工科研究生试题与解答

材料力学

天大

天津科学技术出版社

前　言

为帮助报考研究生的读者了解近年来各高等院校对材料力学入学考试的要求，也便于兄弟院校之间的交流，我们收集了部分高等院校近三年的材料力学入学试卷，其中1980年及1981年试卷均有详细解答，1982年试题只附答案，可供考生复习时参考。

本书的试卷及解答均由各校命题教师提供，为保持试卷的完整性，原有试题一律不作增减，并注明给分标准。不少试题本来可有多种解法，由于篇幅所限，只给出一种解法。凡工程力学试卷中的理论力学试题，均编入理论力学题解，本书从略。

本书编排以来稿先后为序，为避免重复，凡后面试题与前面相同者均删掉，仅注明参看的题号。

在本书编写过程中，得到天津大学材料力学教研室杨庆龄、蔡天益同志及各院校有关同志的大力支持，在此一并致谢。

限于编者水平，本书可能存在一些不妥之处，恳切希望广大读者批评、指正。

编　者

1982年4月

目　　录

东北工学院

（1980年）

适用专业：采矿，压力加工

一、试用符号（√对、×不对）回答下列问题（30分）注意：答错时，得负分。

（1）图1-1所示方管的截面轴惯性矩

$$J_z=\frac{B^4}{12}-\frac{b^4}{12}$$

（2）图1-1所示方管的抗弯截面模数

$$W_z=\frac{B^3}{6}-\frac{b^3}{6}$$

（3）图1-2所示两单元体的应变能的大小不相等。

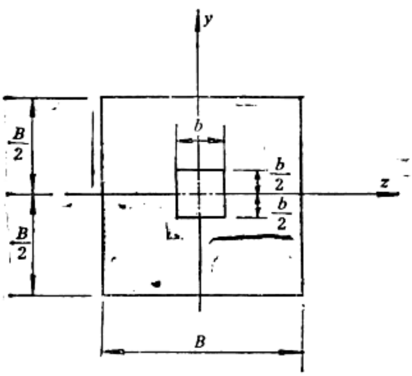


图1-1

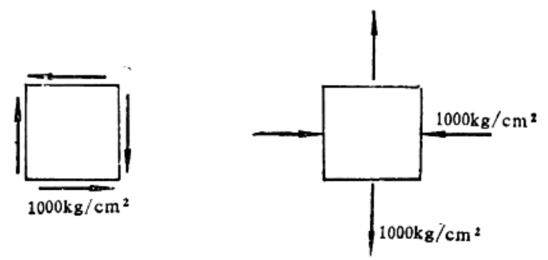


图1-2

（4）Z型截面梁受图1-3所示的外力作用时的弯曲是“平面弯曲”.

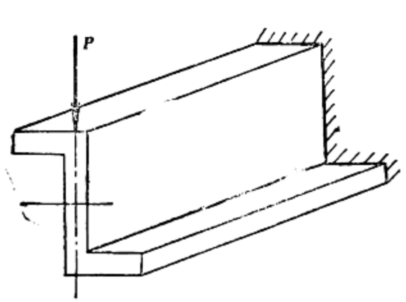


图1-3

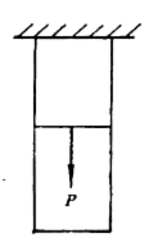


图1-4

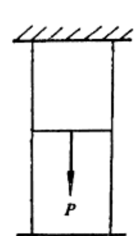


图1-5

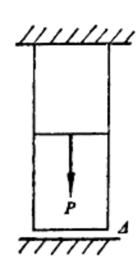


图1-6

（5）图1-4、1-5、1-6所示直杆，中点受轴向缓加力P作用，在弹性范围内，力作用点的位

移为δ.

①图1-4所示情况，力P所作功为$\frac{1}{2}P\delta$;

②图1-5所示情况，力P所作功为$\frac{1}{2}P\delta$;

③图1-6所示情况，力P所作功为$\frac{1}{2}P\delta$（当$\delta > \varDelta$时）.

(6) 从强度出发，截面面积相等的圆形和方形直杆，如图1-7所示.

①在轴向拉伸时，圆和方一样;

②在纯弯曲时，圆比方好;

③在纯扭转时，圆比方好.

