高等工业學校教學用書

高等数学教程

第二卷　第二分冊

陈藎民　著

國防工業出版社

高等工业学校教学用書

高等数学教程

第二卷　第二分冊

陈藎民　著

國防工業出版社

本書是为工学院編写的教科書，內容分为四卷：解析几何、数学分析初步、数学分析的进一步发展、补充教材。前三卷是根据高教部教学大綱的要求而編写的，曾在北京工业学院試教过，約需200学时講完。最后一卷是为了某些专业的需要而編写的，內容包括：复变函数、拉氏变换、矢量分析、概率与誤差等，約需60学时講完。

書中特別注意难点的处理与基本概念的闡述。对于难点的处理，除用深入分析的方法外，也用分散难点的方法来減輕困难的程度。对于基本概念是按历史的发展或具体的分析与綜合来叙述的。并且通过概念的闡述来进行政治思想的教育。

高等数学教程

第二卷　第二分册

陈藎民 著

*

國防工業出版社 出版

北京市書刊出版业营业許可証出字第074号

北京新中印刷厂印刷　新华書店发行

*

850×1168耗1/32・6 3/8印張・167,000字

一九五八年二月第一版

一九五八年二月北京第一次印刷

印数：1—4760册　定价：（10）1.10元

第二卷

数学分析初步

第二分册 目次

第三编 一元函数积分学

第十五章 不定积分

第十六章 定积分

第十七章 初等函数积分法討論 复数

第十八章 积分的应用

第四編　微分方程

第十九章　微分方程的产生与一般概念

第二十章　微分方程的解法

第三編　一元函数积分学

积分学的基本任务要解决两类問題：（一）求原函数問題，（二）求和的极限問題。

由于前一問題而引出不定积分的概念，由于后一問題而引出定积分的概念。不定积分与定积分也象导数与微分似的，在概念及应用上虽然不相同，但在运算方面又有紧密的联系。研究原函数的求法以及原函数性質的理論与应用的科学叫做积分学。积分学与微分学构成了数学分析的基层部分，我們对于这个基层部分应該建筑得巩固（掌握理論、熟練运算），否則，以后要繼續前进就很困难。

本編分为四章：（一）不定积分；（二）定积分；（三）初等函数积分法討論；（四）积分的应用。

第十五章　不定积分

在自然科学与技术科学中，不仅需要求已知函数的导函数（这在导数一章中已經講过），也需要反过来，从已知导函数求原来的函数。譬如在力学中，研究質点在直綫上的运动，就有两个相反的問題，要求数学来解决：

（一）已知質点在直綫上运动的路程s与时間t的函数关系为

$$s=F(t),$$

求質点在任何时刻的瞬时速度 v。 这个問題， 从数学的观点来講，就是求 s 对于 t 的导函数，

即　　$$v=\frac{ds}{dt}=F'(t)=f(t)。$$

（二）已知質点在直綫上运动的速度 v 与时間 t 的函数关系为

$$v=\frac{ds}{dt}=f(t),$$

求質点运动的路程 s 与时間 t 的函数关系。这个問題从数学的观点来講，就是求 $f(t)$ 的原函数問題，也是本章要研究的不定积分問題。

本章分为两节：（一）不定积分的定义与求法；（二）积分常量。

第一节 不定积分的定义与求法

§15.1 原函数的概念

（一）原函数的定义 如果 $F'(x)=f(x)$，或 $dF(x)=f(x)dx$，我們就說 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。

例如：

$$(1)\begin{cases}(x^4+3)'=4x^3\\(x^4-14)'=4x^3\\(x^4+7)'=4x^3\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}(\sin x-6)'=\cos x\\(\sin x+9)'=\cos x\\(\sin x-11)'=\cos x\end{cases}$$

其中 x^4+3, x^4-14 及 x^4+7 等都是 $4x^3$ 的原函数。又 $\sin x-6$，…等都是 $\cos x$ 的原函数。

（二）原函数的特性 从上面（1）及（2）可以看出：一个已給的函数，可以有无限多个原函数，其中任意两个只差一个常数項。現在我們要問，任何函数的原函数都是这样么？下面的定理就要回答这个問題。

定理 函数 $f(x)$ 如果有原函数，它就有无限多个原函数，并且其中任意两个的差是常量。

証明： 設 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，本定

理要証明两点：（1）$f(x)$的原函数有无限的多；（2）其中任意两个的差是常量。

（1）的証明：假設C是任意常量，于是，因为$(F(x)+C)'=F'(x)$，所以$F(x)+C$是$f(x)$的原函数。但C是任意常量，它可以取无限多的值，因此，$f(x)$也有无限多个原函数。

