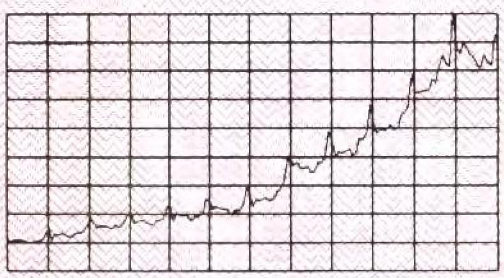
时间序列分析

在经济中的应用

顾 岚 编著



中国统计出版社

内容简介

本书介绍时间序列分析的原理、方法及在经济中的应用．重点介绍时间序列时域和频域分析的基本原理、模型、建模和预报方法．并将详细地讨论其在经济中应用的一些时域模型(如ARIMA 模型、乘积季节模型、组合模型、门限自回归模型、广义线性模型等等）和季节调整方法．本书还简要介绍隐周期的检验和功率谱的估计方法，并探讨多元时间序列的时域模型和二元序列的频谱特性．本书着重于将时间序列的时域及频域分析方法应用于我国经济实践，在各章中均给出应用实例．

本书可作为经济类院校教师、研究生及本科高年级学生的教材和经济工作者的参考书．

时间序列分析在经济中的应用
顾岚　编著
责任编辑：范仲实
*
中国统计出版社出版
(北京三里河月坛南街38号 100826)
北京市怀柔县王史山印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开本　12.625 印张　28 万字
1994 年2 月第1 版　1994 年2 月北京第一次印刷
印数：1－1000 册
定价：12.00 元

前 言

近年来，时间序列分析方法在我国的气象、天文、地质、农林、生物、医学、化工、冶金、机械、经济、管理等部门和领域得到了广泛的应用，特别在经济界，越来越多的实际工作者开始了解并运用时间序列分析方法.

随着改革的深入和经济的飞速发展，我国经济领域中存在着大量数据资料需要进行分析处理，并需要进一步用科学的方法进行预测、决策，因此，时间序列分析方法在经济界的推广普及已是势在必行了.

根据作者近年来在中国人民大学统计系讲授《时间序列分析及其在经济中的应用》课程的体会，经济类专业的研究生和高年级本科学生迫切需要，并完全有能力掌握时间序列分析的有关知识，然而，目前国内缺少面向经济专业的相关教材.

本书系统地介绍时间序列分析的基本原理和方法，并着力论述其在经济中的应用. 第一、第二章介绍时间序列的时域和频域分析的基本原理和模型，这部分内容是本书的基础；第三、第四章是本书的重点，讨论在经济中应用的一些时域模型，并介绍近年来国际上通用的经济序列季节调整方法和有关应用软件；第五章简要地讨论隐周期的检验和功率谱的估计；第六章是对多元时间序列的时域模型和频谱特性作初步探讨.

对于所涉及的一些定理、公式，本书不作严格的数学推导，侧重于解释其背景、直观义意和实现方法，特别着重于将时间序列方法应用于我国经济实践. 在本书各章中都结合具体模型和方法给出在我国经济中的应用实例.

衷心希望本书对于时间序列分析方法在国内经济领域的应用、普及能起到一定的推动作用. 由于作者水平有限，殷切期望广大读者对于本书中的错误缺点和不足之处提出宝贵意见.

作者在此感谢中国人民大学统计学系对于时间分析课程的教学和本书的编写所给予的关怀和支持，并感谢中国统计出版社对本书出版的大力协助.

