A·加德纳 著

无限过程

——数学分析的背景

姚允龙 杨有锠 蒋伟成 谭永基 等译
周仲良 校

上海第二工业大学

WuXianGuoCheng

无 限 过 程

——数学的分析背景

〔英〕A·加德纳 著

姚允龙 杨有锠
蒋伟成 谭永基 等译

周仲良 校

1984年4月

译 者 的 话

本书作者从一些有趣的初等数学(代数的、几何的)问题出发，说明在数学发展过程中不可避免地要讨论“无限过程”，并且为数学分析的重要概念提供了在初等数学中的背景材料。1982年本书在美国出版后深受欢迎。这类书目前在国内还不多见，无疑，它对广大读者了解、学习和讲授微积分都是一本很好的参考书，因此，我们愿意向广大读者推荐。

本书第I、II部分的翻译工作由姚允龙、谭永基同志主要负责，第III部分由蒋伟成同志主要负责，第IV部分由杨有锠同志主要负责；黄振勋、刘俊杰同志也参加了部分工作。周仲良同志仔细地校对了全书并提出了许多十分宝贵的意见。最后黄午阳同志审阅了全书。限于译者水平，译文中不妥之处在所难免，欢迎同志们批评指正。此外，我们谨向为出版本书而做了大量工作的同志们特致谢意。

一九八四年三月

序　言

正如书名所称，本书原是作为研究“微积分为什么行之有效”这一课题的引言编写的(微积分又称为数学分析)，而在实际上，它是对初等数学中出现的无限过程重新进行深入考察的结果：第II部份重新考察有理数和无理数以及将它们表为无限小数的方法；第III部份考察我们关于长度、面积和体积的概念；第IV部份考察近代函数概念的演变过程。

本书适宜于多种用途：首先，可真正用作分析的一本入门书；其次，可作为分析课的补充教材，用以说明形成基本想法的来源和背景，並提供例题；第三，可当作分析课的后续教材向大学高年级学生讲授，以便通过对初等分析与初等数学之间在数学上和历史上联系的研究，加深学生对这两门课程的理解。本书的内容也可能为许多其它方面的读者感兴趣，其中包括教师、进修生、中学高年级学生和其他数学爱好者。

本书采用的语言和风格都是简单的，这与本书的宗旨是一致的：即说明在与无限过程打交道时为什么要精确，並尽可能清楚地阐明如何才能取得这种精确性。对于一个特定的问题，我们往往会用一章的篇幅寻求其解答。这些问题之所以被选中，不但在于它们本身的重要性，而且也在于设法对它们求解时会产生的一些特殊的思想。我们分析每一个问题，总要着重指出解答中与分析里的一些重要思想有联系的那些特点；但是，我自始至终都在告诫自己不要为这样的看法所左右，即以为只要一古脑儿将许多现成的公式抛给读者，读者就会神速地将这些思

想一下子都接受下来。因此，对于那些今后不准备继续学习分析的读者来说，我希望他们起码能够认识到，在对初等数学中出现的某些无限过程进行分析时必须谨慎；至于那些还要继续学习分析的读者，他们很快就会遇到一些抽象的思维。最后(但不是最不重要)，我希望这两类读者都将乐于学习一些有趣的初等数学。

对于那些对本书第一稿提出过批评的(中学、师范院校和大学)师生，在此我向他们表示衷心的感谢，他们的批评又唤起了我原已冷落的愿望，即尽量把第二稿改好。生活中不时会产生一些美好的事物，它们突然来临，真使人喜出望外。本书的批评者中有一个名叫 Tom Beldon，我与他素昧平生，正是他在《数学教学》(Mathematics Teaching, NO. 86,1979) 上发表的一封见解独到的信件促使我动笔写作；他还经常不断而又耐心细致地向我提出许多深思熟虑的意见，一直鞭策着我努力工作。

对读者的建议

一、关 于 课 文

全书分成四部分，各部份都是很不相同的。

第 I 部份不长，主要是描述性的内容。在这一部份中，我使用了粗略的笔触，为第 II、III、IV 部份中可以看到的剧情勾画出场景。你不应该期望在这一部份中一开始就能把所有的东西都理解，但你可以看到论证的一个梗概，当你研究了第 II、III、IV 部份中的实际数学内容后，你就会更牢固地掌握一些更为重要的细节。也许在你根据需要读了后面几部份中的部份内容后，有必要回过来将第一部份再读一遍。

