高等学校试用教材

# 高等几何

钟集 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

# 高 等 几 何

钟 集 编

高等教育出版社

## 内容提要

本书介绍了射影解析几何的基本内容，并简略地介绍了公理系统及其他一些射影几何体系．全书共有六章：第一章射影平面；第二章射影变换；第三章配极变换和二阶曲线；第四章仿射平面和欧氏平面；第五章三维射影空间；第六章公理法和不同的射影几何体系．

本书可供高等师范院校作试用教材；也可供综合大学数学系作教学参考用书．

本书由胡鹏教授、张庆达讲师审阅，经理科数学、力学编委会委托编委方德植教授复审，同意作为高等学校试用教材出版．

高等学校试用教材

高等几何

钟集 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 210,000

1983 年 3 月第 1 版 1985 年 8 月第 2 次印刷

印数 27,001— 37,000

书号 13010·0863 定价 1.05 元

# 前　言

师范院校数学系的高等几何课程的设置目的是在学生已学习初等几何、解析几何和高等代数的基础上，系统地讲授射影几何，主要是实射影平面几何的基本知识，使学生认识射影空间的基本特征和研究方法，以及射影空间与仿射空间、欧氏空间的内在联系，从而发展几何空间概念，更深入地掌握初等几何、解析几何和高等代数知识，并且为进一步学习现代数学作准备。

射影几何有悠久的发展历史．远在公元前四世纪，古希腊人已经发现了圆锥曲线．公元前三世纪，Euclid 和 Apollonius都有关于圆锥曲线的专门著作发表．后来有许多关于圆锥曲线的定理成为射影几何的内容．

十五、六世纪，欧洲的学者发现了透视原理，而且把它运用到美术和建筑等方面．

1639年，Desargues 通过对透视的研究，建立了无穷远点的概念，奠定了射影空间概念的基础．Desargues 得出了透视三点形的定理，并且研究了点列的对合．他的两个著名的定理至今仍在射影几何中居极其重要的地位．

1649年，Pascal 发现了关于二阶曲线的著名定理．这条定理在射影几何基础和二阶曲线的理论中起了很重要的作用．

1822年，Poncelet 通过射影法研究了图形在射影变换下保持不变的性质，即射影性质，并且建立了交比的概念．他又提出无穷远直线概念和配极理论．此外，Poncelet 和 Gergonne 各自独立地提出了对偶原则．

1827年，Möbius 研究了平面和空间的一一对应，特别是直射

变换和对射变换. 他和Feuerbach首先建立了齐次坐标.

1832年,Steiner建立了二阶曲线的射影定义. 从此, 二阶和高阶曲线的射影理论逐步建立起来.

1847年,von Staudt用纯几何的方法研究了射影几何, 他完全不用任何度量的几何运算而创立了关于射影直线上的点的射影运算的理论.

在这期间, Plücker和Cayley都从代数法入手为射影几何与不变式理论的联系打下基础.

1871年,Klein提出了著名的变换群观点, 对每一种几何找到了一个变换群,在该变换群的变换下图形的不变性质,就是对应的几何所研究的对象, 因而就可以通过变换群的关系来分析各种几何之间的内在联系和根本差别.

本世纪初年,Pasch, Enriques和Veblen等先后建立了射影几何公理体系,为射影几何的进一步发展奠定了理论基础. Veblen和Young合著的«Projective Geometry»(vol. 1, 1910; vol. 2, 1918)成为射影几何的经典名著. 随着抽象代数理论的发展,高维的和实数域以外的各种数系和数域的几何体系相继建立起来, 这些都已成为代数几何的组成部分.