作者

1993 年12 月

(京)新登字041号

图书在版编目(CIP)数据

时间序列分析在经济中的应用 / 顾岚编著
- 北京: 中国统计出版社出版, 1994, 2
ISBN 7-5037-1476-X

I. 时···
II.
III. ① 时间序列分析- 统计分析(数学)
② 统计分析(数学) - 时间序列分析
③ 经济预测 - 时间序列分析- 中国- 案例
IV. F224.0

目　录

第一章 平稳时间序列及其模型

本章介绍时间序列的基本知识. 首先从平稳概念入手，平稳性是对时间序列进行时域或频域分析的前题条件. 随后引入的是时域的时间序列基本模型，所用的工具是差分方程和相关函数；本章还介绍时间序列在频域的表示，采用的手段是富氏变换和功率谱密度函数. 我们最关心的是如何将时间序列分析应用于经济序列，但是经济序列是相当复杂的，它通常具有明显的趋势性和季节性，显然是不平稳的，具有平稳性质的只是从经济序列中分解出来的循环部分(或称周期部分). 本章的内容虽然不能直接用于经济序列，但是，作为时域和频域的基本知识，以及深入分析研究经济序列的基础，这一章的内容是十分重要的.

§1.1 平稳时间序列

1.1.1 随机过程与时间序列

对实际问题的量测常常是依时间连续变化的随机结果，在数学上是用依赖于时间的随机变量族$\{x(t), t \in T\}$来描述. 一般而言，指标集T取连续变化范围，对每个固定的时刻t, $x(t)$是一个普通的随机变量，对$t \in T$的随机变量全体，就构成一个随机过程. 如当$T = (-\infty, +\infty)$时，随机过程表示成$\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$.

当$T = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$时，$x(t)$是离散值$t$的随机函数，通常称为随机序列，记为$\{x(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 由于指标集常表示时间，所以此类随机序列也称为时间序列. 譬如对一个连续时间的随机过程按照时间的等间隔Δ进行采样，令$x_t = x(t\Delta), t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，得到的$\{x_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$就是一个时间序列.

在进行理论分析时通常考虑随机过程$\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$及时间序列$\{x_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，但是在实际观测时，往往是在有限时间范围内对$x(t)$进行等间隔采样，如$T = (a, b]$，采样间隔为$\Delta$，$x_t = x(a + \Delta t), t = 1, 2, ..., N$，$N = \lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor$($\lfloor \cdot \rfloor$表示取整)，得到的时间序列含有限个随机变量$\{x_t, t = 1, 2, ..., N\}$. 本书讨论时间序

列的统计特性，但是在一些理论分析中也涉及随机过程.

1.1.2 序列的平稳性

简单地说，平稳性就是一个系统达到统计平衡状态，其统计特性不随时间变化. 统计特性是用概率分布来描述的，如果随机序列 $\{x_t\}$ 的任意有穷维分布具有如下性质:

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_1+r,t_2+r,\cdots,t_n+r}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中n, r, t_1, t_2, $\cdots$, t_n 是任意整数，则称$\{x_t\}$ 为完全平稳序列. 换言之，完全平稳序列的概率结构对时间原点的平移保持不变，即 $(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$ 和$(x_{t_1+r},\cdots,x_{t_n+r})$ 具有完全相同的联合概率分布.

完全平稳的条件是苛刻的. 任意有穷维分布族决定了随机序列的全部统计特性，但对于随机序列而言，任意有穷维分布族难以掌握，也不便于分析和使用，因此希望给出不象完全平稳那样强的平稳条件. 若减弱条件，不再要求 $(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$ 和$(x_{t_1+r},\cdots,x_{t_n+r})$ 的分布完全相同，只要求二者分布的主要参数特征相同，譬如，只要求直到某阶的矩函数相同. 这就引出了实际应用中通常使用的m阶平稳性的概念.

若对任何整数$r,t_1,\cdots,t_n$, $\{x_{t_1},\cdots x_{t_n}\}$ 的直到m 阶矩存在，且有下面等式:

$$E\left[x_{t_1}^{m_1}x_{t_2}^{m_2}\cdots x_{t_n}^{m_n}\right]=E\left[x_{t_1+r}^{m_1}x_{t_2+r}^{m_2}\cdots x_{t_n+r}^{m_n}\right]$$

其中$m_1,\cdots,m_n$ 为任意正整数，且$m_1+\cdots+m_n\le m$, 此时称$\{x_t\}$ 为m 阶平稳序列.

