

高等工业學校教學用書

高等数学教程

第二卷 第二分冊

陈蓋民 著



國防工業出版社

高等工业学校教学用书

高等数学教程

第二卷 第二分册

陈 盖 民 著

国防工业出版社

本書是为工学院編写的教科書，内容分为四卷：解析几何、数学分析初步、数学分析的进一步发展、补充教材。前三卷是根据高教部教学大綱的要求而編写的，曾在北京工业学院試教过，約需200学时講完。最后一卷是为了某些专业的需要而編写的，内容包括：复变函数、拉氏变换、矢量分析、概率与誤差等，約需60学时講完。

書中特別注意难点的处理与基本概念的闡述。对于难点的处理，除用深入分析的方法外，也用分散难点的方法来減輕困难的程度。对于基本概念是按历史的发展或具体的分析与綜合来叙述的。并且通过概念的闡述来进行政治思想的教育。

高等数学教程

第二卷 第二分册

陈嘉民 著

国防工业出版社 出版

北京市書刊出版业营业許可証出字第074号

北京新中印刷厂印刷 新华書店发行

850×1168耗 $1/32$ ·6 $3/8$ 印張·167,000字

一九五八年二月第一版

一九五八年二月北京第一次印刷

印数：1—4760册 定价：(10) 1.10元

第二卷

数学分析初步

第二分册 目次

第三編 一元函数积分学

第十五章 不定积分

第一节 不定积分的定义与求法	2
§ 15.1 原函数的概念	2
§ 15.2 不定积分 基本积分表一	5
§ 15.3 积分形式的不变性	8
§ 15.4 积分的基本方法 基本积分表二	12
第二节 积分常量	24
§ 15.5 由初始条件决定积分常量 微分方程	24
§ 15.6 积分常量的几何意义	26
§ 15.7 积分常量的物理意义	27

第十六章 定积分

第一节 定积分的概念与基本性质	30
§ 16.1 由于求面积而引起求和的极限	30
§ 16.2 求和的极限法不限于求面积	35
§ 16.3 定积分为和的极限 存在定理	36
§ 16.4 定积分的几何意义	38
§ 16.5 定积分的简单性质	40
§ 16.6 定积分与不定积分的关系	46
第二节 定积分算法	51
§ 16.7 引言	51

§ 16.8 定积分的换元法则	51
§ 16.9 分部积分法则	54

第十七章 初等函数积分法讨论 复数

第一节 复数	58
§ 17.1 复数的运算法则及几何意义	58
§ 17.2 复数的表达式与欧拉公式	60
§ 17.3 复数在代数方程中的应用	62
§ 17.4 分式的部分分式	61
第二节 积得出的函数的主要类型	39
§ 17.5 引言	69
§ 17.6 有理函数积分法	39
§ 17.7 无理函数积分法	77
§ 17.8 三角函数及其它超越函数的积分法	84
第三节 近似积分法	89
§ 17.9 引言	89
§ 17.10 数值积分法	90
§ 17.11 图解积分法	97

第十八章 积分的应用

第一节 几何学上的应用	98
§ 18.1 应用积分解题的观点与方法	98
§ 18.2 平面图形的面积	100
§ 18.3 平面曲线的弧长	104
§ 18.4 利用平行截面面积计算体积法	108
§ 18.5 回轉面的面积	111
第二节 物理学上的应用	115
§ 18.6 杜阿迈定理	115
§ 18.7 連續函数的算术中值	116
§ 18.8 曲线重心与古尔琴第一定理	120
§ 18.9 曲边梯形重心与古尔琴第二定理	124
§ 18.10 液体的静压力	128