解：(1) ✓ (2) × (3) × (4) ×

(5) ①✓②✓③× (6) ①✓②×③✓

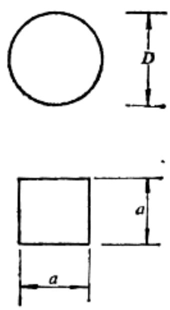


图1-7

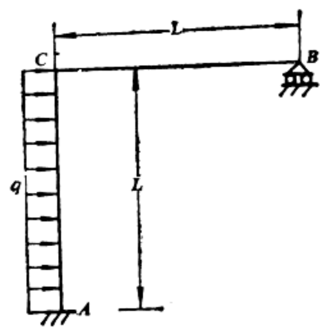


图1-8

二、试作图1-8所示均布载荷q作用下刚架的弯矩图.已知各杆弯曲刚度EJ相等.(25分)

解：此刚架为一次超静定问题．今取基本静定系如图1-9(a)所示，多余反力为R．写出力法方程式

$$\delta_{11}R + \varDelta_{1p} = 0$$

作单位力和载荷弯矩图，如图1-9(b)和1-9(c)所示．计算δ_{11}和$\varDelta_{1P}$

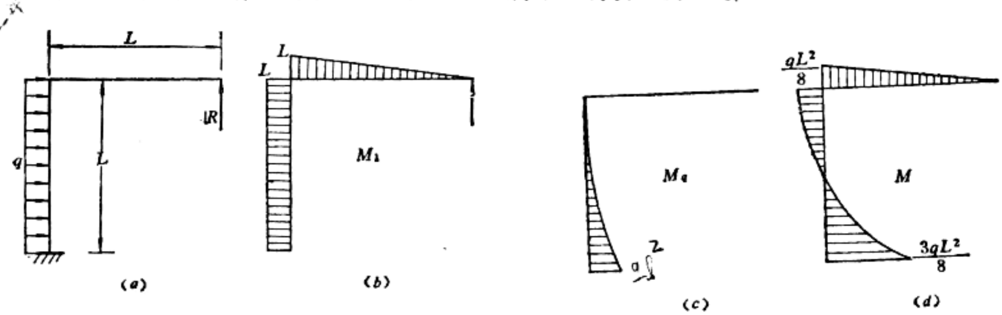


图1-9

$$\delta_{11} = \frac{L^2}{2}\ \frac{2}{3}L\ \frac{1}{EJ} + L^2L\frac{1}{EJ} = \frac{4}{3}\ \frac{L^3}{EJ}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{3}\ \frac{qL^2}{2}L\ L\frac{1}{EJ}=-\frac{qL^4}{6EJ}$$

上式代入力法方程式，得

$$R=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{qL^4}{6EJ}\times\frac{3}{4}\ \frac{EJ}{L^3}=\frac{qL}{8}$$

方向如图1-9(a)所示．

最后作弯矩图，如图1-9(d)所示．

$$M_C=\frac{qL}{8}L=\frac{qL^2}{8}$$

$$M_A=\frac{-qL^2}{2}+\frac{qL^2}{8}=\frac{-3}{8}qL^2$$

三、试校核图1-10所示水平梁AB和螺栓A的强度．A、B、C点均为铰接点．已知$P=5\mathrm{t}$，$L=4\mathrm{m}$，钢梁弯曲许用应力$[\sigma]=1500\mathrm{kg/cm^2}$，螺栓剪切许用应力$[\tau]=800\mathrm{kg/cm^2}$，挤压许用应力$[\sigma_{jy}]=2000\mathrm{kg/cm^2}$．(25分)

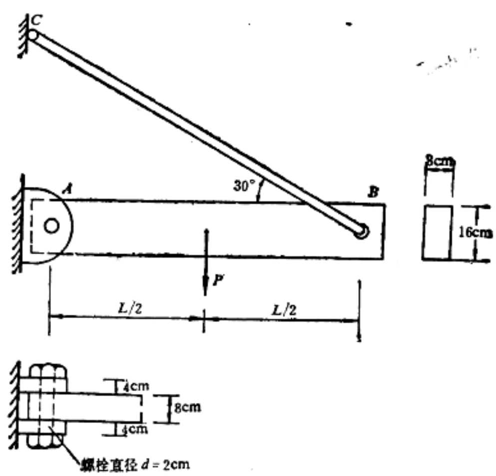


图1-10

解：钢梁的受力图如图1-11(a)所示，并作力的平衡三角形如图1-11(b)．从而得知

$R_A=5\mathrm{t}$ $\qquad T=5\mathrm{t}$

校核钢梁强度，它是弯曲与压缩合成，危险截面在梁中点，危险点是梁的上边缘．

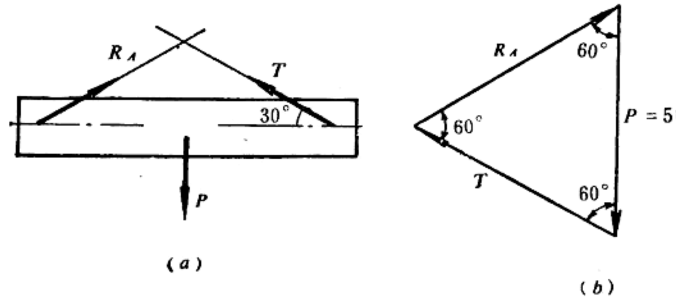


图1-11

$$\sigma_{max}=\frac{N}{F}+\frac{M_{max}}{W}$$

$$=\frac{-5000\cos30^{\circ}}{8\times16}+\frac{-\dfrac{5000\times400}{4}}{\dfrac{8\times16^{2}}{6}}$$

