研究生入学试题都有详细解答，但是希望读者一定要先进行独立的思考，不要过早地翻看解答，这对于学习数学尤其重要.

第二版的更新和写作分工如下：第一章由薛美玉执笔；第二、三章由刘文丽、徐荣聪执笔；第四章由吕书龙执笔；第五、六、七章及附录三由梁飞豹执笔；在集体讨论的基

础上,全书由梁飞豹统稿.

本书得到福州大学教材建设立项支持.北京大学出版社理科部刘勇主任及曾琬婷编辑在编校中付出了辛勤劳动,并提出了许多宝贵的意见.对此,我们一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,本书虽经不断修改,但仍会有不少问题,恳请同行和广大读者批评指正.

编　者

2012年4月于福州大学

第一版前言

本书是在郭福星教授编著的《概率论与数理统计》(福建科学技术出版社)教材的基础上,结合我们近年来在福州大学的教学实践,并参照全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学(一)和数学(三)对概率论和数理统计部分的基本要求编写的,可作为高等学校非数学专业理工、经济、管理等专业的概率论与数理统计课程的教材,也可作为报考硕士研究生人员和实际工作者的参考书.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科,它是现代数学的一个重要分支.随着计算机的发展以及各种统计软件的开发,概率统计在各领域都得到了广泛的应用.正因为如此,概率统计课程成为高等院校各专业最重要的数学必修课之一.但由于这门课程自身的特点,初学者往往对一些重要的概念及思想感到疑惑不解,为此,我们在教材的编写过程中,力求体现以下几个方面:

(1) 简明扼要.注重概念和理论的直观解释,尽量避免纯数学化的论证,但又保持了内容的完整性和严谨性,对基本的概念、定理和公式给出严格、准确、规范的叙述.

(2) 注重概率统计方法及在各个领域的应用.侧重对概率统计方法的介绍,培养学生对基本概念的准确理解及对常用方法的熟练掌握.精选大量概率统计在各个领域中的典型应用案例作为例题和习题,以帮助学生正确理解和应用这些方法.

(3) 紧扣全国硕士研究生入学数学(一)和数学(三)的考试大纲.各章末所配的模拟题是近年来硕士研究生入学考试的典型题型及本课程的考试题型.

(4) 本书习题及模拟题都有参考答案,除了一些基本题外,对较难的习题我们还给出解题思路或提示,便于教学与自学.

讲授本教材的全部内容(除少数带 * 号外)大约需要 54 学时,如果只讲授概率论部分(前 5 章),则只需 36 学时.

本书在编写过程中,得到福州大学数学与计算机科学学院领导的大力帮助,在文字编辑、图表制作、习题选编、文稿审校等方面,郑美莺、吕书龙、游华、朱玉灿、林志兴、黄利文等教师做了大量工作.北京大学出版社为本书出版给予了大力支持,特别是理科部刘勇主任及曾琬婷编辑在编校中付出了辛勤的劳动,并提出了许多宝贵的意见,对此,我们一并表示衷心的感谢!

由于编者的水平所限,书中不当乃至错误之处在所难免,恳请同行和广大读者批评指正.

编　者

2005 年 7 月于福州大学

目　录

第一章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的学科.为了对随机现象的有关问题做出明确的数学阐述,像其他数学分支一样,概率论具有自己的严格概念体系和严密逻辑结构.本章主要介绍概率论的两个基本概念:随机事件及其概率,这些内容是今后各章的重要基础.