编写本书的基本观点如下:

第一, 高等几何是师范院校的基础课之一. 学生已学过许多数学知识,特别是有初等几何、解析几何和高等代数等课程的知识作为基础,应该提高理论上的要求. 具体说来,本书以实射影平面为主,明确区分实射影平面和复射影平面的根本差别,而不是把它们混淆在一起,随意穿插介绍. 本书不采用公理法结构,而是从欧氏平面添加无穷远元素以及从直角坐标系建立射影平面和射影坐标系,以避免在开头作出许多繁冗乏味的推导. 虽然如此,本书开头仍介绍实射影平面的一些公理, 一方面在于指明实射影平面的

基本特征，另一方面亦为后文的论证提供根据．在建立了平面射影坐标系之后，所有论述力求逻辑上的严格．最后，结合实射影平面的公理体系简略地阐述公理法大意，一方面使学生能从公理法观点来加深对实射影平面公理体系的认识，提高理论水平；另一方面，也使学生了解公理法的精神，为进一步学习现代数学提供有利条件．

第二，射影几何既可以用综合法，也可以用代数法进行研究．鉴于学生已学过的初等几何知识不多，而且从与代数和其它数学分支的联系以及进一步学习的需要来说，代数法应该居更重要的地位．因此，本书主要采用代数法．不过，为了加强直观性和反映综合法的简捷巧妙的特点，有时也兼用综合法．由于采用代数法，对象的存在性主要依赖于数和方程解决，所以本书少介绍各种作图法，以免篇幅过多，内容臃肿，教学上不易处理．

第三，射影几何与初等几何、解析几何有极其密切的联系．这种联系在本书中主要反映于从欧氏平面引入无穷远元素以建立射影平面概念和射影坐标系，提供了射影几何的直观解释和理论基础，以及根据变换群观点论述射影几何和仿射几何、欧氏几何的内在联系和根本差别等方面．以往教材多强调利用射影几何方法解决初等几何和解析几何的问题，这个观点现在这里不放在首要位置．本书所着重的是把射影几何与高等代数紧密地联系起来．事实上，高等代数为射影几何提供了研究方法，而射影几何为高等代数的许多对象提供了几何解释．尽管本书主要是讨论射影平面，也就是主要给出了3维向量的几何解释，不过，这样的解释也足以生动地说明相应的代数理论的几何意义，帮助学生对高等代数的许多内容加深理解．为此，本书略为扩展范围，增入一些内容，使这种联系能够充分地得到体现．

第四，变换群观点是贯穿全书的中心观点，对各种射影变换和

变换群都加以详细论述. 特别是从射影变换群依次建立仿射变换群、相似变换群以及正交变换群,指出建立子群的条件和绝对形,证明了在各种变换群下图形的基本的不变量和不变性质, 以及确定各种变换群所对应的几何. 进一步又介绍以非退化二阶曲线为绝对形的变换群, 以及对应的双曲几何和单叶椭圆几何的度量理论,其所有的定理将分别给出详细严格的证明,使读者对变换群观点能够有更深入的理解.

教学计划中给予高等几何课程的学时不多, 不可能讲授太多的内容. 但本书为了保持系统的基本完整, 内容略有增加. 这些内容决不是多余的衍文. 因为,作为高校的教材,本来不必局限于教师在课堂上所讲解的范围. 应该容许有些内容教师只作简略说明,或者让学生自学. 另外,如果学生的高等代数学得较好, 进度可以加快, 内容也要相应地稍为增多. 对于这些内容, 本书在目录的节次上都标以 * 号, 以便教师灵活掌握. 对应章节的习题也标以 * 号.

鉴于外国人名未有统一的翻译, 使用译名未必能使读者进一步的学习得到方便;何况现在许多读者都在努力学习外文,这里直接使用外文可能不致使读者增加困难. 因此, 本书中凡引用外国人名,都照用外文,不加翻译.