$$=-1500\text{kg/cm}^2=[\sigma]$$

最大应力为压应力，接近许用应力，所以安全.

校核螺栓剪切和挤压强度

$$\tau=\frac{Q}{F}=\frac{5000}{2\times\dfrac{\pi2^{2}}{4}}=796\text{kg/cm}^2<[\tau]$$

$$\sigma_{jy}=\frac{P_{jy}}{F_{jy}}=\frac{5000}{2\times8}=313\text{kg/cm}^2<[\sigma_{jy}]$$

二者都不超过它们的许用应力，所以安全.

四、今用电阻应变仪测得如图1-12所示受扭圆轴表面上一点的任意两个互相成45°方向的应变值为

$$\varepsilon'=3.75\times10^{-4}$$
$$\varepsilon''=5\times10^{-4}$$

如已知$E=2\times10^{6}\text{kg/cm}^2$，$\mu=0.25$，$D=10\text{cm}$，试求扭矩$M_n$.（20分）

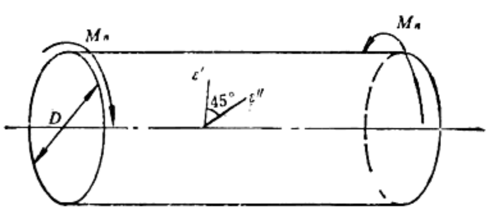


图1-12

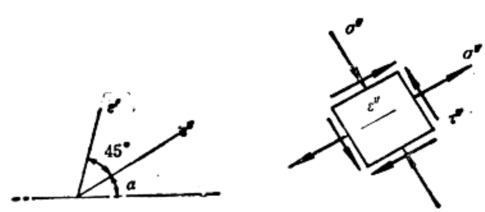


图1-13

解：设产生应变值ε''方向与轴线方向成α角，如图1-13所示.因为圆轴表面上任一点均可取出一个纯剪切单元体，根据纯剪切的特点，单元体任意两垂直面上的正应力数值相等，符号相反，根据广义虎克定律

$$\varepsilon''=\frac{\sigma''}{E}-\mu\frac{(-\sigma'')}{E}=\frac{1+\mu}{E}\sigma''$$

所以 $$\sigma''=\frac{E}{1+\mu}\varepsilon''=\frac{2\times10^{6}}{1+0.25}\times5\times10^{-4}$$

$$=800\text{kg/cm}^2$$

同理 $$\sigma'=\frac{2\times10^{6}}{1+0.25}\times3.75\times10^{-4}$$

$$= 600\text{kg/cm}^2$$

从纯剪切单元体斜截面应力公式可知，横截面上剪应力τ与σ'、σ''的关系，分别为

$$\sigma'' = \tau\sin 2\alpha \tag{1}$$

$$\sigma' = \tau\sin 2(45° + \alpha) = \tau\cos 2\alpha \tag{2}$$

$(1)^2 + (2)^2$得

$$(\sigma'')^2 + (\sigma')^2 = \tau$$

则 $$\tau = \sqrt{(\sigma')^2 + (\sigma'')^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000\text{kg/cm}^2$$

最后应用扭转剪应力公式，得扭矩

$$M_n = \tau W_n = 1000 \times \frac{\pi 10^3}{16} = 1.96 \times 10^5\text{kg}\cdot\text{cm}$$

$$= 1.96\text{t}\cdot\text{m}$$

（1981年）

适用专业：工程力学

一、一刚性板（略去自重）用九条长度、截面积都相等，材料相同，铅直的钢绳，水平地悬挂着（如图 1 -14），当力P分别作用在 1 、2 、3 点时，求在这三种情况下，各杆的内力？（10分）