实际中最常用的是二阶平稳性. 如果$\{x_t\}$ 是二阶平稳序列，则下面三个条件均需满足:

$i)$ 对任意整数t, 均值恒为常数，即

$$Ex_t=\mu$$

$ii)$ $E\left[x_t^2\right]=\mu_2$, μ_2 是与t 无关常数，且$\mu_2<+\infty$.

$iii)$ 对任意整数t,s, $E\left[x_t\,x_s\right]$ 只是$t-s$ 的函数，称这样的随机序列为宽平稳序列或弱平稳序列，其性质可归结为: 对所有的时间

点，序列具有同样的均值、方差，对任何二时间点s,t之间序列的协方差只取决于时间间隔，而与s,t在时间轴上的位置无关.

如果严平稳序列的二阶矩有穷就一定是宽平稳序列，反之，一个序列是宽平稳的，它不一定满足严平稳条件. 但对于正态随机序列而言严平稳性与宽平稳性是一致的. 这是由于对于正态序列，其联合分布完全由均值和协方差所唯一确定.

在实际中究竟需要多少阶平稳，随机序列所对应系统就接近于稳态？从理论上讲，所给矩的阶数越高，就越能准确地确定分布. 一般认为动态系统应具有二阶平稳性. 在本书中把至少有二阶平稳性的序列称为平稳序列.

§1.2 自协方差函数和自相关函数

由平稳随机序列的定义直接引出两个函数：自协方差函数和自相关函数.

设$\{x_t\}$是实平稳序列(本书只讨论实序列，今后不再申明)，由平稳性可知，对任意整数r

$$Cov\left[x_t, x_{t+r}\right] = E\left[(x_t - \mu)(x_{t+r} - \mu)\right] = R(r) \qquad (1.2.1)$$

$R(r)$只是r的函数，称$R(r)$为序列$\{x_t\}$的协方差函数. 对每个r, $R(r)$反映了序列$\{x_t\}$中相隔时间为r的量之间的关系，称r为“迟后”量.

自相关函数为

$$\rho(r) = R(r)/R(0) \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (1.2.2)$$

由于

$$R(0) = E\left[(x_t - \mu)^2\right] = Var\left[x_t\right] = \sigma^2 \qquad (1.2.3)$$

故

$$\rho(r) = \frac{Cov\left[x_t, x_{t+r}\right]}{\{\left[Var\left[x_t\right] Var\left[x_{t+r}\right]\right]\}^{1/2}}$$

对每个r, $\rho(r)$ 是相隔时间为r 的序列$\{x_t\}$ 中各量的相关函数，它可以作为序列中迟后为r 的量之间"相似"程度的度量.

实平稳序列的自协方差函数有数如下性质:

$i)$ $R(0) \geq 0$.

$ii)$ $R(-r) = R(r)$, 即$R(r)$ 为偶函数.

$iii)$ $|R(r)| \leq R(0)$ 对所有r.

$iv)$ $R(r)$, $r = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$ 是一个非负定数列. 以上性质的证明是容易的，因为

$i)$ $R(0) = E(x_t - \mu)^2 = \sigma^2 \geq 0$

$$ii)\ R(-r) = E[(x_t - \mu)(x_{t-r} - \mu)] = E[(x_{t-r} - \mu)(x_t - \mu)] = R(r)$$

$$iii)\ |R(r)| = |E[(x_{t-r} - \mu)(x_t - \mu)]| \leq \sqrt{E(x_{t-r} - \mu)^2 E(x_t - \mu)^2} = R(0)$$

$iv)$ 所谓非负定性，即对任意正整数m, 实数$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及整数$t_1, t_2, \cdots, t_m$ 有 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R(t_i - t_j)a_i a_j \geq 0$, 由于

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R(t_i - t_j)a_i a_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E[(x_{t_i} - \mu)(x_{t_j} - \mu)]a_i a_j = E\left[\sum_{i=1}^m a_i(x_{t_i} - \mu)\right]^2 \geq 0$$

这正是要证的非负定性.

