工　程　数　学

线性代数·计算方法

程云鹏　聂铁军　编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"四个分册之一，本册包括线性代数、计算方法两个部分。线性代数部分介绍行列式、n维向量、矩阵及其运算、线性方程组、二次型和矩阵的特征值等基本内容并介绍了线性空间和张量的概念。计算方法部分介绍误差知识、方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与积分、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等内容。书中各部分附有适量习题及习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

工 程 数 学
线性代数·计算方法
程云鹏　聂铁军　编
*
国防工业出版社 出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
$787\times1092^1/_{32}$　印张 $14^3/_8$　304 千字
1980年8月第一版　1980年8月第一次印刷　印数：00,001—21,000册
统一书号：15034·2052　　定价：1.50元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”四个分册之一。全套教材共八部分，按下列次序分四册出版：矢量分析、复变函数、积分变换；线性代数、计算方法；数学物理方程、特殊函数；概率论与数理统计。

本册包括线性代数和计算方法两部分。线性代数部分着重介绍行列式、n 维向量、矩阵及其运算、线性方程组、二次型和矩阵的特征值等基本内容，还介绍了线性空间和张量的概念。计算方法部分介绍数值计算的基本概念和基本方法，着重于工程计算中的常用算法，如方程的近似解法、线性代数的计算方法、代数插值、曲线拟合、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分解法等。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍。各部分附有适量习题，书后附习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册线性代数部分由西北工业大学程云鹏编写，由南京航空学院吕炯兴主审；计算方法部分由西北工业大学聂铁军编写，南京航空学院何柏庆主审。西北工业大学张德珍、傅同奇两同志分别为计算方法提供了第一、二章和第五章的初稿。参加本书审稿的还有北京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书

编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　　录

线性代数

计 算 方 法

线 性 代 数

第一章　行列式与 n 阶线性方程组

本章中，我们先介绍三阶行列式的概念和性质，然后将其推广到 n 阶行列式。在此基础上，初步讨论解 n 阶线性方程组的理论和方法，一般的理论见第五章。

§1.1　线性方程组的概念

〔**例1**〕　某冶炼厂要用四种合金炼成一种新合金，这四种合金含元素甲、乙、丙、丁的比例如下表：

合金种类 \ 比例 \ 元素	甲	乙	丙	丁
Ⅰ	1/4	0/4	1/4	2/4
Ⅱ	0/2	1/2	1/2	0/2
Ⅲ	1/7	1/7	3/7	2/7
Ⅳ	1/8	1/8	3/8	3/8

已知新合金中含元素甲、乙、丙、丁的重量依次为 12 克、11 克、28 克、26 克。问需用原来四种合金各多少克？

设需用原来四种合金依次为 x_1，x_2，x_3，x_4 克，则由题意可得以下四个一次方程式：

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 \qquad\qquad &+\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{8}x_4=12 \\ \frac{1}{2}x_2&+\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{8}x_4=11 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{7}x_3+\frac{3}{8}x_4=28 \\ \frac{2}{4}x_1 \qquad\quad +\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{8}x_4=26 \end{cases}$$

〔**例2**〕 在如下的直流电路（图 1-1）中，直流电源的电动势 $E_1=15$ 伏，$E_2=70$ 伏，$E_3=5$ 伏。各支路的负载(电灯、电炉、电解槽等）电阻 $R_1=6$ 欧，$R_2=5$ 欧，$R_3=10$ 欧，$R_4=2.5$ 欧，$R_5=15$ 欧。求通过各负载的支路电流 I_1，I_2，I_3，I_4，I_5 各多少安？

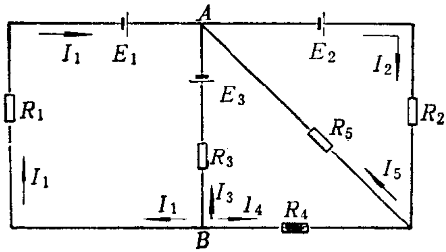

图 1-1

设各支路电流方向如图中箭头所示，则由克希荷夫定律可得以下五个一次方程式：

$$\begin{cases} I_1-I_2+I_3 \qquad\qquad\qquad +I_5=0 \\ I_1 \qquad +I_3 \qquad +I_4 \qquad\quad =0 \\ \qquad\quad -10I_3+2.5I_4+15I_5=5 \\ 6I_1 \quad -10I_3 \qquad\qquad\qquad =20 \\ \quad 5I_2 \qquad\qquad\qquad +15I_5=70 \end{cases}$$

其中前两个方程是由节点 A、B 获得；后三个方程是由三个回路获得。

〔**例3**〕 在空间 $O-xyz$ 中的直线是由系数不成比例的两个三元一次方程组所决定。在其上求任一点的坐标时，就

要解三个未知数两个方程的一次方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

以上三例虽各不同，但其求解方法，均归结到解多个未知数、多个方程的一次方程式组。不仅如此，客观世界很多问题（如网络等）的解决，常常归结到解如下的 n 个未知数、m 个方程的一次方程式组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

或写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

其中 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 表示未知数（量）；a_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)都是常数，称为**系数**；b_i($i=1, 2, \cdots, m$)是**常数项**。

当 b_1, b_2, $\cdots$, b_m 不全为零时，则称（1.1.1）为 **n 元非齐次线性方程组**。当 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

或写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

称式（1.1.2）为 n 元齐次线性方程组。

于是，以上三例（假定例3中的 d_1，d_2 不同时为0）都是非齐次线性方程组。

在（1.1.1）中，当 $m=n$ 时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.1.3}$$

或写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, \ 2, \ \cdots, \ n$$

称式（1.1.3）为 n 阶线性方程组。

当（1.1.3）中 $b_i=0$（$i=1$，2，…，n）时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

或写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \quad i=1, \ 2, \ \cdots, \ n$$

称式（1.1.4）为 n 阶齐次线性方程组。

§1.2 三阶行列式及其性质

（一）三阶行列式及其展开式

大家知道，三阶线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

在其系数行列式$D\neq 0$时，其求解公式可用三阶行列式表达如下：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

也可简记为

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,2,3 \tag{1.2.2$'$}$$

在公式（1.2.2）$'$中，$D_j(j=1,2,3)$表示把D的第$j(j=1,2,3)$列换成式（1.2.1）的常数项$b_i(i=1,$

2，3）而得到的三阶行列式。

必须指出，当$D\neq 0$时，公式（1.2.2）或（1.2.2）$'$给出（1.2.1）的唯一解；当$D=0$时，它是否有解？留在第五章中讨论。

显见三阶行列式由3^2个元素（这里是数）所组成。

三阶行列式D的值可借助于对角线法则而得到，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.2.3}$$

式（1.2.3）叫做三阶行列式D的展开式。由此易见，三阶行列式的展开式共有3!项，而且每一项都是其不同行、不同列三个元素的乘积。

〔**例4**〕 利用行列式解三阶线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

所以方程组有唯一解。又因

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

故由公式（1.2.2）得方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}$$

〔**例5**〕 k 为何值时，下面行列式之值为零？

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ k & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ k & 1 & 3 \end{vmatrix}=12k-9k+1-4k+3k-9=2k-8$$

欲使其值为零，必须有

$$2k-8=0,\quad 即\quad k=4$$

故当 $k=0$ 时，行列式的值为零。

（二）三阶行列式的性质

用公式（1.2.2）解三阶线性方程组，只要算出 D_1, D_2, D_3 以及 D 之值，再做除法就行了，确实方便。但是，用对角线法则计算行列式的值是比较麻烦的。因此，有必要研究