

工 程 数 学

线性代数·计算方法

程云鹏 聂铁军 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”四个分册之一，本册包括线性代数、计算方法两个部分。线性代数部分介绍行列式、 n 维向量、矩阵及其运算、线性方程组、二次型和矩阵的特征值等基本内容并介绍了线性空间和张量的概念。计算方法部分介绍误差知识、方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与积分、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等内容。书中各部分附有适量习题及习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

工 程 数 学 线性代数·计算方法

程云鹏 聂铁军 编

*
国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*
 $787 \times 1092^{1/32}$ 印张 $14\frac{3}{8}$ 304 千字

1980年8月第一版 1980年8月第一次印刷 印数：00,001—21,000册

统一书号：15034·2052 定价：1.50元

前 言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”四个分册之一。全套教材共八部分，按下列次序分四册出版：矢量分析、复变函数、积分变换；线性代数、计算方法；数学物理方程、特殊函数；概率论与数理统计。

本册包括线性代数和计算方法两部分。线性代数部分着重介绍行列式、 n 维向量、矩阵及其运算、线性方程组、二次型和矩阵的特征值等基本内容，还介绍了线性空间和张量的概念。计算方法部分介绍数值计算的基本概念和基本方法，着重于工程计算中的常用算法，如方程的近似解法、线性代数的计算方法、代数插值、曲线拟合、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍。各部分附有适量习题，书后附习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册线性代数部分由西北工业大学程云鹏编写，由南京航空学院吕炯兴主审；计算方法部分由西北工业大学聂铁军编写，南京航空学院何柏庆主审。西北工业大学张德珍、傅同奇两同志分别为计算方法提供了第一、二章和第五章的初稿。参加本书审稿的还有北京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书

编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编 者

目 录

线 性 代 数

第一章 行列式与 n 阶线性方程组	2
§ 1.1 线性方程组的概念	2
§ 1.2 三阶行列式及其性质	5
(一) 三阶行列式及其展开式 (二) 三阶行列式的性质	
§ 1.3 n 阶行列式	12
(一) 三阶行列式的拉普拉斯 (Laplace) 展开式 (二) n 阶行列式的概念和计算 *(三) 拉普拉斯定理	
§ 1.4 解 n 阶线性方程组的克莱姆法则	26
习 题 一	32
第二章 n 维向量	36
§ 2.1 向量及其基本运算	36
(一) n 维向量的概念 (二) n 维向量的运算	
§ 2.2 向量组的线性相关性	42
(一) 线性相关和线性无关 (二) 线性组合 (三) 线性相关与线性组合的关系 (四) 线性相关性的一些判别法	
* § 2.3 n 维向量空间	47
习 题 二	53
第三章 矩阵	57
§ 3.1 矩阵的概念	57
(一) 实例 (二) 矩阵的定义 (三) 一些特殊的矩阵 (四) 方阵的行列式和非奇异方阵	
§ 3.2 矩阵的秩	65
(一) 矩阵的秩及其求法之一 (二) 矩阵的初等变换和秩的求法之二	
习 题 三	74

第四章 矩阵的运算76

§ 4.1 矩阵的乘法76

(一) 矩阵相等 (二) 矩阵的乘法 (三) 方阵的正整数次幂 (四) 矩阵乘积的转置 (五) 方阵乘积的行列式 (六) 线性变换的矩阵写法

§ 4.2 矩阵的加法和数与矩阵的乘法86

(一) 矩阵的加法 (二) 数与矩阵的乘法 (三) 矩阵的减法

§ 4.3 逆阵及其求法88

(一) 逆阵的概念 (二) 逆阵的求法之一 (三) 逆阵的求法之二 (四) 关于逆阵运算的若干结果 (五) 正交矩阵和正交变换

* § 4.4 分块矩阵及分块求逆105

(一) 分块矩阵的概念 (二) 分块矩阵的运算
(三) 矩阵的分块求逆 (四) 其他类型的分块矩阵

* § 4.5 函数矩阵的微分、积分大意112

(一) 函数矩阵的概念 (二) 函数矩阵的微分法
(三) 函数矩阵的积分

习 题 四115

第五章 线性方程组120

§ 5.1 线性方程组120

(一) 方程组 (1.1.1) 的相容性及其判别法 (二) 相容线性方程组的解法之一——行列式解法 (三) 相容线性方程组的解法之二——消去法 (四) n 阶线性方程组的解法