第四編 微分方程

第十九章 微分方程的产生与一般概念

§ 19.1 微分方程的解与阶	129
§ 19.2 由原函数产生微分方程 通解 特解	131
§ 19.3 由于求未知函数而产生微分方程	135

第二十章 微分方程的解法

第一节 一阶微分方程	142
§ 20.1 变量可分离的方程	142
§ 20.2 齐次方程及可化为齐次的方程	144
§ 20.3 全微分方程 积分因子	148
§ 20.4 綫性方程与班奴里方程	151
§ 20.5 軌綫問題	155
第二节 高阶綫性微分方程	158
§ 20.6 綫性微分方程的分类	158
§ 20.7 齐次方程积分法的基本定理	159
§ 20.8 常系数齐次方程积分法	163
§ 20.9 非齐次方程积分法的基本定理	170
§ 20.10 常系数非齐次方程积分法	171
§ 20.11 欧拉方程	184
第三节 可降阶微分方程	185
§ 20.12 缺因变量方程	185
§ 20.13 缺自变量方程	187
§ 20.14 齐次方程	191
第四节 綫性微分方程組	192
§ 20.15 引言	192
§ 20.16 常系数綫性微分方程組解法	193
§ 20.17 彈道問題	198

第三編 一元函数积分学

积分学的基本任务要解决两类問題：（一）求原函数問題，（二）求和的极限問題。

由于前一問題而引出不定积分的概念，由于后一問題而引出定积分的概念。不定积分与定积分也象导数与微分似的，在概念及应用上虽然不相同，但在运算方面又有紧密的联系。研究原函数的求法以及原函数性質的理論与应用的科学叫做积分学。积分学与微分学构成了数学分析的基层部分，我們对于这个基层部分应该建筑得巩固（掌握理論、熟練运算），否則，以后要繼續前进就很困难。

本編分为四章：（一）不定积分；（二）定积分；（三）初等函数积分法討論；（四）积分的应用。

第十五章 不定积分

在自然科学与技术科学中，不仅需要求已知函数的导函数（这在导数一章中已經講过），也需要反过来，从已知导函数求原来的函数。譬如在力学中，研究質点在直綫上的运动，就有两个相反的問題，要求数学来解决：

（一）已知質点在直綫上运动的路程 s 与時間 t 的函数关系为

$$s = F(t),$$

求質点在任何时刻的瞬时速度 v 。这个問題，从数学的观点来講，就是求 s 对于 t 的导函数，

即
$$v = \frac{ds}{dt} = F'(t) = f(t)。$$

(二) 已知質点在直綫上运动的速度 v 与時間 t 的函数关系为

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t),$$

求質点运动的路程 s 与時間 t 的函数关系。这个問題从数学的观点来講，就是求 $f(t)$ 的原函数問題，也是本章要研究的不定积分問題。

本章分为两节：(一) 不定积分的定义与求法；(二) 积分常量。

第一节 不定积分的定义与求法

§ 15.1 原函数的概念

(一) 原函数的定义 如果 $F'(x) = f(x)$ ，或 $dF(x) = f(x)dx$ ，我們就說 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。

例如：

$$(1) \begin{cases} (x^4 + 3)' = 4x^3 \\ (x^4 - 14)' = 4x^3 \\ (x^4 + 7)' = 4x^3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (\sin x - 6)' = \cos x \\ (\sin x + 9)' = \cos x \\ (\sin x - 11)' = \cos x \end{cases}$$

其中 $x^4 + 3$, $x^4 - 14$ 及 $x^4 + 7$ 等都是 $4x^3$ 的原函数。又 $\sin x - 6$, \dots 等都是 $\cos x$ 的原函数。

(二) 原函数的特性 从上面 (1) 及 (2) 可以看出：一个已給的函数，可以有无限多个原函数，其中任意两个只差一个常数項。現在我們要問，任何函数的原函数都是这样么？下面的定理就要回答这个問題。

定理 函数 $f(x)$ 如果有原函数，它就有无限多个原函数，并且其中任意两个的差是常量。

証明： 設 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$ ，即 $F'(x) = f(x)$ ，本定

理要证明两点：(1) $f(x)$ 的原函数有无限的多；(2) 其中任意两个的差是常量。

(1) 的证明：假设 C 是任意常量，于是，因为 $(F(x) + C)' = F'(x)$ ，所以 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数。但 C 是任意常量，它可以取无限多的值；因此， $f(x)$ 也有无限多个原函数。