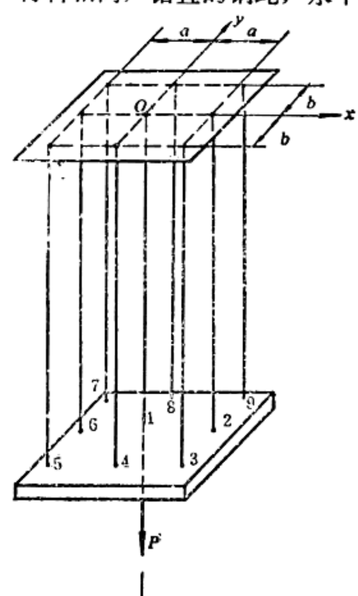


图 1 -14

解：当力作用在1点时，由于结构、载荷对xoz和yoz面都对称，所以刚板均匀下移，各杆变形相等，从已知条件又知各杆抗拉刚度相等．这样，得到各杆内力相等．

即

$$N_1 = N_2 = \cdots\cdots = N_9 = \frac{P}{9}\ （拉力）$$

当力作用在 2 点时，刚体右侧均匀下移，又因为钢绳只能抵抗拉力，根据力的平衡条件，得

$$N_2 = N_3 = N_9 = \frac{P}{3}\ （拉力）$$

其它杆内力为零．

当力作用在 3 点时，只 3 点下移，所以只有$N_3 = P$，其它为零．

二、有一宽度为b，高度为h的矩形截面梁，从梁中切取一宽b，高 $h/4$，长a的正六面体（如图 1 -15阴影部分）．已知梁上表面作用匀布载荷q，梁Ⅰ-Ⅰ截面总剪力$Q_1 = 2qa$，求六面体下表面cd的总剪力S．（15分）

解：设梁的横坐标原点在Ⅰ-Ⅰ截面，则该段梁的剪力方程式为

$$Q = Q_1 - qx = 2qa - qx$$

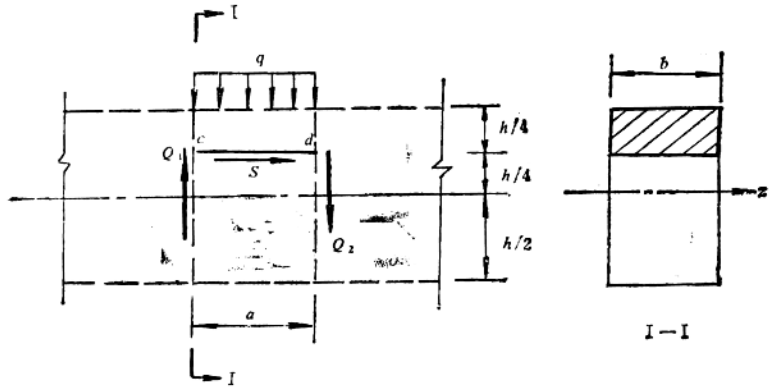


图 1 -15

cd面的水平剪应力方程式为

$$\tau=\frac{QS_z}{bJ}=\frac{(2qa-qx)\frac{bh}{4}\left(\frac{h}{4}+\frac{h}{8}\right)}{b\frac{bh^3}{12}}$$

$$=\frac{9(2qa-qx)}{8bh}$$

所以，cd面的总剪力

$$S=\int_0^a b\frac{9(2qa-qx)}{8bh}dx=\frac{27}{16}\frac{qa^2}{h}$$

三、一截面直径为d，中心线半径为R的圆环，在图 1 -16所示载荷作用下，求圆环截面最大内力（$d<<R$）.（20分）

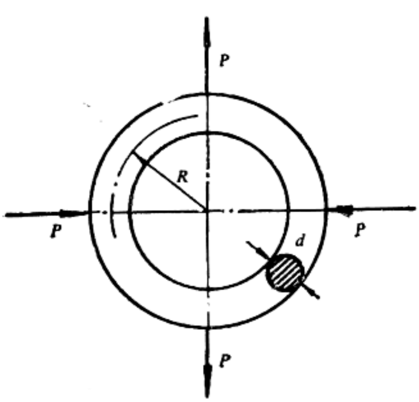


图 1 -16

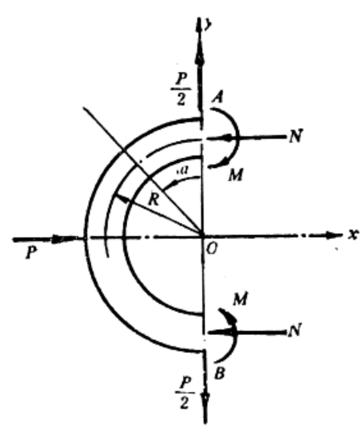


图 1 -17

解：假想沿对称面 oy 切开，则截面两侧的载荷均为$\frac{P}{2}$，如图 1 -17所示.

