工程数学

积分变换学习指导书

张 卿 范兴业 赵之光 编

一九八四年

工 程 数 学

积分变换学习指导书

张 卿 范兴业 赵之光 编

前　　言

《积分变换》是理工科院校各专业学生继高等数学之后的又一门极为重要的数学基础课。学好《积分变换》不仅可以复习和巩固高等数学的基础知识，而且，又为后继课——《数学物理方法》、《计算方法》、《数字信号处理》以及许多专业课的学习打下良好的理论基础。因此，对这门课程的教学，必须特别重视。所以，我们在具有丰富教学经验的徐贤义等付教授的关怀指导下，编写了这本学习指导书。目的在于给老师提供些教学方法；给学生指导些学习方法。并且，在编写时力求突出以下几个特点：

1）力求比原教材更为深刻地阐述积分变换中的重要概念，再通过大量的典型例题指导读者掌握变换方法。我们不仅论述了积分变换的严密的数学含义，而且全书自始至终都特别紧密地结合地球物理、无线电等各专业知识，突出了积分变换的物理意义及其重要的应用。

2）概念从实际中引出，抽象理论由浅入深，循序渐进。既教给读者分析问题的思路和解决问题的方法，又不失数学的精确性和严密性。

3）每章节开头有学习方法指导，结尾有概括总结，逐节又配有大量的思考题、习题和习题答案。对易于混淆的概念、性质。采用列表的方法进行对比分析。并且，又增加了应用上极为重要的多维富氏变换和拉氏变换、双边拉氏变换以及它们的矢量表示法。δ——函数对研究数学物理方法

是不可缺少的数学工具、除了正文中详细论述外，又增加了δ——函数的一些等价定义及十条重要性质和推论列入附录中。这对读者掌握变换方法和后继课的学习都颇有卑益。

4）在内容取舍上力求在紧扣教学大纲的同时，通俗易懂地概述了积分变换的历史演变、发展趋势和在数学、物理、力学中的某些重要应用，让读者在掌握变换方法的同时，了解该门课程的目的和任务、来龙去脉和在各科技领域中所处的重要地位。开阔视野，增强学习兴趣。

本书由长春地质学院数学教研室陈天与付教授主审，杨天行付教授复审，谢靖付教授也给了热情鼓励，他们都提出了许多宝贵的修改意见，对提高本书的质量起了重要的作用。编者在此一并致谢。

编写过程中，由于时间仓促，水平有限，缺点和错误在所难免，望读者不吝指正。

编　者

1983年11月　于长春，

目　　录

第一章　富里哀变换

由于自然科学和各种工程技术中计算的需要，人们一向注意建立各种运算，同时，又特别注意简化所建立的运算，如在初等数学里，为了简化乘除、乘方和开方运算，而建立了行之有效的对数运算，把乘法和除法这种二级运算以及乘方开方的三级运算，分别转化为较低级的一级和二级运算。在高等数学里积分变换不仅能将分析运算(如微分、积分运算)转化为代数运算，而且，在许多科学技术中有着重要的应用。例如它在物理学、力学、无线电理论以及数字信号处理中，都显示出是一个强有力的工具，学好积分变换必将大有用武之地。

所谓积分变换是起源于十九世纪的运算微积，当时英国的无线电工程师海维赛德（Heavisideo）用它作为求解物理学和电工学中的线性微分方程的一种符号法，后来，符号法演变成今天的积分变换。具体地说，积分变换就是由式子

$$\varphi(x)=\int_{a}^{b} k(x,\ t)f(t)dt \qquad (1.1)$$

所定义的，当给定一个区间$(a,\ b)$(a，b可以分别是$+\infty$，$-\infty$)，与称之为核函数的$k(x,\ t)$ （$a\leqslant t\leqslant b$，x为实变数或复变数）就确定一个称之为初始函数或象原函数$f(t)$到

变换函数或称为象函数$\varphi(x)$的积分变换，当核函数$k(p,t)=e^{-pt}$，$a=0$，$b=\infty$时，即

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

叫做$f(t)$的拉普拉斯（Laplace）变换，简称拉氏变换。其中p是复数。当核函数$k(\omega, t)=e^{-i\omega t}$，$a=-\infty$，$b=+\infty$时，即

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

叫做$f(t)$的富里哀(Fourier)变换，简称富氏变换。

积分变换还包括汉克尔（Hankel，H）变换，梅林（MellinR.H.）变换等，因篇幅所限从略。

本章将从实际需要导出富氏积分，富氏变换，然后，进一步阐述富氏变换的重要性质，最后，将其推广到经常碰到又特别实用的三维富氏变换，以及关于富氏变换的应用举例。

学习本章的要求：

1．深刻理解富氏变换的概念及其实质；

2．熟记富氏变换的公式及其重要性质；

3．能迅速而准确地计算出各种函数的富氏变换；

4．卷积定理既重要又实用，要求理解的透彻，用的灵活；

5．富氏变换与富氏级数有什么异同点？使用富氏变换法的条件是什么？都应该在学习中归纳出来。

§1.1 富里哀积分

本节将讨讨周期函数的富氏级数（复数形式），进而讨论非周期函数的富里哀积分及其收敛定理，然后，给出富里哀积分的其它形式。通过上述讨论诱导出富氏变换公式。

一．富氏级数的复指数形式

在许多理论和实际问题中，经常要用富氏级数的复指数形式，这种形式不仅形状整齐，使用方便，而且，也便于理论本身的进一步引深和推广。

设$f(t)$是以T为周期的周期函数，如果它在区间$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上满足狄利克雷（Dirichlet）条件*）由富