（2）的証明：設$F_1(x)$及$F_2(x)$都是$f(x)$的原函数，即$F_1'(x)=f(x)$，$F_2'(x)=f(x)$。

現在把这两式相减，得$F_1'(x)-F_2'(x)=0$，即$(F_1(x)-F_2(x))'=0$由§14.3定理（2），得

$$F_1(x)-F_2(x)=C,\qquad C\text{ 为常量，}$$

这就是函数$f(x)$的任意两个原函数的差是常量。

推論　如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那末，$F(x)+C$就是$f(x)$的全部原函数。

（三）**原函数的图形**　設$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$y=F(x)$的图形为AB（图 15·1-1）。

于是，$y=F(x)+C$的图形，就是AB沿y軸平移一段距离等于C时的AB。所以$f(x)$的全部原函数的图形是一族的曲綫。它們在横坐标相同之点的切綫都互相平行，因此全部原函数的图形是一个平行曲綫族。

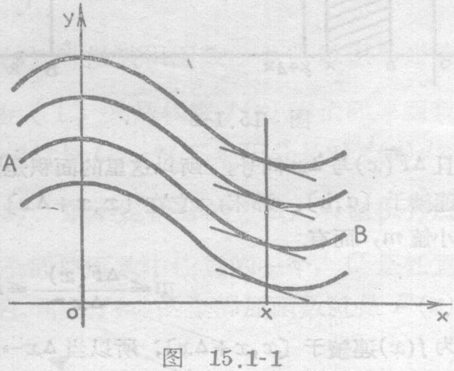

图　15.1-1

原函数的存在問題　根据上面的定理，可知一个已給函数，如果有一个原函数，就有无限多个原函数。但我們要問：一个已給函数是不是一定有一个原函数呢？关于这个問題，歌西曾首先

証明連續函数一定有原函数。現在把歌西的定理写在下面，并且用几何方法来証明。至于分析的証明，須在定积分中講(§16·6)。数学家对于这种直观的几何証法，自从数学分析建立后，曾有一个很长的时期認为滿意。后来因为有人証明連續函数不是都可以用图形来表达❶，才覺得依靠直观的几何証法不够严密，而重視分析的証法。

歌西定理 函数 $f(x)$ 如果連續于 $[a,b]$，它就有以 $[a,b]$ 为定义域的原函数。

証明: 分为两步来进行:

1) 設 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 內是正数，它的連續图形是 AB (图15.1-2)。現在要証明面积 $ABba$ (以后簡称 AB 下的面积) 就是 $f(x)$ 的原函数。

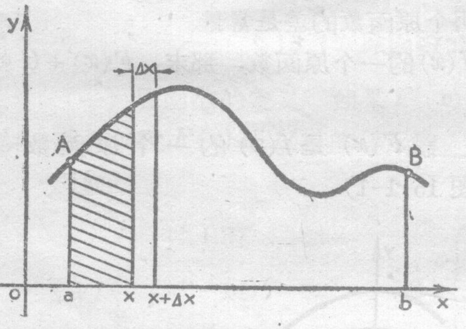

图 15.1-2

假設 a 点的縱坐标 Aa 是固定不动的，b 点的縱坐标 Bb 可以在 $[a,b]$ 区間內平移运动。于是 AB 下的面积就是 Bb 位置的函数，或 x 的函数。現在命这个函数为 $F(x)$。当 Bb 在 x 点取得增量 Δx 时，$F(x)$ 也得到增量

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)$$

并且 $\Delta F(x)$ 与 Δx 同号，所以这里的面积是随 x 的增大而增大。$f(x)$ 既然連續于 $[a,b]$，那末，它在 $[x,x+\Delta x]$ 区間內就一定有最大值 M 与最小值 m，而有

$$m\leqq\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\leqq M,$$

因为 $f(x)$ 連續于 $[x,x+\Delta x]$，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，M 及 m 就同趋于 $f(x)$，由极限存在准則(§10·9)即得，

❶ 參考 Goursat: *Cours d'analyse mathe'matique* 第五版 n°7, n°3 及 n°68 原函数。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x)，即 F'(x)=f(x)。$$

这就証明了連續函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 以〔a,b〕为定义域。

2）假設 $f(x)$ 在〔a, b〕內不是恒为正数，我們就可以找出一数 k，使 $f(x)$ 在〔a,b〕內恒有　$f(x)>k$，　因而 $f(x)-k>0$。