第 II 部份是全书最长的一部份。它详细地考察了在数的王国里产生的无限过程。第 II 部份开始时还有一点几何的味道，第 II. 1 章就将“数”当作“线段(长度)的比”来考虑。即使你的几何知识不太多也用不到担心：尽量从第 II. 1—II. 4 各章里学一些能够理解的东西就是了，因为我们知道这些思想一直要到第 II.13 章中才能用得到。然后就可开始学习第 II 部份中最最重要的内容，这包含在第 II.5—II.12 章中。在这些处于中心地位的章节里，我们对无限过程进行了分析，这种无限过程隐含在大家熟悉的将有理数和无理数表示为小数的方法中，而课文的大部份篇幅都用于分析具

体的例子。但是，我们在选取並阐述这些具体例子的时候，头脑里总考虑着两件事：第一是要说明对无限过程作仔细而又精确的分析意味着什么；第二是要尽可能清楚地说明我们一般应该怎样做。

第III部份探讨我们大家熟悉的关于长度、面积、体积等几何概念在多大程度上依赖于无限过程。在这里，由于比第II部份内容要丰富得多(事实上，我们考虑的是几何上的数，而不是单纯的数本身)，因此这一部份的讲解就没有第II部份那样来得精确和完整。第III部份的目的是为分析和驾驭我们的几何直觉开个头，以使我们对所研究的问题有一点感受，但不是要完全取代它。

近代数学不象函数研究那样完全是关于数和空间的研究，而要在如本书这样一本基础教材中做到这一点是不切实际的。在第IV部份中，我们将提纲挈领地简要介绍几个根本性问题，这些问题源出于这样的一点，即朴素微积分建立在对无限过程的应用这一基础上，无限过程不但应用于数和几何图形，而且还应用于函数。特别地，我们还要研究函数的精确定义这一极为重要的问题，並仔细考察函数的一些最为常见的例子（如：多项式函数、有理函数、指数函数和对数函数）。

二、关于练习

也许有必要强调指出，练习是课文的不可分割的一部份。积极地解一些习题比消极地阅读课文要花更

多的时间，因而人们总倾向于认为，练习之所以被塞在每章的结尾，是因为它们作为供人选读的附录，是思维迟纯者的拐棍，无事可干者的消遣。再也没有比这更为远离真理的话了。本书大多数练习就是直接从课文中引出的，要求读者联系上下文来理解和求解。例如，在第I.1章中你会读到："…当h很小时，我们並不能保证含有h的各项的无穷和本身仍然会很小（参看练习题1，特别是(iii))"，此时，你必须将书马上翻到第I.1章末尾的题1，检验一下你是否理解此题讲的是什么以及为什么此题与课文中的论述有关系。要是你能够立即将这个习题做出来，那就不要等到将该章全部部读完后再动手。

目　录

第 I 部份

从微积分到分析学

在这一部份中，我们要说明，

• 在 1800 年左右，数学家怎样开始认识到，在朴素的微积分中对无限过程理解和运用得不够精确是产生错误和混乱的根源。

• 朴素的微积分需要用清晰而精确的方法加以改造。

• 人们对一部份数学（如朴素的微积分）的理解需要修正，这是不足为怪的。

• 但是，实际上人们已（在 1870 年左右）用纯粹算术的方法将朴素的微积分改造，这倒是有点令人惊奇的。

微积分的毛病在哪里?