(2) 的证明：设 $F_1(x)$ 及 $F_2(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，即 $F_1'(x) = f(x)$ ， $F_2'(x) = f(x)$ 。

现在把这两式相减，得 $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ ，即 $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ 由 § 14.3 定理 (2)，得

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad C \text{ 为常量,}$$

这就是函数 $f(x)$ 的任意两个原函数的差是常量。

推论 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那末， $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的全部原函数。

(三) 原函数的图形 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数， $y = F(x)$ 的图形为 AB (图 15.1-1)。

于是， $y = F(x) + C$ 的图形，就是 AB 沿 y 轴平移一段距离等于 C 时的 AB 。所以 $f(x)$ 的全部原函数的图形是一族的曲线。它们在横坐标相同之点的切线都互相平行，因此全部原函数的图形是一个平行曲线族。

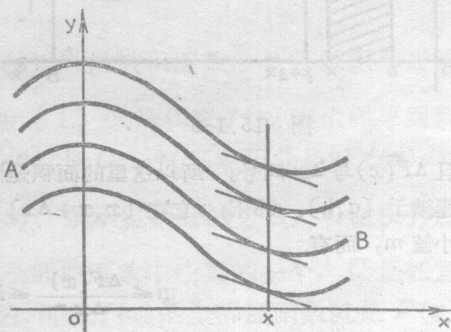


图 15.1-1

原函数的存在问题 根据上面的定理，可知一个已给函数，如果有一个原函数，就有无限多个原函数。但我们要问：一个已给函数是不是一定有一个原函数呢？关于这个问题，歌西曾首先

証明連續函数一定有原函数。現在把歌西的定理写在下面，并且用几何方法来証明。至于分析的証明，須在定积分中講 (§16·6)。数学家对于这种直观的几何証法，自从数学分析建立后，曾有一个很长的时期認為滿意。后来因为有人証明連續函数不是都可以用图形来表达^①，才觉得依靠直观的几何証法不够严密，而重視分析的証法。

歌西定理 函数 $f(x)$ 如果連續于 $[a, b]$ ，它就有以 $[a, b]$ 为定义域的原函数。

証明：分为两步来进行：

1) 設 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 內是正数，它的連續图形是 AB (图15.1-2)。現在要証明面积 $ABba$ (以后簡称 AB 下的面积) 就是 $f(x)$ 的原函数。

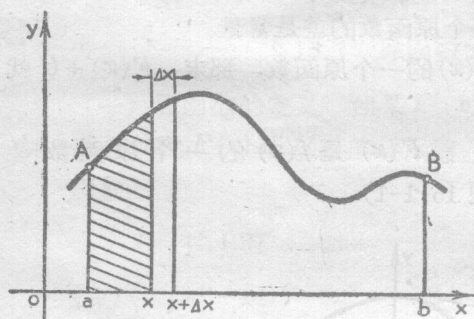


图 15.1-2

假設 a 点的縱坐标 Aa 是固定不动的， b 点的縱坐标 Bb 可以在 $[a, b]$ 区間內平移运动。于是 AB 下的面积就是 Bb 位置的函数，或 x 的函数。現在命这个函数为 $F(x)$ 。当 Bb 在 x 点取得增量 Δx 时， $F(x)$ 也得到增量

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

并且 $\Delta F(x)$ 与 Δx 同号，所以这里的面积是随 x 的增大而增大。 $f(x)$ 既然連續于 $[a, b]$ ，那末，它在 $[x, x + \Delta x]$ 区間內就一定有最大值 M 与最小值 m ，而有

$$m \leq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leq M,$$

因为 $f(x)$ 連續于 $[x, x + \Delta x]$ ，所以当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， M 及 m 就同趋于 $f(x)$ ，由极限存在准則 (§10·9) 即得，

^① 参考 Goursat: *Cours d'analyse mathématique* 第五版 $n^{\circ}7$, $n^{\circ}3$ 及 $n^{\circ}68$ 原函数。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ 即 } F'(x) = f(x).$$