完全类似，自相关函数具有如下性质:

$i)$ $\rho(0) = 1$.

$ii)$ $\rho(-r) = \rho(r)$ 对所有r.

$iii)$ $\rho(r) \leq 1$.

$iv)$ $\rho(r)$ 是非负定序列.

由以上性质可知，$R(r)$ 和$\rho(r)$ 都是对称于原点，且在原点处具有极大值.

在时间序列分析和建模中常用到序列的协方差阵或相关阵. 定义向量

$$\mathbf{X}_t = (x_t, x_{t-1}, \cdots, x_{t-N+1})'$$

$\boldsymbol{X}_t$ 的协方差阵是

$$\mathbb{R} = E[\boldsymbol{X}_t \boldsymbol{X}_t']$$

在平稳假定之下$\mathbb{R}$ 的展开式为

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(N-1) \\ R(-1) & R(0) & \cdots & R(N-2) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ R(-N+1) & R(-N+2) & \cdots & R(0) \end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$

$\mathbb{R}$ 是$N \times N$ 阶矩阵. 当序列的均值为零时，$\mathbb{R}$ 也就是协方差阵. 不失一般性，可假定序列的均值为零. 下面列出协方差阵的主要性质.

性质 1 平稳时间序列的协方差阵是实对称阵，即

$$\mathbb{R}' = \mathbb{R}$$

该性质由$\mathbb{R}$ 的定义(1.2.4) 式及协方差函数的性质可得到.

性质 2 平稳序列的协方差阵是$Toeplitz$ 阵.

如果一个方阵的主对角线上元素皆相等，且其它任一和主对角线平行的对角线上的元素也相等，则称该阵为$Toeplitz$ 阵. 从$\mathbb{R}$ 的展开式并利用平稳性很容易得到该性质.

性质 3 平稳时间序列的协方差阵是非负定的.

设$\boldsymbol{a}$ 为任一N 元非零向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}' \mathbb{R} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' E[\boldsymbol{X}_t \boldsymbol{X}_t'] a &= E[(\boldsymbol{a}' \boldsymbol{X}_t)(\boldsymbol{X}_t' \boldsymbol{a})] \\ &= E\left[|\boldsymbol{X}_t \boldsymbol{a}|^2\right] \geq 0 \end{aligned}$$

由此得到协方差阵$\mathbb{R}$ 的非负定性.

事实上，对于非零的$\boldsymbol{a}$ 总有$\boldsymbol{a}' \mathbb{R} \boldsymbol{a} > 0$, 即协方差阵总是正定的. 除非构成$\boldsymbol{X}_t$ 的N 个随机变量是线性相关的，这种情形在实际中极少出现. 因此可以认为协方差阵几乎都是正定的，这意味着$\mathbb{R}$ 的行列式大于零，从而协方差阵是非奇异的. 另外，从$R(0) \geq 0$ 可知，$\mathbb{R}$ 主对角线上元素不仅相等而且是非负的.

性质4 如果将平稳序列构成的向量X_t中元素的顺序反过来，则相应的协方差阵与原序列协方差阵相等.

记逆序向量为

$$X_t^B = (x_{t-N+1}, x_{t-N+2}, \cdots, x_t)'$$

计算协方差阵$E[X_t^B(X_t^B)']$，由平稳性容易得到

$$E\left[X_t^B(X_t^B)'\right] = R' = R$$

关于协方差阵的特征值和特征向量的性质，我们不加证明引述如下：

性质5 若协方差阵的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 则这些特征值均为非负.

性质6 若$e_1, e_2, \cdots, e_N$ 是协方差阵R 的不同特征向量，则特征向量$e_1, e_2, \cdots, e_N$ 彼此正交.