根据结构和载荷对oy的对称性，可知被切开截面A和B上只作用有轴力和弯矩．再根据对ox的对称性，则截面A和B上的轴力N、弯矩M必相等，方向如图 1-17所示．

从平衡条件

$$\Sigma X=0,\ 得\quad N=\frac{P}{2}\ （压力）$$

但弯矩M仍为未知量，所以它是一次静不定问题．

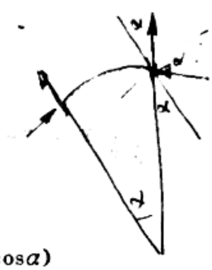
用莫尔法，因对称面均无转角，所以

$$\theta_A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_\alpha M_0}{EJ}Rd\alpha$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[M-\frac{P}{2}R\sin\alpha-NR(1-\cos\alpha)\right]\frac{R}{EJ}d\alpha$$

$$=0$$

将$N=\frac{P}{2}$代入上式，积分后，解之得



$$M=\frac{PR}{2}\ （方向如图 1-17所示）$$

从而得出$\frac{1}{4}$圆环的内力方程式（$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

$$N_\alpha=\frac{P}{2}\sin\alpha-N\cos\alpha=\frac{P}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)$$

$$Q_\alpha=\frac{P}{2}\cos\alpha+N\sin\alpha=\frac{P}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$M_\alpha=M-\frac{PR}{2}\sin\alpha-NR(1-\cos\alpha)$$

$$=\frac{PR}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

对上述内力求极值，得

$$当\alpha=0时，N_{max}=\frac{-P}{2}\ （压力）$$

$$当\alpha=45°时，Q_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$当\alpha=0时，M_{max}=\frac{PR}{2}$$

四、矩形截面梁AB的抗弯刚度EJ，A端固定，B端简支，中点C作用集中力P，如图 1-18所示．问B端抬高$\varDelta$多少，梁的强度利用得最好（材料抗拉，抗压性能相等）．（15分）

解：解除支座B约束，以向上反力R代替，如图 1-19．为了最好地利用梁的强度，应

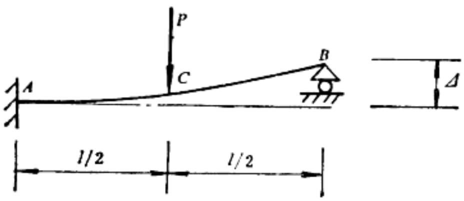


图 1-18

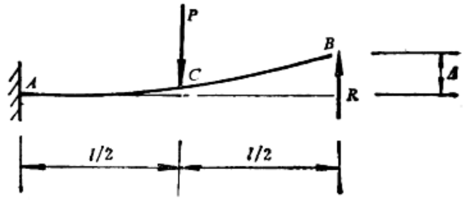


图 1-19

使A、C截面的正负弯矩的数值相等，即

$$\frac{Rl}{2}=\frac{Pl}{2}-Rl$$

所以 $R=\dfrac{P}{3}$（向上）

这样，必须支座B抬高Δ，用迭加法

$$\Delta=\frac{Rl^3}{3EJ}-\left[\frac{P(\frac{l}{2})^3}{3EJ}+\frac{P(\frac{l}{2})^2}{2EJ}\frac{l}{2}\right]$$

将R值代入上式，整理后，得

$$\Delta=\frac{Pl^3}{144EJ}$$

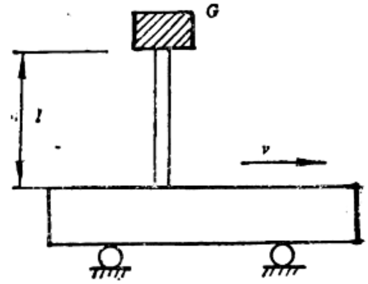


图 1-20

五、一长度为l的直杆（如图 1-20），已知其抗弯刚度EJ，抗弯截面系数W．杆铅直，下端固定在作直线匀速（速度为v）水平运动的小车上，上端有一重物（重量为G），求小车突然停止后，杆的最大应力（略去杆本身质量影响，突停后小车仍保持水平）．（20分）

解：设小车突停后杆端最大位移为δ_d，根据能量守恒定律

重物的动能＝杆的变形位能

即
$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2=\frac{1}{2}G_d\delta_d \tag{1}$$

式中，G_d是发生δ_d时端点的相当集中载荷．对悬臂梁，端点受集中力

$$\delta_d=\frac{G_dl^3}{3EJ} \tag{2}$$

（2）代入（1），整理后得

$$G_d=\sqrt{\frac{3EJG}{l^3g}}v$$

这样，最大动应力

$$\sigma_{d\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{G_dl}{W}=\frac{v}{W}\sqrt{\frac{3EJG}{lg}}$$