主要参考书如下:

1. H. Busemann and P. J. Kelly, «Projective Geometry and Projective Metrics», 1953.

2. W. D. D. Hodge and D. Pedoe, «Methods of Algebraic Geometry», vol. I., 1953.

3. B. Segre, «Lectures on Modern Geometry», 1960.

4. C. V. Durell, «Algebraic Geometry», 1954.

5. H. S. M. Coxeter, «The Real Projective Plane», 1955.

6. A. Heyting, «Axiomatic Projective Geometry», 1963.

7. J. A. Todd, «Projective and Analytical Geometry», 1954.

8. 孙泽瀛,《近世几何学》, 1955.

9. 苏步青,《高等几何讲义》, 1964.

10. Н. В. Ефимов, «Высшая Геометрия»1949. 中译本,《高等几何学》,上下册,裘光明译.

11. Н. Ф. Четверухин, «Проективная Геометрия», 1953. 中译本,《射影几何学》,上下册,杨春田等译.

# 目　录

# 第一章　射影平面

## §1.1　无穷远元素

### 1. 无穷远点和无穷远直线

读者都知道平面上任意两相异直线的位置关系有相交和平行两种．无穷远点概念的产生使得这两种不同关系统一起来．

如图 1.1.1，平面上有一直线 $l_1$ 和线外一点 $A$，过 $A$ 引直线

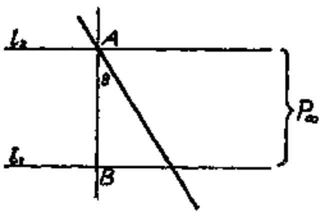


图 1.1.1

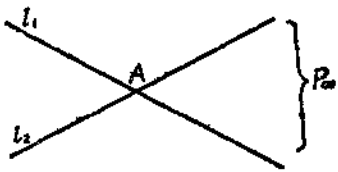


图 1.1.2

$AB\perp l_1$，以及直线 $l_2 /\!/ l_1$．设直线 $AP$ 由 $AB$ 起绕 $A$ 点依反时针方向转动，$P$ 是 $AP$ 和 $l_1$ 的交点．如果角 $\theta(=\angle BAP)$ 渐增，则线段 $BP$ 的长随着增大．当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$，则 $BP\to\infty$，$AP\to l_2$．这时，可以设想 $l_1$ 上有一个点 $P_\infty$，它是 $l_2$ 和 $l_1$ 的交点．这个点 $P_\infty$ 当然是原来直线 $l_1$ 上所没有的，而且只能设想在无穷远处，所以就叫做**无穷远点**．直线 $l_1$ 上的无穷远点只能有一个．因为，过 $A$ 只能有一条平行于 $l_1$ 的直线 $l_2$，而两直线的交点只能有一个．由此，我们约定平面上任一直线上都有唯一的无穷远点，平面上一组互相平行的直线有公共的无穷远点．为与无穷远点相区别，把原来平面上的点叫做**平常点**．

平面上任何相交的两直线 $l_1$、$l_2$ 有不同的无穷远点．如图

1.1.2，设 $l_1$、$l_2$ 交于平常点 $A$．如果 $l_1$ 和 $l_2$ 又有公共的无穷远点 $P_\infty$，则过两个相异的点 $A$ 和 $P_\infty$ 有 $l_1$ 和 $l_2$ 相异两直线．为使直线公理仍保持成立，$l_1$ 和 $l_2$ 上的无穷点就应当相异．

既然平面上的无穷远点不止一个，我们有必要来考虑平面上全体无穷远点构成什么图形．因为平面上的任何直线和它交于一个无穷远点，所以自然可以设想平面上全体无穷远点构成一条**无穷远直线**．为表示区别，我们把平面上原有的直线叫做**平常直线**．

把平面上的平常点叫做**欧氏点**，而把欧氏点和无穷远点都叫做**射影点**．把平面上的平常直线叫做**欧氏直线**，欧氏直线添加了它的唯一无穷远点之后成为**射影直线**．平面上的唯一无穷远直线也是射影直线．原来的平面叫**欧氏平面**，欧氏平面添加无穷远点和无穷远直线之后就称为**射影平面**．