这就证明了連續函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 以 $[a, b]$ 为定义域。

2) 假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内不是恒为正数, 我們就可以找出一数 k , 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内恒有 $f(x) > k$, 因而 $f(x) - k > 0$ 。

由 1) 的証明, 可知 $f(x) - k$ 有原函数 $G(x)$,

$$\text{即 } G'(x) = f(x) - k.$$

現在只要命 $F(x) = G(x) + kx$, 即得

$$F'(x) = G'(x) + k = f(x),$$

所以 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 以 $[a, b]$ 为定义域。

〔証毕〕

注意: 由这个定理的証明中, 可知曲綫 $y = f(x)$ 下的面积的导数就是 $y = f(x)$, 而微分就是 $f(x)dx$ 或 ydx 。

§ 15.2 不定积分 基本积分表一

定义 函数 $f(x)$ 如果有原函数, 它的全部原函数, 叫做^① $f(x)dx$ 的不定积分 (或簡称积分),

$$\text{記为 } \int f(x)dx \quad (1)$$

\int 叫做积分記号, $f(x)$ 叫做被积函数, x 叫做积分变量, $f(x)dx$ 叫做被积式。因为 (1) 式是代表 $f(x)$ 的全部原函数, 所以不需要在它的后面再加常量 C ; 又不定积分是对 $f(x)dx$ 講的, 所以不可以写为 $\int f(x)$ 。求不定积分的方法, 叫做积分法。

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的全部原函数中任意的一个, C 是任意常量, 那末, 由上一目的推論, 可知 $f(x)$ 的全部原函数就是 $F(x) + C$, 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

^① 也叫做 $f(x)$ 的积分, 但不是积分原来的意义。

其中的 C ，叫做积分常量。

$f(x)$ 的原函数的图形，叫做函数 $f(x)$ 的积分曲线。所以全部积分曲线是一个平行曲线族 (§15.1)。

根据定义，可知不定积分 $\int f(x) dx$ 是以 $f(x) dx$ 为微分的函数，或以 $f(x)$ 为导数的函数，因此，得：

$$1) \textcircled{1} \quad d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \text{ 或 } \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x);$$

$$2) \quad \int df(x) = f(x) + C,$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \text{ 或 } \int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) + C.$$

又因此，得出下面的基本积分表。要检验表中的公式是否正确，只须看公式右端的导数或微分是否等于左端的被积函数或被积式就可以断定。这种证明应该由学者自己来做，或由教师用问答方式来做，所以这里不再一一叙述，但对于公式 (6) 需要说明如下：

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } \frac{1}{x} \text{ 的原函数是 } \ln x, \therefore \int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, 命 } z = -x, \text{ 得 } z > 0, dz = -dx \text{ 及 } \frac{dz}{z} = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x},$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C.$$

由此可知，只要 $x \neq 0$ ，就有 $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ 。

$\textcircled{1}$ 1) 及 2) 都是说明微分记号与积分记号相遇，就互相抵消，也说明微分法与积分法互为反运算。但是，先微分后积分时，应该在抵消后加积分常量。

基本积分表一

$$(1) \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ 为常量})$$

$$(2) \quad \int dx = x + C$$

$$(3) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$(4) \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$(5) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \neq 1 \text{ 的正数})$$

$$(6) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad (x \neq 0)$$

$$(7) \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(8) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(10) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$(11) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$(12) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

$$(13) \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$(14) \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$(15) \quad \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

例1 求 $\int (4x^3 + 3x - 5) dx$ 。

解: 应用公式 (15), (1), (2), (3), 即得

$$\begin{aligned} \int (4x^3 + 3x - 5) dx &= \int 4x^3 dx + \int 3x dx - \int 5 dx = \\ &= 4 \int x^3 dx + 3 \int x dx - 5 \int dx = x^4 + \frac{3x^2}{2} - 5x + C. \end{aligned}$$

其中每一項的积分虽然都应当有一个积分常量, 但是这里不需要在每項之后各加一个积分常量。因为任意常量之和还是任意常量, 所以这里只把它们之和 C 写在末尾。以后仿此。