性质7 协方差阵的迹等于它的特征值之和，即

$$tr\,[R] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

§1.3 时间序列的时域模型

在平稳时间序列的分析研究中，应用最广泛的是有限参数模型，这是七十年代初活跃并发展起来的参数化方法，其核心是在时域用有限参数模型描述时间序列的相关结构，并通过对模型的统计分析更进一步掌握序列的特性. 本节引入并讨论时间序列的$ARMA$ 模型，有关的基本概念和内容是后面各章的基础.

1.3.1 线性差分方程及随机线性差分方程

在时间序列的时域分析中，线性差分方程是很重要的工具. 本节将简要介绍线性差分方程的一般形式及求解，并稍涉及时间序列模型有关的随机线性差分方程.

(1) 线性差分方程

设$u_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 为实数列，满足如下关系式

$$u_t - \varphi_1 u_{t-1} - \cdots \varphi_p u_{t-p} = h(t) \tag{1.3.1}$$

其中$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ 为实数，$h(t)$ 为t 的已知实函数，则称(1.3.1)式为u_t 所满足的线性差分方程. 这是通常意义下确定性(非随机) 的线性差分方程. 特别，若$h(t)$ 恒为零

$$u_t - \varphi_1 u_{t-1} - \cdots - \varphi_p u_{t-p} = 0 \tag{1.3.2}$$

则称(1.3.2) 式为齐次线性差分方程. 为了简化线性差分方程的表达式及便于计算，引进后移算子B, 其定义为

$$Bu_t = u_{t-1}$$

容易验证算子B 有如下性质:

$i)$ $B^0 \equiv 0$, 称B^0 为恒等算子.

$ii)$ 若c 为一常数，则$B(cu_t) = cBu_t$.

$iii)$ 对任意两个序列u_t 和v_t 有

$$B(u_t \pm v_t) = Bu_t \pm Bv_t$$

$iv)$ $B^n u_t = u_{t-n}$.

$v)$ $(\sum_{k=1}^{n} c_k B_k) u_t = \sum_{k=1}^{n} c_k u_{t-k}$

由上述性质得知，(1.3.1) 和(1.3.2) 式可用后移算子表示为

$$-(\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B_k) u_t = h(t)$$

$$(\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B^k) u_t = 0$$

其中$\varphi_0 = -1$. 为了简便起见，记

$$\Phi(B) = -\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B^k \tag{1.3.3}$$

$\Phi(B)$ 是算子 B 的多项式. 定义方程

$$f(Z)=\sum_{k=0}^{p}\varphi_k Z^{p-k}=0 \tag{1.3.4}$$

为差分方程(1.3.1) 的特征方程. 为了清楚起见，通常在复平面上讨论 $\Phi(B)$ 和 $f(Z)$ 根的分布状况. 为避免混淆，关于 $\Phi(B)$ 及 $f(Z)$ 的复平面分别称为 B 平面及 Z 平面. 由于 $f(Z)$ 与 $\Phi(B)$ 的根是互为倒数的，因此 B 平面与 Z 平面上的点依单位圆互成反演. 例如在 Z 平面上若特征方程 $f(Z)=0$ 的根均在单位圆内(根 $|\lambda_i|<1, i=1,2,\cdots,p$), 则在 B 平面上 $\Phi(B)=0$ 的根就在单位圆外.

首先讨论齐次差分方程(1.3.2) 的求解方法, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为特征方程(1.3.4) 的根，根据根的取值分为以下三种情形加以讨论:

$i)\lambda_1,\lambda_2,\cdot,\lambda_n$ 为不同实根.

这时(1.3.2) 的解为

$$u_t=c_1\lambda_1^t+c_2\lambda_2^t+\cdots+c_p\lambda_p^t \tag{1.3.5}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_p$ 为任意实常数.

事实上，只须将(1.3.5) 式代入(1.3.2) 式左端，利用 $\lambda_k(1\leq k\leq p)$ 是特征方程(1.3.4) 的根，便立刻可以得到验证.

$ii)\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 中有相同的实根(即有重根).