平面上添加的无穷远点和无穷远直线都叫做**无穷远元素**．

**2．射影点和射影直线的基本性质**

根据上面的设想，我们可以得出射影点和射影直线的两项基本性质．

(i) 任意两个相异的射影点 $A$ 和 $B$ 必在而且只在一条直线上．因为，如果 $A$ 和 $B$ 都是欧氏点，则它们在唯一的欧氏直线 $AB$，即连接两点 $A$、$B$ 的直线上，因而也在添加了无穷远点后所成的唯一射影直线 $AB$ 上．如果两点中有一个是无穷远点，例如说，$A$ 是平常点，$B$ 是无穷远点 $B_\infty$，这个无穷远点在直线 $l_2$ 上，如图 1.1.3．那

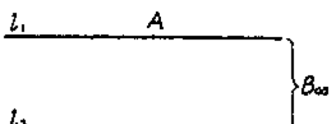


图 1.1.3

么，过 $A$ 平行于 $l_2$ 的直线 $l_1$ 必过 $B_\infty$，即 $A$ 和 $B_\infty$ 在唯一的射影直线 $l_1$ 上．最后，如果两个点都是无穷远点，例如 $A_\infty$ 和 $B_\infty$，则 $A_\infty$

和 $B_\infty$ 在射影平面上唯一的无穷远直线 $l_\infty$ 上，也即在唯一的射影直线 $l_\infty$ 上.

(ii) 射影平面上任意两相异的射影直线必有而且只有一个交点,即公共点. 因为,假设两射影直线 $l_1$ 和 $l_2$ 都由平常直线产生. 若这两条平常直线相交,则有唯一交点;若这两条平常直线互相平行，则两射影直线交于唯一的射影点，即交于它们公共的无穷远点. 假设两射影直线中有一条是无穷远直线，则它们交于那一条非无穷远直线上的唯一无穷远点.

在欧氏平面上引进无穷远点和无穷远直线，绝不是一种脱离实际的幻想,而是有深刻的物质意义的. 在美术上的透视原理,画面上的景物应消失于一个点，这个点实质上代表观察者对实物的视线的无穷远点，因而观察者看画面的时候，这个点就指示了视线方向. 这是美术上的基本原理. 天空的星体距离地球十分遥远,每个星体射到地球上的光线差不多都可以看成是平行的，这就意味着星体被想象在无穷远点处. 人们设计制造天文望远镜，如果把光轴对准星体，那么，望远镜的物镜的焦点上就现出了星体的实象. 换句话说,无穷远点的光源成象在物镜的焦点上. 实际上,这个事实正好说明了射影几何是光学系统成象的理论基础.

## §1.2 平面射影几何的基本特征

### 1. 接合关系

既然射影点(不论是欧氏点还是无穷远点)和射影直线(也不论是无穷远直线还是欧氏直线)都一样地具有上文(§1.1)所指出的两项基本性质,因此,把它们作为研究的对象以建立一种新的几何学,自然不必再提到它们是否为无穷远元素而加以区别;并且为了方便,把射影点简称为点,把射影直线简称为**直线**. 由这些点和直线所构成的几何叫做**射影几何**，它是与欧氏平面几何有区别的

一种几何.

上面所述的由欧氏平面添加无穷远元素从欧氏平面几何建立平面射影几何的方法是数学史上最原始的方法，而且也是最自然最容易理解的方法. 同时，它也说明了这两种有区别的几何之间本来就存在着密切的联系. 我们将在第四章中反过来从平面射影几何出发来论述它们之间的内在联系和根本差别.

为了在理论上构成平面射影几何的独立系统，不使它成为欧氏几何的附庸，我们先介绍平面射影几何的基本研究对象，然后以代数法为主推导出平面射影几何的丰富多采的内容，最后提出一个公理体系，并根据公理法论述平面射影几何的理论基础.