§1.1 样本空间与随机事件

为了给随机事件及其概率下一个严格的定义,我们必须首先了解自然界的现象分类.在自然界和人类社会活动中观察到的各种现象可归结为两种类型:一类是在确定的条件满足时,某一确定的结果必然发生的现象,称为**确定性现象**.例如,在一个标准大气压下,水加热到100℃时一定沸腾.这种现象由确定性数学来研究.另一类称为**不确定性现象**.对于不确定性现象,情况比较复杂,我们主要关注其中一种情况,这种现象是事前无法预知哪种结果发生,但可以知道所有可能结果的,称为**偶然现象**或**随机现象**.例如,抛掷一枚质地均匀的硬币,硬币落地后可能是正面(国徽一面)朝上,也可能是反面朝上;从一批产品中任取一件产品,此产品可能为合格品,也可能为不合格品;等等.随机现象是偶然的、随机的,但当重复观察某一随机现象时,随机现象又将体现出某种统计规律性.概率论将以随机现象为研究对象,揭示出它的统计规律性.

一、随机试验

为了研究随机现象内部隐藏的统计规律性,必须对随机现象进行大量的观测或试验,这种观测或试验统称为**随机试验**,简称为**试验**,记为 E 或 E_1, E_2 等.

例 1.1.1 掷一颗正六面体的骰子,观察出现的点数.

例 1.1.2 从日光灯工厂里任取一根灯管,观察它的寿命.

例 1.1.3　一射手打靶,直到射中靶心为止,记录其射击次数.

以上三个例子都是随机试验,它们具有如下特点:

(1) **可重复性**:试验可以在相同条件下重复进行.

(2) **可确定性**:每一次试验,可能出现各种不同的结果,总共有可能出现哪几种结果,是可以事先明确知道的.

(3) **不确定性**:每一次试验,只出现一种结果,至于实际出现哪一种结果,试验之前是无法预先知道的.

以上三个特点是随机试验所具有的共同特点.我们就是通过大量的随机试验去研究随机现象的.

例 1.1.4　将一枚质地均匀的硬币连掷两次,观察出现正、反面的情况.这里把硬币连掷两次作为一次试验,这是一个随机试验,记为 E_1.若用记号 $\omega_{正}$ 表示"出现正面",$\omega_{反}$ 表示"出现反面",则 E_1 共有四种可能的结果:

$$(\omega_{正},\omega_{正}),\quad (\omega_{正},\omega_{反}),\quad (\omega_{反},\omega_{正}),\quad (\omega_{反},\omega_{反}).$$

二、样本空间

在研究随机试验 E 时,首先必须弄清楚这个试验可能出现的所有结果.称每一个可能的结果为**样本点**,一般用小写字母 ω 来表示;全体样本点构成的集合称为**样本空间**,一般用大写字母 Ω 来表示.

在例 1.1.1 中,若样本点简记为

$$\omega_i=\text{“出现 } i \text{ 点”},\quad i=1,2,\cdots,6,$$

则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

在例 1.1.2 中,若用 x 表示"一根灯管的寿命",则 x 可取为一切非负实数,从而样本空间 $\Omega=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$.

在例 1.1.3 中,若用 n 表示"击中目标所需的射击次数",则 n 取正整数 $1,2,\cdots$.若将这些样本点记为 ω_n="直到第 n 次才击中目标"($n=1,2,\cdots$),则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

在例 1.1.4 中,随机试验 E_1 的样本空间为

$$\Omega=\{(\omega_{正},\omega_{正}),(\omega_{正},\omega_{反}),(\omega_{反},\omega_{正}),(\omega_{反},\omega_{反})\}.$$

从上面的例子可以看出,随机试验样本点的总数可以是有限多个,也可以是无限多个.

三、随机事件

在随机试验 E 中,可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**[①],简称**事件**. 一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示随机事件.

每次试验中,一定发生的事情称为**必然事件**,记为 Ω;每次试验中一定不发生的事情称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$. 这两个事情是确定性事件,不是随机事件,但为了方便起见,通常把 Ω 和 $\varnothing$ 都作为随机事件来看待.

对于一个随机试验,它的每一个可能出现的结果(样本点)都是一个事件,这种简单的随机事件称为**基本事件**. 基本事件也可以看做是试验中不能再分解的事件. 由若干个基本事件组成的事件称为**复合事件**(或可再分事件). 不管是基本事件或是复合事件都是随机事件.