无妨设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_d$, 而 $\lambda_{d+1},\cdots,\lambda_p$ 为两两不相等的实根，则(1.3.2) 的解为

$$u_t=(c_1+c_2t+\cdots+c_dt^{d-1})\lambda_1^t+c_{d+1}\lambda_{d+1}^t+\cdots+c_p\lambda_p^t \tag{1.3.6}$$

其中 $c_1,c_2,\cdot,c_p$ 为任意实常数.

我们对 $p=2$ 的情形进行验证，这时特征方程为

$$Z^2-\varphi_1Z-\varphi_2=0$$

若 $\varphi_2=-(\frac{\varphi_1}{2})^2$, 则有重根为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{\varphi_1}{2}$, 将 $u_t=(c_1+c_2t)\lambda_1^t$ 代入(1.3.2) 的左边(这时 $p=2$), 容易验证它满足齐次差分方程.

$iii)\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 中有复根.

由于差分方程的系数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ 为实数，故复根一定是共轭对出现. 这时方程的解 u_t 必含正弦余弦项.

仍对 $p = 2$ 的情形验证. 此时特征方程的根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2}$$

且 $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0, \lambda_1, \lambda_2$ 是共轭复根，记为

$$\lambda_1 = a + ib = r e^{i\omega} \ , \ \lambda_2 = a - ib = r e^{-i\omega}$$

其中

$$a = \frac{\varphi_1}{2}, \ b = \frac{1}{2}\sqrt{-(\varphi_1^2 + 4\varphi_2)}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{-\varphi_2}, \ cos\omega = \varphi_1/(2\sqrt{-\varphi_2})$$

因此有

$$\begin{aligned} u_t &= c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t = r^t(c_1 e^{it\omega} + c_2 e^{-it\omega}) \\ &= r^t[(c_1 + c_2)cos\,t\omega + i(c_1 - c_2)sin\,t\omega] \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

从前文看到，齐次方程(1.3.2) 的解 u_t 含有 p 个任意常数，因此称其为齐次差分方程的通解，只有利用 p 个初始条件才能将这 p 个任意常数确定，换言之，只有满足 p 个初始条件才能将解唯一确定.

非齐次差分方程通解的一般形式是齐次差分方程(1.3.2) 的通解加上非齐次差分方程(1.3.1) 的特解. 所谓(1.3.1) 的特解是指满足(1.3.1) 的任意一个解(满足(1.3.1) 的解不只一个，找出任何一个即可)

上述结论很容易验证. 设 u_t' 是(1.3.1) 的特解，则有

$$\Phi(B)u_t' = h(t)$$

而u_t是(1.3.1)的通解，有

$$\Phi(B)u_t = h(t)$$

两式相减得

$$\Phi(B)(u_t - u_t') = 0$$

令$u_t'' = u_t - u_t'$，可知u_t''是齐次差分方程的通解. 故非齐次差分方程(1.3.2)的通解u_t为:

$$u_t = u_t' + u_t''$$

这正是非齐次差分方程(1.3.1)的特解与相应齐次差分方程(1.3.2)的通解之和.

(2) 与时间序列模型有关的线性随机差分方程

将(1.3.1)式中的确定性函数$u_t, h(t)$代之以统计特性已知的随机序列，则得到随机线性差分方程. 但时间序列分析并不涉及这样广泛的随机模型，只限于讨论如下情形:

设$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$及$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$为实数，记

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p$$
$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

如果零均值的平稳序列$\{x_t\}$满足如下关系式

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)\epsilon_t\ ,\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.3.8}$$

其中$\{\epsilon_t\}$是白噪声序列

$$E\epsilon_t = 0,\ E\epsilon_t\epsilon_s = \delta_{s,t}\sigma_\epsilon^2 \qquad \left(\ \delta_{s,t} = \begin{cases} 0\ , & \text{当} s \neq t \\ 1\ , & \text{当} s = t \end{cases}\right)$$

白噪声序列在时间序列分析中是十分重要而特殊的序列，在下节中将作专门讨论. (1.3.8)式中的序列$\{x_t\}$, $\{\epsilon_t\}$还应满足当$s > t$时,