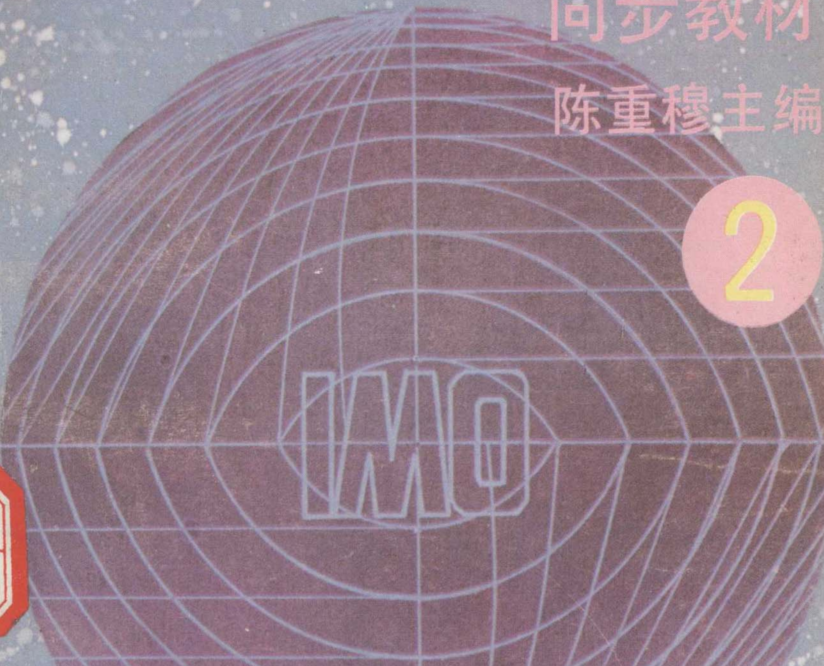
初中数学奥林匹克

同步教材

陈重穆主编

2



西南师范大学出版社

初中数学奥林匹克同步教材

第二册

主编 陈重穆

编委（以姓氏笔划为序）

朱乃明 朱世才 李仁杰
李光忠 张 渝 张富彬
曾家骏 谭光全 魏 林

（川）新登字 019 号

初中数学奥林匹克同步教材
第二册
陈重穆　主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
四 川 省 隆 昌 印 刷 厂 印 刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：5　字数：110 千
1994 年 6 月第二版　1994 年 6 月第 3 次印刷
印数：35,001－55,000
*
ISBN　7－5621－0730－O/G・529

定价：2.80 元

序 言

义务教育根据全面发展的教育方针，面向全国适龄儿童和少年，对各科是“共同纲领”性质的一般要求.学生由其爱好不同，课外发展不尽相同，如果学校、家长让学生仅满足于课内学习，则学生将得不到充分发展.因此有目的有计划地组织第二课堂，提供学生发展的机会是不可缺少的的重要一环.初中是学生从儿童到少年的过渡阶段，体力、智力从量到质都有急剧发展，这个时期至关重要，它将影响学生的一生.

按竞赛大纲编写的这本《初中数学奥林匹克同步教材》提供出第二课堂的辅助教材，它将大大激发学生、中学数学爱好者的学习积极性，结合课内学习帮助教师、家长安排好学生数学课外学习，使学生得到切实提高.日积月累必有所成.虽不能人人都是数学竞赛获奖者，但由之智能得到发展，水平得到提高，获得优良学习成绩，则是可以予期的.就是奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀.本书将给你搭上第一步台阶.

全国初中数学联合竞赛组织委员会委员
四川省数学会副理事长
陈重穆
一九九二年八月二十六日
于西南师范大学

说　明

近年来，在奥林匹克数学竞赛(IMO)中我国选手频频取得优异成绩，在国内外引起了极大反响.数学奥林匹克正吸引着越来越多的师生，全国各种层次的数学竞赛活动已空前活跃，为了满足多数师生参加数学奥林匹克活动的需要，我们组织编写了这套《初中数学奥林匹克同步教材》.本书分一、二、三册，各册均与数学教学大纲和教材同步，是相应教材内容的延伸与提高(参照数学竞赛大纲对有关内容进行了适当补充).为便于师生教学，每册均以课时为单位进行编写，每课时分内容提要、例题、练习三大部分(练习题均附有参考解答与提示)，在每期期末还设有竞赛检测题若干套.由于本书在编写过程中强调与初中数学教材同步，所以师生可以在不影响正常教学的情况下参加数学课外活动，这样既加深了学生对教材内容的理解，又拓广了学生视野，提高了学生能力.

本书可作为竞赛讲座、奥校和各类不同层次学校数学课外活动的教材，也可作为初三学生和数学爱好者的参考读物.

参加本书修改的有张渝、朱世才、李仁杰.