六、两根以铰链联结的圆杆AB、AC，长度、弹性模数E、直径D都相等，并作用给定的集中力P，如图 1-21所示．如果BC距离不变，试按稳定条件（设给定条件已满足大柔度压杆），确定使用材料最少的高度h和直径D．（20分）

解：因为结构和载荷都以中央铅直面为对称，所以两杆受力相等，并同时达到失稳状态．此时外载荷

$$P = 2\frac{\pi^2 EJ}{(l^2+h^2)}\ \frac{h}{(l^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\frac{\pi^3 ED^4}{64}\ \frac{h}{(l^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

则 $$D^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{P}}{\pi\sqrt{\pi E}}\ \frac{(l^2+h^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{h}} \qquad (1)$$

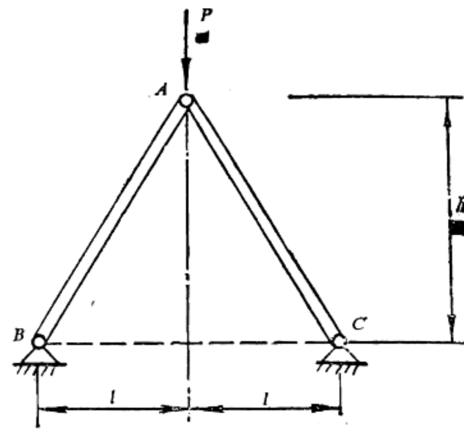


图 1 -21

杆的总体积

$$V = 2\frac{\pi D^2}{4}(l^2+h^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

（1）代入（2），整理后得到总体积V与高度h的关系式

$$V = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi E}}\ \frac{(l^2+h^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{h}}$$

为使用料最少，即总体积最小，应使

$$\frac{dV}{dh} = 2\sqrt{2}\left(\frac{P}{\pi E}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{5}{4}(l^2+h^2)^{\frac{1}{4}}\ 2hh^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(l^2+h^2)^{\frac{5}{4}}h^{-\frac{3}{2}}\right.$$

$$= 0$$

得到 $$h = \frac{l}{2}$$

将h值代入（1），整理后，得

$$D = 1.3\left(\frac{P}{E}\right)^{\frac{1}{4}} l^{\frac{1}{2}}$$

（1981年）

适用专业：采矿，岩破，矿建，金加，提升机械

一、（1）直径为d之实心圆轴，受轴向拉力P，横向力Q及转矩T作用．如图1-22所示．试从第三强度理论的原始条件出发推导出此轴危险点的相当应力σ_{eq3}的最简表达式．（15分）

（2）已知一点的平面应力状态如图1-23所示．证明该点主应力平面位置可由下式确定：

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\tau_x}{\sigma_p - \sigma_y}$$

式中σ_p表示可为σ_{max}，也可为σ_{min}．

如$\sigma_p = \sigma_{max}$时，所求得之α角即为对应σ_{max}主应力之主平面位置．

如$\sigma_p = \sigma_{min}$时，所求得之α角即为对应σ_{min}主应力之主平面位置．

α角由x轴量起，逆时针方向为正，顺时针方向为负．（10分）

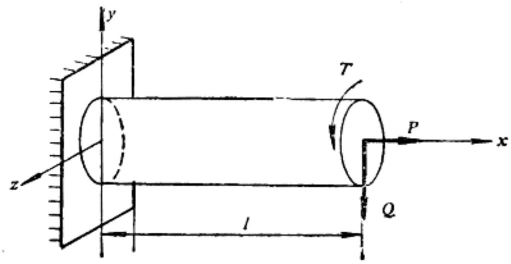


图1-22

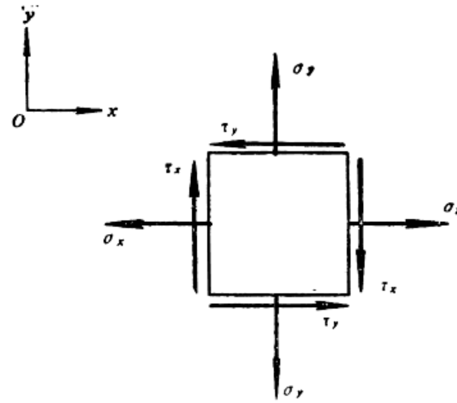


图1-23

解：(1) 此题为拉弯扭组合变形．分析步骤如下：

①作内力图，扭矩、轴力、弯矩各图如图1-24(a)所示．

由弯矩图判断危险截面在固定端．

参考轴力图危险点在最上一点．

②危险点的应力状态如图1-24(b)所示，其中

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Ql}{W_z} \qquad \tau = \frac{T}{W_T}$$