按集合论的观点,对于某一随机试验 E,样本空间 Ω 是一集合,随机事件 A 可看做集合 Ω 的一个子集,即 $A\subset\Omega$. 所有随机事件全体称为**事件集**,记为 $\mathscr{L}$,即 $\mathscr{L}=\{A|A\subset\Omega\}$. 显然,$\Omega$(必然事件)$\in\mathscr{L}$,$\varnothing$(不可能事件)$\in\mathscr{L}$.

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子"出现 5 点"是一个随机事件,记为 $A=\{\omega_5\}$,它是一个基本事件;掷一颗骰子"出现偶数点"也是一个随机事件;记为 $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,它是一个复合事件;掷一颗骰子"出现的点数小于 7 点",它是一个必然事件,记为 Ω;掷一颗骰子"出现的点数大于 6 点",它是一个不可能事件,记为$\varnothing$.

四、事件间的关系与运算

事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系与运算同集合之间的关系与运算完全一致.

1. 事件的包含

若事件 A 发生时必导致事件 B 发生,则称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$. 显然,$A\subset B$ 等价于 A 中的每一样本点都包含在 B 中,如图 1-1 所示(像图 1-1,用长方形表示样本空间 Ω,而用长方形内的小圆表示事件的图形称为文氏图).

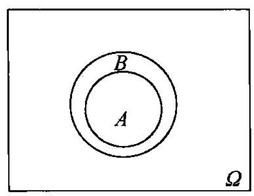


图 1-1

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子"出现 1 点或 5 点"构成的事件为 $A=\{\omega_1,\omega_5\}$,掷一颗骰子"出现奇数点"构成的事件为 $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$,则事件 B 包含事件 A,即 $A\subset B$.

---

① 随机事件也可定义如下:在随机试验 E 的样本空间 Ω 中,由部分样本点组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**. 在每次试验中,当且仅当这一子集中有一个样本点出现时,称这一事件**发生**.

2. 事件的相等

若事件 A 包含事件 B 且事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B **相等或等价**，记为 $A=B$.

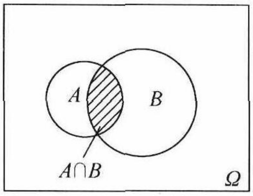


图 1-2

3. 事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积(交)事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 也就是说，$A\cap B$ 是由事件 A 与事件 B 的公共样本点组成的集合(如图 1-2).

在例 1.1.2 中，A 表示抽取一根灯管的寿命不小于 500 h，即 $A=\{x|x\geqslant 500\}$，B 表示抽取一根灯管的寿命不大于 800 h，即 $B=\{x|x\leqslant 800\}$，则 AB 表示抽取一根灯管的寿命为 500 h 到 800 h 之间，即 $AB=\{x|500\leqslant x\leqslant 800\}$.

类似地，任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)事件表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 则表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

显然对任一事件 A 均有下面的性质：

(1) $\Omega A=A$； (2) $AA=A$；

(3) $\varnothing A=\varnothing$； (4) 若 $B\supset A$，则 $AB=A$.

4. 事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 为**互不相容(互斥)事件**. 显然，事件 A 与事件 B 为互不相容事件等价于所有包含在 A 中的样本点与包含在 B 中的样本点全不相同，或 $AB=\varnothing$(如图 1-3).

在例 1.1.1 中，掷一颗骰子“出现 1 点和 5 点”构成的事件 A 与“出现偶数点”构成的事件 B 是互不相容的，即 $A\cap B=\varnothing$.

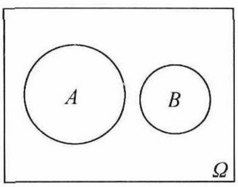


图 1-3

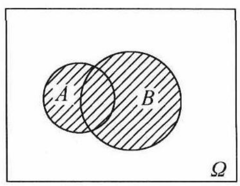


图 1-4

5. 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和(并)事件**，记为 $A\cup B$. 也就是说，$A\cup B$ 是由 A 与 B 中所有样本点组成的集合(如图 1-4).