§ 5.2 齐次线性方程组132

(一) 齐次线性方程组 (1.1.2) 的解法 (二) n 阶齐次线性方程组 (1.1.4) 的解法

§ 5.3 非齐次线性方程组的解的结构138

习 题 五140

第六章 二次型和矩阵的特征值143

§ 6.1 二次型及其矩阵表达式143

(一) 二次型的概念 (二) 二次型的标准形式 (三) 二次型的矩阵表达式

§ 6.2	化二次型为标准形式的拉格朗日方法	148
	(一) 二次型经过线性变换后的矩阵 (二) 二次型在满秩线性变换下的标准形式 (三) 惯性定律	
§ 6.3	有定二次型	161
	(一) 有定二次型的概念 (二) 有定二次型的判别法	
* § 6.4	二次型在正交变换下的标准形式 矩阵的特征值	165
	(一) 相似矩阵的概念与性质 (二) 二次型在正交变换下的标准形式 矩阵的特征值	
* § 6.5	方阵和它的特征多项式的关系	176
	(一) 方阵多项式及其性质 (二) 哈密顿-凯莱定理	
	(三) 哈密顿-凯莱定理的应用举例	
习 题 六		184
* 第七章	线性空间简介	186
§ 7.1	线性空间的概念	186
§ 7.2	线性空间的基、维数和子空间	188
§ 7.3	线性空间的线性变换	203
§ 7.4	爱尔密特矩阵和酉矩阵	211
习 题 七		215
* 第八章	张量概念	220
§ 8.1	和式的简洁记号与应用	220
§ 8.2	张量定义	225
	(一) 逆变张量 (二) 协变张量 (三) 混合张量	
§ 8.3	张量运算	229
	(一) 张量加法 (二) 张量乘法 (三) 张量缩法	
	(四) 矩阵的迹	
习题答案		233

计 算 方 法

第一章	误差知识	240
§ 1.1	绝对误差、有效数字、相对误差	241
§ 1.2	和、差、积、商的误差估计	244

(一) 和、差的误差估计 (二) 积、商的误差估计	
习 题 一	247
第二章 方程的近似解法	248
§ 2.1 对分法	252
§ 2.2 迭代法	254
§ 2.3 牛顿法	259
习 题 二	263
第三章 线性代数计算方法	264
§ 3.1 解线性方程组的精确法	264
(一) 主元素消去法 (二) 无回代过程的主元素消去法	
§ 3.2 主元素消去法的应用	275
(一) 用主元素消去法解线性方程组系 (二) 用主元素消去法求逆矩阵 (三) 用主元素消去法求行列式的值	
§ 3.3 解线性方程组的迭代法	279
(一) 简单迭代法及其收敛条件 (二) 赛德尔迭代法及其收敛条件 (三) 化方程组 $AX = B$ 为便于使用迭代法的形式	
§ 3.4 矩阵特征值的计算方法	293
(一) 求绝对值最大的特征值的幂法 (二) 求解实对称矩阵特征值问题的雅可比方法	
习 题 三	312
第四章 插值法	314
§ 4.1 线性插值与二次插值	316
§ 4.2 均差、均差插值公式	320
(一) 均差的概念 均差表 (二) 均差插值多项式 (三) 插值多项式的余项	
§ 4.3 等距结点插值公式、差分	329
(一) 差分概念与差分表 (二) 差分与均差及导数的关系 (三) 等距结点插值公式	
§ 4.4 拉格朗日插值多项式	335
§ 4.5 三次样条插值	341
(一) 三次样条函数的定义 (二) 系数用节点处的二阶导数表示的三次样条函数 (三) 系数用节点处的一阶导数	

表示的三次样条函数 (四) 解三对角线方程组的追赶法

习 题 四	353
第五章 曲线拟合与最小二乘法	355
§ 5.1 最小二乘法	355
§ 5.2 多项式拟合	359
习 题 五	365
第六章 数值微分与数值积分	366
§ 6.1 数值微分	366
(一) 用插值多项式求数值导数 (二) 用三次样条函数求数值导数	
§ 6.2 数值积分	369
(一) 牛顿-柯特斯公式 (二) 复化求积公式 (三) 求积	
公式的截断误差 (四) 步长的自动选择 (五) 线性加速	
法 龙贝格求积公式 *(六) 高斯求积公式	
习 题 六	396
第七章 常微分方程初值问题的数值解法	397
§ 7.1 欧拉折线法与改进的欧拉方法	397
(一) 欧拉折线法 (二) 改进的欧拉方法	
(三) 公式的截断误差	
§ 7.2 龙格-库塔方法	404
§ 7.3 阿当姆斯方法	409
(一) 阿当姆斯内插公式 (二) 阿当姆斯外插公式 (三) 计算	
中估计误差的一种方法 (四) 求开头三个点的函数值的方法	
习 题 七	416
第八章 偏微分方程的差分解法	417
§ 8.1 椭圆型方程的差分解法介绍	418
(一) 微分方程的差分近似的建立 (二) 边界条件的转换	
(三) 差分方程的解法及解的收敛性讨论	
§ 8.2 用差分法求解热传导方程	431
§ 8.3 波动方程的差分解法介绍	440
习 题 八	445
习题答案	446