---

*）狄利克雷条件常简称为狄氏条件。即指函数$f(t)$满足

1° $f(t)$在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上连续或者只有有限个第一类间断点；

2° $f(t)$在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上只有有限个极值点；

3° $f(t)$在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$的右端点的左极限$f\left(\frac{T}{2}-0\right)$，以及左端点的右极限$f\left(-\frac{T}{2}+0\right)$都存在。

一般函数都能满足上述三个条件，因此，我们说一个函数展成富氏级数要比展成泰勒级数所需要的条件弱得多。

氏级数理论可知，$f(t)$在$[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$上就可以展成富氏级数，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x)=$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的连续点时} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的间断点时} \\ \dfrac{f(-\frac{T}{2}+0)+f(\frac{T}{2}-0)}{2} & \text{在区间的端点} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中，$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$,

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

为了用上的应方便，由欧拉（Euler）公式

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=-i\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2},$$

则（1.2）式变为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{i\frac{2n\pi t}{T}}+e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}}{2}+b_n(-i)\cdot\frac{e^{i\frac{2n\pi t}{T}}-e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}}{2}\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{2n\pi t}{T}}\right.$$

$$\left.+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\right].$$

若令

$$\omega=\frac{2\pi}{T};\quad c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt,$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt-\right.$$

$$\left.i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[\cos n\omega t - i\sin n\omega t]dt$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt, \quad (n=1,2,3\cdots) \\ &c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega t}dt. \\ &\qquad\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

又设$\omega_n = n\omega$（$n=0$, ±1, ±2, $\cdots$），则周期波 f(t)由(1·2)式变成无穷多个最简单的谐波的离散迭加的形式，即

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{i\omega_n t}+c_{-n}e^{-i\omega_n t}]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \qquad (1.4)$$

(1.4) 式就叫做从f(t)导出的富氏级数的复数形式。c_n称为富氏级数复数形式的富氏系数。(1.3)式既是导出 (1.4) 式的依据，又是具体计算复数形式的富氏系数的积分公式。其中复函数的积分，应该是实部和虚部分别积分。

富氏系数$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$又称为f(t)的离散复振幅，并且，由（1.3）式还可以推导出c_n的一个非常重要的结论：**复振幅谱是实振幅谱的一半**，即若设$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$为实**振幅谱**，则有

$$|c_n| = \left|\frac{a_n - b_n}{2}\right| = \frac{1}{2}|a_n - ib_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^n} = \frac{1}{2}A_n$$

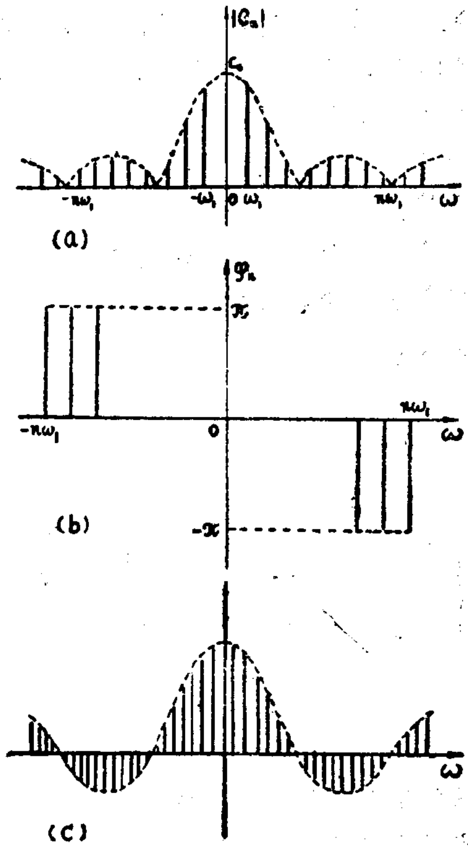

图 1.1

在《高等数学》中学习富氏级数时，我们知道，富氏级数的各分量a_n，b_n及相位φ_n都是$n\omega_1$（即基频的整数倍）的函数，把它们与$n\omega_1$的关系绘成图，称之为频谱图。对富氏级数的复数形式，我们同样可以画出其频谱图，即画出复振幅谱、复相位谱分别对ω的关系图（如图1.1(a)(b)所示).然而，当c_n为实数时，可以用c_n的正、负表示φ_n的0、π，因此，经常是把幅度谱和相位谱合画在一张图上（如图1.1(c)所示). 并且，在（1.4）式中，不仅包括正频率项，而且含有负频率项，因此，这种频谱图相对于纵轴左右是对称的，从而每条谱线$|c_n|$的长度是实振幅谱线长度的一半即把正、负频率上所对应的这两条谱线矢量相加起来，便代表一个分量的幅度。

下面我们举几个例子来说明如何将一个满足狄氏条件的周期函数展成复数形式的富氏级数。

例1. 将方波

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{当}\quad 0\leqslant x<\dfrac{T}{2}\text{时} \\ -1 & \text{当}\quad -\dfrac{T}{2}<x<0\text{时} \end{cases}$$

展成复数形式的富氏级数（图1.2)。

解： 和实数形式的富氏级数的展法类似，只要求出复数