我们用小写拉丁字母如 $x$、$y$、…等表示点，用小写希腊字母 $\xi$、$\eta$、…等表示直线. 如图 1.2.1，我们说点 $x$ 在直线 $\xi$ 上，记为 $x\in\xi$，读做 $x$ 属于 $\xi$，或者说直线 $\xi$ 通过点 $x$，记为 $\xi\ni x$，读做 $\xi$ 包含 $x$. 这两种说法实际上表示图上的同一个事实，叫做**点和直线的接合关系**，因而可以把图 1.2.1的事实说成点 $x$ 与直线 $\xi$ 相接合. 不过，下文仍时常兼用点在直线上或直线通过点等习惯语言. 关于点和直线的接合关系，根据 §1.1.2 指出的事实，可以归结成以下公理：

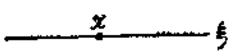

图 1.2.1

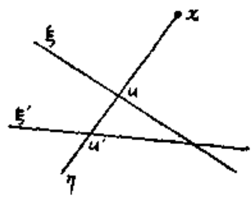

图 1.2.2

**公理 $A$** 任何两相异点必有而且只有一直线与它们相接合.

**公理 $B$** 任何两相异直线必有而且只有一点与它们相接合.

**2. 中心射影**

如图 1.2.2，设有两直线 $\xi$ 和 $\xi'$（$\xi\neq\xi'$，或 $\xi=\xi'$.）和点 $x\notin\xi$、

$\xi'$. 对于任一点 $u\in\xi$,必存在直线 $\eta=u\times x$(读做 $u$ 叉 $x$, 表示 $u$ 和 $x$ 的连线), 故必有唯一点 $u'=\eta\times\xi'$(表示 $\eta$ 和 $\xi'$ 的交点). 当 $u$ 跑遍 $\xi$ 上的所有点, 则 $u'$ 亦跑遍 $\xi'$ 上的所有点. 由 $u$ 得出 $u'$ 的过程叫做**中心射影**. $x$ 叫做**射影中心**, $u$ 叫做 $u'$ 的**原象点**, $u'$ 叫做 $u$ 的**象点**, 或 $u$ 关于中心 $x$ 而在 $\xi'$ 上的**射影**. 给定了射影中心 $x$ 和两直线 $\xi$ 和 $\xi'$, 则 $\xi$ 上的任一点在 $\xi'$ 上有唯一的射影; 反过来, $\xi'$ 上的任一点必在 $\xi$ 上有唯一的原象点. 于是 $\xi$ 上的原象点与 $\xi'$ 上的象点构成一一对应关系.

**3. 射影直线的拓扑模型**

回顾到欧氏直线添加一个无穷远点构成射影直线. 如图1.2.3, 欧氏直线 $l$ 左右两方都是无限伸长的, 但因为它只能添加一个无穷远点 $P_\infty$, 所以必须想象这个点 $P_\infty$ 把 $l$ 的左右两端连接起来. 如果设想射影直线是橡皮制成的, 可以任意使它伸缩变形, 但不许拉断或折叠, 那么, 它可以拉成图 1.2.3 中的一个圆 $\xi$, 这就是射影直线的拓扑模型. 换句话说, 圆就是射影直线的一个拓扑模型.

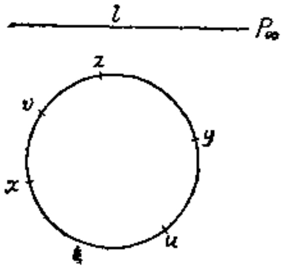


图 1.2.3

**4. 射影直线上 4 相异点的分离关系**

假设在圆 $\xi$ 上任意一点 $x$ 处切开, 则圆上只出现一个缺口, 但不会断成两段, 必须再在另一点 $y$ 处切开, 才能够把圆切断成两段. 这就是说, 一个点不能把一条射影直线分为不连通的两段,