由1）的証明，可知 $f(x)-k$ 有原函数 $G(x)$，

即
$$G'(x)=f(x)-k。$$

現在只要命 $F(x)=G(x)+kx$，即得

$$F'(x)=G'(x)+k=f(x),$$

所以 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 以〔a,b〕为定义域。　〔証毕〕

注意： 由这个定理的証明中，可知曲綫 $y=f(x)$ 下的面积的导数就是 $y=f(x)$，而微分就是 $f(x)dx$ 或 ydx。

§15.2　不定积分　基本积分表一

定义　函数 $f(x)$ 如果有原函数，它的全部原函数，叫做[1] $f(x)dx$ 的不定积分（或簡称积分），

記为
$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

$\int$ 叫做积分記号，$f(x)$ 叫做被积函数，x 叫做积分变量，$f(x)dx$ 叫做被积式。因为（1）式是代表 $f(x)$ 的全部原函数，所以不需要在它的后面再加常量 C；又不定积分是对 $f(x)dx$ 講的，所以不可以写为 $\int f(x)$. 求不定积分的方法，叫做积分法。

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的全部原函数中任意的一个，C 是任意常量，那末，由上一目的推論，可知 $f(x)$ 的全部原函数就是 $F(x)+C$，即

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

[1] 也叫做 $f(x)$ 的积分，但不是积分原来的意义。

其中的 C，叫做**积分常量**。

$f(x)$ 的原函数的图形，叫做函数 $f(x)$ 的**积分曲綫**。所以全部积分曲綫是一个平行曲綫族（§15·1）。

根据定义，可知不定积分 $\int f(x)\,dx$ 是以 $f(x)\,dx$ 为微分的函数，或以 $f(x)$ 为导数的函数，因此，得：

1）[1]

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \text{ 或 } \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x);$$

2）

$$\int df(x) = f(x) + C,$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \text{ 或 } \int \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(x) + C。$$

又因此，得出下面的基本积分表。要檢驗表中的公式是否正确，只須看公式右端的导数或微分是否等于左端的被积函数或被积式就可以断定。这种証明应該由学者自己来做，或由教师用問答方式来做，所以这里不再一一叙述，但对于公式（6）需要說明如下：

当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x}$ 的原函数是 $ln\, x$，$\therefore \int \frac{dx}{x} = ln\, x + C$；

当 $x<0$ 时，命 $z=-x$，得 $z>0$，$dz=-dx$ 及 $\frac{dz}{z}=\frac{-dx}{-x}=\frac{dx}{x}$，

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z} = ln\, z + C。$$

由此可知，只要 $x \neq 0$，就有 $\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + C$。

---

[1] 1）及 2）都是說明微分記号与积分記号相遇，就互相抵消，也說明微分法与积分法互为反运算。但是，先微分后积分时，应該在抵消后加积分常量。

基本积分表一

（1） $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ （k 为常量）

（2） $\int dx = x + C$

（3） $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$， （$n \neq -1$）

（4） $\int e^x dx = e^x + C$

（5） $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{ln\,a} + C$， （$a \neq 1$的正数）

（6） $\int \dfrac{1}{x}dx = ln\,|x| + C$， （$x \neq 0$）

（7） $\int cos\,x dx = sin\,x + C$

（8） $\int sin\,x dx = -cos\,x + C$

（9） $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C$

（10） $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctg\,x + C$

（11） $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arc\,tg\,\dfrac{x}{a} + C$

（12） $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\,sin\,\dfrac{x}{a} + C$

（13） $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$

（14） $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$

（15） $\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$

例 1　求$\int(4x^3+3x-5)\,dx$。

解: 应用公式（15），（1），（2），（3），即得

$$\int(4x^3+3x-5)\,dx=\int 4x^3\,dx+\int 3x\,dx-\int 5\,dx=$$

$$=4\int x^3dx+3\int x\,dx-5\int dx=x^4+\frac{3x^2}{2}-5x+C。$$

其中每一項的积分虽然都应当有一个积分常量，但是这里不需要在每項之后各加一个积分常量。因为任意常量之和还是任意常量，所以这里只把它們的和 C 写在末尾。以后仿此。

例 2　求 $\int(3x^2+1)^2dx.$

解:

$$\int(3x^2+1)^2\,dx=\int(9x^4+6x^2+1)\,dx=$$

$$=\frac{9}{5}x^5+2x^3+x+C.$$

例 3　$$\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$$

例 4　$$\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$$

例 5　$$\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx=\int\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\,dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int dx-$$

$$-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}-\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