类似地,任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之中,至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)事件,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,而记号 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$之中至少有一个发生的事件.

特别地,若事件 A 与事件 B 互不相容(即 $AB=\varnothing$),则事件 A 与事件 B 的和事件常常记为 $A+B$.

显然,对任一事件 A 均有下面的性质:

(1) $A\cup A=A$;　　(2) $\Omega\cup A=\Omega$;

(3) $\varnothing\cup A=A$;　　(4) 若 $B\supset A$,则 $A\cup B=B$.

6. 事件的对立

事件 A 不发生的事件,称为事件 A 的**对立事件(或逆事件)**,记为 $\overline{A}$. 也就是说,$\overline{A}$ 是由样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点全体组成的集合(如图 1-5). 显然

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子“出现奇数点”构成的事件 B 和“出现能被 2 整除的点”构成的事件 D 是互为对立事件,即有 $\overline{B}=D$ 及 $\overline{D}=B$,且 $B\cup D=\Omega$,$B\cap D=\varnothing$.

由定义可知:对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

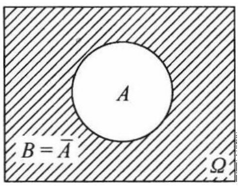


图 1-5

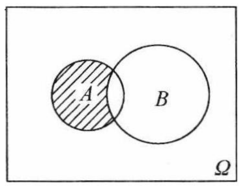


图 1-6

7. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$ 或 $A\overline{B}$. 也就是说,$A-B$ 是由所有包含在事件 A 中而不包含在事件 B 中的样本点全体组成的集合(如图 1-6).

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子“出现不超过 5 点”构成的事件 $F=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ 与“出现偶数点”构成的事件 $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$的差为 $F-B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

在进行事件运算时,一般是先进行逆的运算,再进行交的运算,最后再进行和或差的运算.

事件运算的性质:

(1) **交换律**:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) **对偶原则**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这个原则可推广到任意有限个或可列个事件的情况，即：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

在应用中，应特别注意对偶原则的逆向式子，即 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$.

例 1.1.5 设 A,B 是任意两个随机事件，试化简事件

$$(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B}).$$

解
$$\begin{aligned}&(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})(A\cup B)\\&=(\overline{A}\cup(B\cap\overline{B}))(A\cup(B\cap\overline{B}))\\&=\overline{A}\cap A=\varnothing.\end{aligned}$$

例 1.1.6 某人连续买了 3 期彩票，设 A_i 表示事件“第 i 期中奖”$(i=1,2,3)$，试用 A_i 及对立事件 $\overline{A_i}$ 表示下列事件：

(1) 3 期中至少有 1 期中奖； (2) 3 期都中奖；

(3) 3 期中恰好有 1 期中奖； (4) 3 期都不中奖；

(5) 3 期中最多有 1 期中奖； (6) 前两期中奖，第 3 期未中奖.

解 由题意得：

(1) $A=\{3$ 期中至少有 1 期中奖$\}=A_1\cup A_2\cup A_3$；

(2) $B=\{3$ 期都中奖$\}=A_1A_2A_3$；

(3) $C=\{3$ 期中恰有 1 期中奖$\}=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(4) $D=\{3$ 期都不中奖$\}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$；

(5) $F=\{3$ 期中最多有 1 期中奖$\}=C\cup D$
$=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(6) $G=\{$前两期中奖，第 3 期未中奖$\}=A_1A_2\overline{A}_3$.

随机事件是概率论中最重要、最基本的一个概念，要学会并掌握用概率论语言叙述事件，用符号表示事件；要会用简单的事件表示复杂的事件. 另外，借助直观又简便的文氏图常常可简化事件表达式.

§ 1.2 概率的直观定义

研究随机现象不仅要知道可能发生哪些事件，还要知道各种事件发生的可能性的

大小.我们把衡量事件发生可能性大小的数量指标称为事件发生的概率.事件 A 发生的概率常常用 $P(A)$ 来表示,简称为事件 A 的概率.