线 性 代 数

第一章 行列式与 n 阶线性方程组

本章中，我们先介绍三阶行列式的概念和性质，然后将其推广到 n 阶行列式。在此基础上，初步讨论解 n 阶线性方程组的理论和方法，一般的理论见第五章。

§ 1.1 线性方程组的概念

〔例1〕 某冶炼厂要用四种合金炼成一种新合金，这四种合金含元素甲、乙、丙、丁的比例如下表：

合金 种类 \ 比例 元素	甲	乙	丙	丁
I	1/4	0/4	1/4	2/4
II	0/2	1/2	1/2	0/2
III	1/7	1/7	3/7	2/7
IV	1/8	1/8	3/8	3/8

已知新合金中含元素甲、乙、丙、丁的重量依次为 12 克、11 克、28 克、26 克。问需用原来四种合金各多少克？

设需用原来四种合金依次为 x_1, x_2, x_3, x_4 克，则由题意可得以下四个一次方程式：

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{8}x_4 = 12 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{8}x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{7}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = 28 \\ \frac{2}{4}x_1 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = 26 \end{cases}$$

〔例2〕 在如下的直流电路(图 1-1)中, 直流电源的电动势 $E_1=15$ 伏, $E_2=70$ 伏, $E_3=5$ 伏。各支路的负载(电灯、电炉、电解槽等)电阻 $R_1=6$ 欧, $R_2=5$ 欧, $R_3=10$ 欧, $R_4=2.5$ 欧, $R_5=15$ 欧。求通过各负载的支路电流 I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 各多少安?

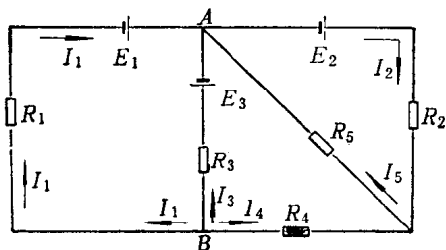


图 1-1

设各支路电流方向如图中箭头所示, 则由克希荷夫定律可得以下五个一次方程式:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_3 + I_4 = 0 \\ -10I_3 + 2.5I_4 + 15I_5 = 5 \\ 6I_1 - 10I_3 = 20 \\ 5I_2 + 15I_5 = 70 \end{cases}$$

其中前两个方程是由节点 A、B 获得; 后三个方程是由三个回路获得。

〔例3〕 在空间 $O-xyz$ 中的直线是由系数不成比例的两个三元一次方程组所决定。在其上求任一点的坐标时, 就

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

在其系数行列式 $D \neq 0$ 时, 其求解公式可用三阶行列式表达如下:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_3}{D} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

也可简记为

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2.2)'$$

在公式 $(1.2.2)'$ 中, $D_j (j = 1, 2, 3)$ 表示把 D 的第 $j (j = 1, 2, 3)$ 列换成式 $(1.2.1)$ 的常数项 $b_i (i = 1,$

2, 3) 而得到的三阶行列式。

必须指出, 当 $D \neq 0$ 时, 公式 (1.2.2) 或 (1.2.2)' 给出 (1.2.1) 的唯一解; 当 $D = 0$ 时, 它是否有解? 留在第五章中讨论。

显见三阶行列式由 3^2 个元素 (这里是数) 所组成。

三阶行列式 D 的值可借助于对角线法则而得到, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.2.3)$$

式 (1.2.3) 叫做三阶行列式 D 的展开式。由此易见, 三阶行列式的展开式共有 $3!$ 项, 而且每一项都是其不同行、不同列三个元素的乘积。

〔例4〕 利用行列式解三阶线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

所以方程组有唯一解。又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

故由公式 (1.2.2) 得方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{3}{4}$$

〔例5〕 k 为何值时, 下面行列式之值为零?

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ k & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ k & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12k - 9k + 1 - 4k + 3k - 9 = 2k - 8$$

欲使其值为零, 必须有

$$2k - 8 = 0, \quad \text{即} \quad k = 4$$

故当 $k = 0$ 时, 行列式的值为零。

(二) 三阶行列式的性质

用公式 (1.2.2) 解三阶线性方程组, 只要算出 D_1, D_2, D_3 以及 D 之值, 再做除法就行了, 确实方便。但是, 用对角线法则计算行列式的值是比较麻烦的。因此, 有必要研究