A为圆截面面积，W_z为抗弯截面系数，W_T为抗扭截面系数．

危险点之主应力为

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

③第三强度理论为最大剪应力理论表达式为

$$\tau_{max} \leqslant [\tau]$$

因为 $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ $\qquad [\tau] = \dfrac{[\sigma]}{2}$

所以 $\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]$为第三强度理论表达式．

$$\sigma_{eq3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

置换后即作为最简形式

$$\sigma_{eq3} = \sqrt{\left(\frac{P}{A} + \frac{Ql}{W_z}\right)^2 + \left(\frac{T}{W_z}\right)^2}$$

其中 $\qquad W_T = 2W_z$

(2) 此题用解析法解，如图1-25(a)及(b)．

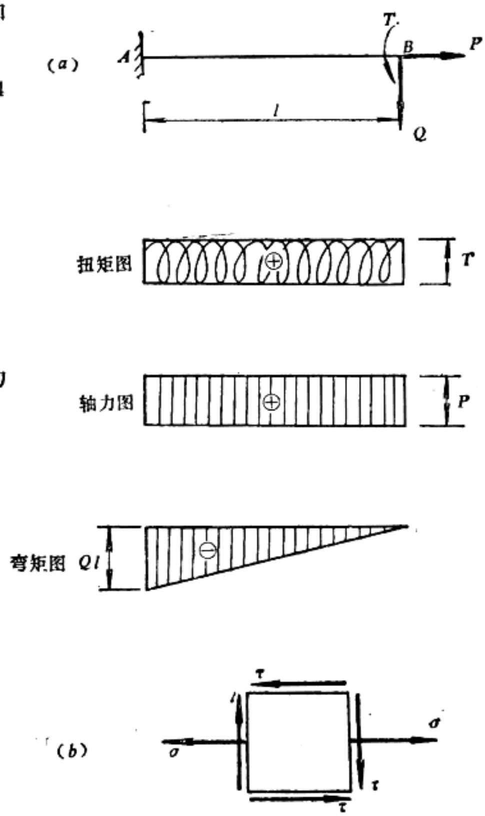
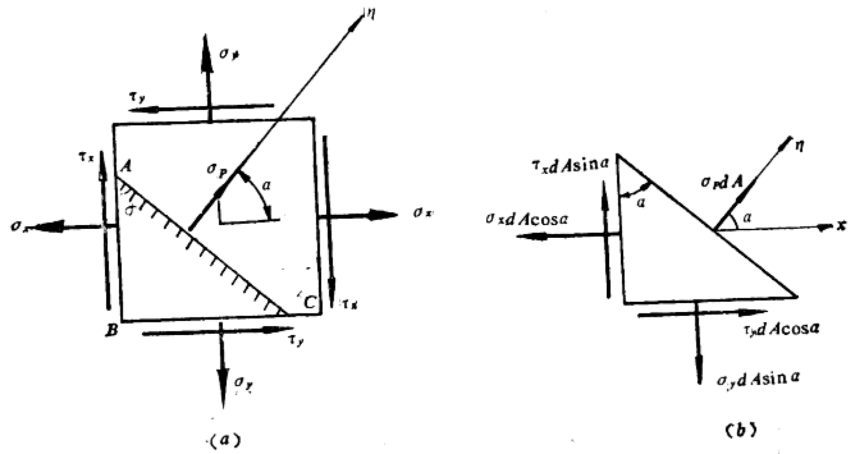


图1-24



(a) (b)

图1-25

图1-25(a)中主平面为AC，外法线n与x轴夹角为α，逆时针方向为正．令主应力为σ_p，σ_p可为σ_{max}亦可为σ_{min}．

取出ABC如图1-25(b)，令AC面之面积为dA，则AB面面积为$dA\cos\alpha$．

BC面面积为$dA\sin\alpha$，其受力平衡图如图1-25(b)，

取 $\sum Y = 0$

$$\sigma_p dA\sin\alpha + \tau_x dA\cos\alpha - \sigma_y dA\sin\alpha = 0$$

简化为

$$(\sigma_p - \sigma_y)\sin\alpha = -\tau_x\cos\alpha$$

所以
$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\tau_x}{\sigma_p - \sigma_y}$$

$\sigma_p = \sigma_{max}$时，α对应最大主应力平面位置；$\sigma_p = \sigma_{min}$时α对应最小主应力平面位置．

具体数值均按代数值．

二、(1) 两端固定等截面的梁，抗弯刚度EI已知，其上作用一力偶M_0如图1-26所示．欲使在A端之端点弯矩$M_A = 0$，求M_0之位置应在梁上何处？(15分)