为了从数学上对概率这个概念给出严格的定义,也为了更直观地了解概率的内涵,我们首先引入概率的三种直观定义.

一、统计概率

人们在长期的实践中发现,对于随机事件 A,若在 n 次试验中发生了 m 次,则 n 次试验中 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 在 n 较大时就呈现出明显的规律性.

例 1.2.1 历史上有多位著名科学家,曾做过成千上万次的掷硬币试验,并统计了 n 次试验中出现正面(事件 A 发生)的次数 m 及相应的频率 $f_n(A)=\frac{m}{n}$,如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

试验者	掷币次数 n	出现正面次数 m	频率 $f_n(A)$
棣莫弗	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
费　勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1.2.1 中结果可以看出,当试验次数 n 较大时,频率 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 总是围绕在 0.5 附近摆动,此时 0.5 称为稳定值.

这个稳定值说明随机事件 A 发生的可能性大小是客观存在的,是不以人们的意志为转移的客观规律,我们把它称为随机现象的统计规律性.

定义 1.2.1(概率的统计定义) 设在相同条件下重复进行的 n 次试验中,事件 A 发生 m 次,当试验次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 的稳定值 p 称为**事件 A 的概率**,记为 $P(A)$,即

$$p = P(A) \approx f_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

在实际应用中,当重复试验的次数较大时,可用事件的频率作为其概率的近似值.

例 1.2.2 抽查某厂的某一产品 100 件,发现有 5 件不合格品,则出现不合格品(事件 A)的概率为

$$P(A)\approx 5/100=5\%.$$

显然,统计概率具有如下性质:

(1) **非负性**:对任意随机事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) **规范性**:$P(\Omega)=1$;

(3) **有限可加性**:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

二、古典概率

对于某些特殊类型的随机试验,某事件发生的概率可以直接求出.

古典概型随机试验是指具有下列两个特征的随机试验:

(1) **有限性**:试验的所有可能结果为有限个样本点;

(2) **等可能性**:每次试验中各样本点出现的可能性均相同.

古典概型随机试验也叫做**古典概型试验**,简称为**古典概型**.例如,掷一枚质地均匀的硬币,或出现正面或出现反面,只有两种结果,且每种结果出现的可能性相同.又如,掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数,则共有6种结果,且每一种结果出现的可能性相同.这些试验都属于古典概型.

定义 1.2.2(概率的古典定义) 在古典概型试验中,设只有 n 个等可能的基本事件,随机事件 A 包含有 m 个基本事件,则称 $\frac{m}{n}$ 为**事件 A 的概率**,记为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所包含的基本事件数}}{\text{所有可能的基本事件数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.2.2}$$

例 1.2.3 从 $0,1,2,\cdots,9$ 共10个数字中任取1个,假定每个数字都以 $\frac{1}{10}$ 的概率被取中,取后放回,先后取出4个数字,试求下列各事件 A_i 的概率 $P(A_i)(i=1,2,3,4)$:

(1) A_1 表示"4个数字各不相同";

(2) A_2 表示"4个数字组成一个三位数";

(3) A_3 表示"4个数字组成一个四位偶数";

(4) A_4 表示"4个数字恰好有2个0".

解 从 $0,1,2,\cdots,9$ 共10个数字中,有放回地取4次,每取4次为一个基本事件,其所有可能的基本事件数 $n=10^4$.

(1) A_1 所包含的基本事件数为 $m_1=\mathrm{P}_{10}^4=10\times 9\times 8\times 7$,故

$$P(A_1)=\frac{m_1}{n}=\frac{10\times 9\times 8\times 7}{10^4}=0.504.$$

(2) A_2 所包含的基本事件数为 $m_2=1\times 9\times 10\times 10=900$,故

$$P(A_2)=\frac{m_2}{n}=\frac{900}{10^4}=0.09.$$