例2 求 $\int (3x^2 + 1)^2 dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \int (3x^2 + 1)^2 dx &= \int (9x^4 + 6x^2 + 1) dx = \\ &= \frac{9}{5} x^5 + 2x^3 + x + C. \end{aligned}$$

$$\text{例3 } \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\text{例4 } \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{例5 } \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx &= \int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int dx - \\ &\quad - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

§ 15.3 积分形式的不变性

下面的定理是說明积分变量无论是自变量, 或是中間变量,

而积分公式的形式不变，这一特性叫做积分形式的不变性。

定理 如果 $\int f(x) dx = F(x) + C$,

就有 $\int f(u) du = F(u) + C$, 其中 $u = \varphi(x)$ 是 x 的可微函数。

证明: 题设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, $\therefore F'(x) = f(x)$, 现在对 $F(u) = F[\varphi(x)]$ 进行微分, 并应用微分形式的不变性, 即得 $dF(u) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F'(u) du = f(u) du$,

$$\therefore \int f(u) du = \int dF(u) = F(u) + C. \quad [\text{证毕}]$$

由这个定理, 可知基本积分表中的 x 可以看作是自变量, 也可以看作是函数 (x 的可微函数)。因此, 就大大地扩充了基本积分表的应用范围。现在举例说明这种不变性的应用如下:

例 1 求 $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx, x \neq 0$ 。

解: $\because \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x), x \neq 0$, 而 $\ln x$ 是可微函数, 所以根据上面定理及积分表中公式 (3), 即得

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

例 2 $\int \cos 3x dx = \int \cos 3x d \frac{3x}{3} = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x)$,

由公式 (7), 得 $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$ 。

例 3 $\int (3x+5)^{50} dx = \frac{1}{3} \int (3x+5)^{50} d(3x+5)$,

由公式 (3) 得, $\int (3x+5)^{50} dx = \frac{1}{3 \times 51} (3x+5)^{51} + C$ 。

$$\text{例 4} \quad \int x^2 \sqrt{x^3-2} dx = \frac{1}{3} \int (x^3-2)^{\frac{1}{2}} d(x^3-2),$$

$$\text{由公式 (3) 得, } \int x^2 \sqrt{x^3-2} dx = \frac{2}{9} (x^3-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{例 5} \quad \int \frac{3x dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{3}{2} \int (x^2+1)^{-3} d(x^2+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由公式 (3) 得, } \int \frac{3x dx}{(x^2+1)^3} &= -\frac{3}{4} (x^2+1)^{-2} + C \\ &= -\frac{3}{4(x^2+1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{例 6} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C.$$

这就是說，在被积函数中，如果分母的导数或微分等于分子，这个积分就等于分母的自然对数再加积分常量。譬如：

$$\begin{aligned} 1) \quad \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \\ &= -\ln |\cos x| + C; \end{aligned}$$

$$2) \quad \int c \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$3) \quad \int \frac{x dx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \ln |x^2+3| + C.$$

$$\text{例 7} \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

由此又可得

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C_0.$$

例8 求 $\int \sin x \cos x dx$ 。

解：这个积分可以有几个不同的解法，即：

$$1) \int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + C;$$

$$2) \int \sin x \cos x dx = -\int \cos x d(\cos x) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^2 x + C;$$

$$3) \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_0.$$

这个积分在表面上虽然有三个不同的答案，但是实际上，其中任一个都包括在其它任一个中。譬如3)就是1)，因为

$$-\frac{1}{4} \cos 2x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{4} (1 - \cos 2x) + C_1 = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_1,$$

其中 C_1 仍旧是任意常量，所以3)和1)相同。但是如果要想证明这三个答案都是正确的答案，就不必把它们化为相同的形式。只要看这三个答案的导数，是否都和被积函数相同。如果相同，就可以断定它们都是所求的原函数^①。

① 初学的人，每每因演算结果与已给的答案不同，或与他人的演算结果不同，就认为自己的演算有错误而花了许多时间去研究错误的原因，这是浪费时间。