微积分的发明(在1670年左右)以及它在以后两个世纪里的发展、应用和推广,加上对"微积分为什么行之有效"这一问题所作的解释(这事做得迟了些,一直到1870年左右才完成),构成了西欧文化的主要成就之一。

事实上,"Calculus"一词原来是一个一般用语,人们曾用它来描述任一规则和符号的体系,这些体系能有效地把一大类数学问题或逻辑问题的解化为某种常规的计算。这类体系中最有名的就是微积分,但微积分决非第一种这样的体系。例如,许多数值问题能够简单地使用加、减、乘、除四种标准的运算来解决;代数法则使变量和未知数能象数本身那样容易作处理;解析几何提供了一种用初等代数的方法解决许多几何问题的常规方法。但是,不管这些学科价值多大,它们简直都无法和微积分的威力相比拟,微积分有助于求解许许多多各种各样重要的问题。因此,"Calculus"这个词的一般化含义几乎已被人遗忘,这是毫不奇怪的。"Calculus"一语现在一般就只指"微积分"了。

今天,对许多学生来说,微积分是他们遇到的基础数学的顶峰。微积分拓广了他们以前学过的几乎所有的数学课程(特别是代数、三角、图论和解析几何),並为分析一大类颇有兴趣的问题开辟了道路(这种问题涉及到初等几何、微分几何、静力学和动力学、物理学,事实上,在任何一门学科中,如能合理地假设一

个量在不同程度上随着某些其它的量平稳地变化，那末都会碰到这一类问题)。微积分的灵活性和威力使人惊叹不已，它常常使学生们生平第一次领略到数学知识的潜在魅力。

你很可能要问："那末，本章标题又是什么意思呢？你曾答应要向我们解释微积分的毛病在那里，那为什么还要谈论什么微积分具有惊人的灵活性、威力和魅力呢？微积分如有毛病，毛病又在哪里？即使我们认为微积分真有毛病，本书的内容又将如何帮助我们将毛病治好呢？"这些问题应该受到欢迎，尽管它们是无法用几页纸的篇幅得到满意解答的。事实上，本书实质上从头至尾都在研究这样的问题，即我们为什么必须以及怎样才能将精确性引入某些无限过程，而这些无限过程都是直接地和整理微积分的任务有关的。但是，尽管找不到简短的解答可使初学者完全理解，我们在这引论性的一章里仍要说明，数学家怎样逐步地开始明白，人们有必要澄清关于无限过程的直观思想，特别是关于微积分的基本思想。引言的第二章试图说明为什么微积分需要改造一事不应使人奇怪的道理，並说明经过修订的1870年版微积分采用了怎样的形式以及为什么要采用那样的形式。

朴素的微积分缺乏一种极为重要的因素——精确性，它的基本思想完全依赖于关于无限过程和无穷小量的直观概念(如：取极限、计算无穷和)。只要被解决的问题和所用的方法是非常初等的，那末这些直观的概念应当仍是可靠的。但是，人们一旦开始考虑多重的无限过程(如：对包含 h 的无穷和求 h 趋向于零时的极限)，大多数人的直觉就变得很不可靠了。例如，为了求如 x^a 那样一种看起来是很简单的函数[注] 的导数，我们必须

[注] 在第 IV,3 章中我们将看到，这一函数並非象它在表面上看起来的那么简单。

计算含有 $(x+h)^a$ 的一个表达式在 h 趋向于零时的极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^a-x^a}{h}$$

自然地，我们同时还要用二项式定理将 $(x+h)^a$ 展开成包含 h 的一些项之和。但是，如若 a 是不等于正整数和零的任一数，那末二项式定理会把 $(x+h)^a$ 展开成一个无穷和；于是

$$\frac{(x+h)^a-x^a}{h}=ax^{a-1}+\frac{a(a-1)}{2!}x^{a-2}h+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^{a-3}h^2+\cdots$$

因此，我们发现，当 h 趋于零时，必须对包含 h 的项的无穷和求极限。但是，正如我们在讨论无穷和

$$\frac{\sin h}{1}+\frac{\sin 3h}{3}+\frac{\sin 5h}{5}+\frac{\sin 7h}{7}+\cdots$$