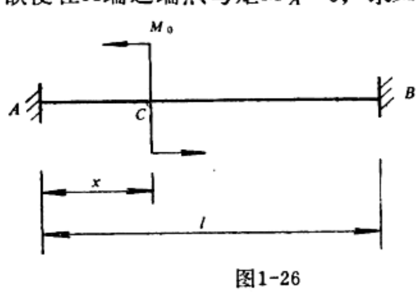


图1-26

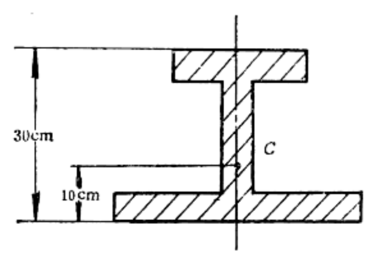


图1-27

(2) 本题(1)部分中，M_0位置x确定后，如令该梁之横截面如图1-27所示，形心及中性轴位置已知．并已知对中性轴之惯性矩$I = 10^4\mathrm{cm}^4$．梁跨度$l = 3\mathrm{m}$，$M_0 = 27\mathrm{kN\cdot m}$，许用拉应力$[\sigma_{拉}] = 40\mathrm{MPa}$，许用压应力$[\sigma_{压}] = 100\mathrm{MPa}$，

试校核强度．(15分)

解：(1) 此题为二次静不定梁.

图1-28(a)为原梁；(b)为静定基；(c)、(d)、(e)分别为载荷及单位力弯矩图. 按力法.

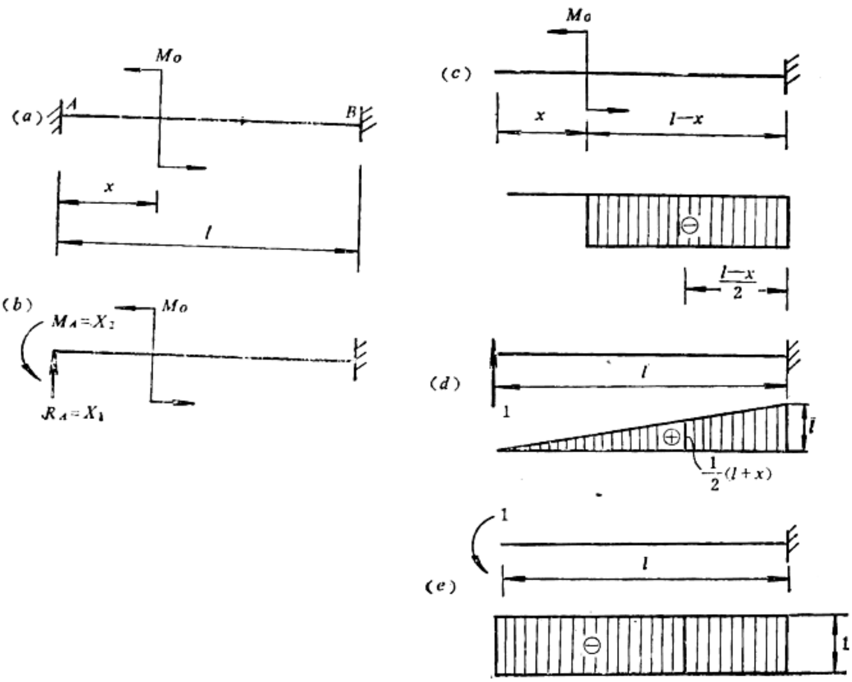


图1-28

$$\varDelta_{1p}=-\frac{1}{2}M_0(l-x)(l+x)\ \frac{1}{EI}$$

$$\varDelta_{2p}=+M_0(l-x)\ \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{11}=+\ \frac{1}{2}l^2\cdot\ \frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{EI}=+\frac{1}{3}l^3\ \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{12}=-\ \frac{1}{2}l^2\cdot\ \frac{1}{EI},\quad \delta_{21}=\delta_{12}$$

因条件为$M_A=0$，δ_{22}不必求，所以

$$\delta_{11}R_A+\delta_{12}M_A+\varDelta_{1p}=0 \tag{1}$$

$$\delta_{21}R_A+\delta_{22}M_A+\varDelta_{2p}=0 \tag{2}$$

将δ_{11}、δ_{12}、$\varDelta_{1p}$、$\varDelta_{2p}$的值代入得

$$\frac{1}{3}l^3R_A=\frac{1}{2}M_0(l-x)(l+x) \tag{1}$$

$$-\frac{1}{2}l^2R_A=-M_0(l-x) \tag{2}$$

(1)÷(2)，并整理