§15.3　积分形式的不变性

下面的定理是説明积分变量无論是自变量，或是中間变量，

而积分公式的形式不变，这一特性叫做积分形式的不变性。

定理 如果 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

就有 $\int f(u)\,du = F(u) + C$, 其中 $u = \varphi(x)$ 是 x 的可微函数。

証明： 題設 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $\therefore F'(x) = f(x)$，現在对 $F(u) = F[\varphi(x)]$ 进行微分，并应用微分形式的不变性，即得
$dF(u) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = F'(u)\,du = f(u)\,du$,

$$\therefore \int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u) + C。$$ 〔証毕〕

由这个定理，可知基本积分表中的 x 可以看作是自变量，也可以看作是函数（x 的可微函数）。因此，就大大地扩充了基本积分表的应用范圍。現在举例說明这种不变性的应用如下：

例 1 求 $\int \frac{(ln\,x)^2}{x}\,dx$, $x \neq 0$。

解： $\because$ $\int \frac{(ln\,x)^2}{x}\,dx = \int \left(ln\,x\right)^2 d(ln\,x)$, $x \neq 0$, 而 $ln\,x$ 是可微函数，所以根据上面定理及积分表中公式（3），即得

$$\int \frac{(ln\,x)^2}{x}\,dx = \int (ln\,x)^2\,d\,(ln\,x) = \frac{(ln\,x)^3}{3} + C.$$

例 2 $\int cos\,3x\,dx = \int cos\,3x\,d\,\frac{3x}{3} = \frac{1}{3}\int cos\,3x\,d(3x)$,

由公式（7），得 $\int cos\,3x\,dx = \frac{1}{3} sin\,3x + C$.

例 3 $\int (3x+5)^{50}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+5)^{50}\,d(3x+5)$,

由公式（3）得，$\int (3x+5)^{50}\,dx = \frac{1}{3\times 51}(3x+5)^{51} + C$.

例 4　$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx=\frac{1}{3}\int(x^3-2)^{\frac{1}{2}}d(x^3-2)$,

由公式（3）得，$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx=\frac{2}{9}(x^3-2)^{\frac{3}{2}}+C$。

例 5　$$\int\frac{3x\,dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{3}{2}\int(x^2+1)^{-3}d(x^2+1),$$

由公式（3）得，$\int\frac{3x\,dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{3}{4}(x^2+1)^{-2}+C$

$$=-\frac{3}{4(x^2+1)^2}+C。$$

例 6　$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=ln\,|f(x)|+C。$$

这就是說，在被积函数中，如果分母的导数或微分等于分子，这个积分就等于分母的自然对数再加积分常量。譬如：

1）$$\int tg\,x\,dx=\int\frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx=-\int\frac{-sin\,x}{cos\,x}dx=$$

$$=-ln\,|cos\,x|+C;$$

2）$$\int c\,tg\,xdx=\int\frac{cos\,x}{sin\,x}dx=ln\,|sin\,x|+C;$$

3）$$\int\frac{xd\,x}{x^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+3}=\frac{1}{2}ln\,|x^2+3|+C。$$

例 7　$$\int\frac{dx}{sin\,x\,cos\,x}=\int\frac{\frac{1}{cos^2x}}{tg\,x}dx=ln\,|tg\,x|+C。$$

由此又可得

$$\int\frac{dx}{sin\,x}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\frac{x}{2}\;cos\frac{x}{2}}=ln\left|\,tg\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C。$$

例 8 求 $\int\sin x\cos x\,dx$。

解: 这个积分可以有几个不同的解法，即:

1）$\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x d(\sin x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+C;$

2）$\int\sin x\cos x\,dx=-\int\cos x\,d(\cos x)=$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C;$$

3）$\int\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C。$

这个积分在表面上虽然有三个不同的答案，但是实际上，其中任一个都包括在其它任一个中。譬如 3）就是 1），因为

$$-\frac{1}{4}\cos 2x+C=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}+C_1=$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)+C_1=\frac{1}{2}\sin^2 x+C_1,$$

其中 C_1 仍旧是任意常量，所以 3）和 1）相同。但是如果要証明这三个答案都是正确的答案，就不必把它們化为相同的形式。只要看这三个答案的导数，是否都和被积函数相同。如果相同，就可以断定它們都是所求的原函数❶。

---

❶ 初学的人，每每因演算結果与已給的答案不同，或与他人的演算結果不同，就認为自已的演算有錯誤而花了許多时間去研究錯誤的原因，这是浪費时間的。