时将要看到的那样，当 h 很小时，我们并不能保证含有 h 的各项的无穷和本身仍然会很小（参看练习题 1，特别是 (iii)）。

事实上，人们一开始就认识到，对“微积分为什么行之有效”所作的解释是站不住脚的，并且从严格的数学观点来看，无穷小量和无限过程对直观概念的依赖性是经不起推敲的。莱布尼茨 (1646—1716) 提出，在某种意义上来说，曲线 $y=f(x)$ 的斜率 dy/dx 是真正的“两个无穷小量 dy 和 dx 的商”，其中 dx 是 x 的无穷小变化，dy 是 y 相应的无穷小变化，即

$$dy=f(x+dx)-f(x).$$

然而，莱布尼茨从未解释过无穷小量到底是什么东西；不管它是什么东西，它有时一定会显现出奇特的性质。例如，若 $y=u\cdot v=u(x)\cdot v(x)$，则

$$dy=u(x+dx)\cdot v(x+dx)-u(x)\cdot v(x).$$

但是，关于 x 的无穷小变化不仅导致关于 y 的无穷小变化

dy，而且也会引起关于 u 的无穷小变化 du 及关于 v 的无穷小变化 dv，因此，

$$du=u(x+dx)-u(x),\qquad dv=v(x+dx)-v(x),$$

$$\therefore\qquad dy=d(u\cdot v)=(u+du)(v+dv)-uv$$
$$=u\cdot dv+du\cdot v+du\cdot dv$$

既然莱布尼茨希望我们得到

$$dy=u\cdot dv+v\cdot du$$

那末 $du\cdot dv$ 似乎应该等于零！

牛顿(1642—1727)设法避免使用无穷小，但他本人作出的解释是非常牵强附会的。例如，在《原理》第二册引理Ⅱ中，他在对乘积 $y=u\cdot v$ 求导时，就象变戏法那样地绕开了公开丢弃 $du\cdot dv$ 这一项的困难，这在本质上无异于声称，如果 x 的变化 dx 引起了 u 的变化 du 和 v 的变化 dv，那末相应的 y 的变化 dy 可以给出为

$$dy=\left(u+\frac{1}{2}du\right)\cdot\left(v+\frac{1}{2}dv\right)-\left(u-\frac{1}{2}du\right)\cdot\left(v-\frac{1}{2}dv\right)$$
$$=u\cdot dv+v\cdot du.$$

牛顿试图用各种方法证明他的“微积分”是正确的，但是人们得到的明显印象是，他自己就对任何一种方法都没有真正满意过。

但是，如果这么早就已经认识到通常的解释有缺陷，那末究竟为什么还是花了两百年时间才对“微积分为什么行之有效”这一问题首次作出清楚而不矛盾的解释呢？

首先，起初还明显地没有必要担心会出现这个问题！对于“微积分为什么行之有效”这个问题作出的解释也许不很有力，但是微积分在处理切线、面积、体积、一般曲线的形状、重心、惯矩以及速度、加速度和运动等问题时显然是一种有效的理论，微

积分给这些领域全都带来了成果！

在许多方面，今天的低年级学生也处于十八世纪数学家那样的地位：对朴素的微积分能带来的效益津津乐道，而对它潜在的弱点却几乎一无所知。这正是这些学生难以理解人们为什么还要在分析中设法尽可能小心地重建微积分的原因。“得了，”你可能会说，“不要再讲我们不懂之类的话了，你给我们说几条这种‘潜在的弱点’，我们就肯定能够理解的确需要做一些事了”。

这就把我们引到了我要说明为什么花了这么长时间的第二个理由。对微积分的朴素理解不健全，认识到这一点决非一件茅塞顿开的事。一系列事件迫使数学家们勇敢地面对某些相当微妙然而又是实实在在的困难。因此，我们不应期望能够找到绝妙的初等例子，用它可以一劳永逸地促使初学者信服，我们必须把朴素微积分这座大厦重建在更加牢固的基础上，舍此别无它法。但是，与其将整个问题抛在一旁，还不如举两个例子，说明数学家怎样逐渐认识到朴素微积分严重地缺乏某种极为基本的东西，也就是缺乏精确性。

首先，在缺乏精确性的地方，使用不同的方法处理同一个问题，不同的数学家就会得出不同的解答，这也许是毫不奇怪的事。例如，偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

表示 x，y 平面上在垂直于 x 轴方向上振动的弦的运动方程。达朗贝尔(1717—1783)在1747年、欧拉(1707—1783)在1748年分别求得了这种振动弦运动的解；可是，对于他们得出的明显相似的两个解，两人给出的解释却很不一样。更为重要的是：1753年，D·贝努里(1700—1782)用正弦和余弦的无穷级数的