编　者

1993年.8于西师

目　录

一　整数性质的应用（二）

上一册介绍了整数的整除性、奇偶性和整数的十进制与二进制表示，本册继续介绍整数的一些基础知识和基本方法.

第一课　质数　合数　完全平方数

自然数按约数的个数可分为三类：

(1) 单位 1，只有一个约数 1；

(2) 质数(或素数)，如 2、3、5、7、… 等，这些数有两个约数，一个是 1，另一个是它本身；

(3) 合数，如 4、6、8、9、… 等，这些数除了 1 和它本身的约数外，还有另外的约数.

关于质数与合数有如下主要性质：

1. 质数有无穷多个. 最小质数是 2，不存在最大质数.

2. 任何一个自然数 N 都能分解成质因数的连乘积的形式.

即 $$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots\cdots p_n^{a_n}. \qquad (*)$$

其中 p_1、p_2、…、p_n 为质数，a_1、a_2、……、a_n 为自然数. 如果不考虑因数的顺序，这种分解式是唯一的.

3. 一个合数分成标准式(*)后，约数的个数为

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n).$$

如 360 分解成标准式(*)为

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1.$$

它的约数的个数为$(1+3)\times(1+2)\times(1+1)=24$(个).

例 1　求不大于 200 的且只有 15 个约数的自然数.

解：由上面性质 3 知：$15=1\times15=3\times5$，故所求的自然数 N 只有下面两个形式：$N=p^{14}$ 或 $N=P_1^2\times P_2^4$.

(1)　若 $N=p^{14}$. 因最小质数是 2，而 $2^{14}>200$，这种形式不合要求.

(2)　若 $N=p_1^2\times p_2^4$.

当 $p_1\geqslant2$，$p_2\geqslant3$ 时，有 $2^3\times3^4>200$. 不合题意.

当 $p_1=3$，$p_2=2$ 时，有 $3^2\times2^4=144<200$，所以 $N=144$ 合题意.

当 $p_1\geqslant5$，$p_2=2$ 时，有 $5^2\times2^4>200$，不合题意.

故所求的自然数为 144.

例 2　写出 10 个连续的自然数，使其每一个数都是合数.

解：十个连续的自然数可表示成：$k+2$，$k+3$，$k+4$，…，$k+11$ 的形式. 要使这十个数都是合数，只需 k 为 2、3、4、…、11 的倍数，因而可设 $k=2\times3\times4\times\cdots\times10\times11$(简记 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times11=11!$). 则所求的十个数是：

$11!+2$，$11!+3$，$11!+4$，…，$11!+11$.

例 3　求满足关系 $abc=5(a+b+c)$ 的质数 a、b、c.

解：由关系式 $abc=5(a+b+c)$ 知 abc 是 5 的倍数. 又因 a、b、c 为质数，故其中至少有一个是 5，不防设 $c=5$. 于是得

$$ab=a+b+5,\qquad 即\quad (a-1)(b-1)=6.$$

又因 $6=1\times6=2\times3$，a、b 为质数，设 $a\leqslant b$，则有

$$\begin{cases} a-1=1, \\ b-1=6; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a-1=2, \\ b-1=3. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=7; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a=3, \\ b=4. \end{cases} （舍去）$$

故所求的质数是 2、5、7.

完全平方数的问题是整数中一个常见而又有趣的问题．我们知道 1、4、9、16、25、36、49、64、81、100、121、144、… 都是完全平方数．从它们的末尾数字看，完全平方数的末尾数字只可能是 0、1、4、5、6、9 这六个数字，不可能是 2、3、7、8 这四个数字．这可以作为判断完全平方数的一种方法．

其实判断完全平方数的方法很多，常用的方法有：

1. 在两个连续的正整数的平方数之间，不存在完全平方数．即若正整数 a 满足：

$$n^2 < a < (n+1)^2$$

则 a 不是完全平方数．如 16 和 25 之间的整数不存在完全平方数．

2. 形如 $4k+2$ 或 $4k+3$ 的数，不是完全平方数．

因任何偶数的平方可表示为 $(2n)^2=4n^2$；任何奇数的平方可表示为 $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$.

这说明偶数的平方是 4 的倍数，奇数的平方是 4 的倍数加 1．因而 4 的倍数加 2 或加 3 不可能是完全平方数．

同样，形如 $3n+2$ 的整数不可能是完全平方数．

形如 $5n+2$ 或 $5n+3$ 的整数，不可能是完全平方数．

3. 一个自然数的个位和十位数字都是奇数时，它不是完全平方数．

例 4　若 a 为自然数，证明 $a(a+1)+1$ 不是完全平方

数.

证明：$\because\ a^2 < a^2 + a + 1 < a^2 + 2a + 1$，

即 $\quad a^2 < a(a+1) + 1 < (a+1)^2$，

$\therefore\quad a(a+1)+1$ 不是完全平方数.

例 5　用数码 1、2、3、4、5、6 各十个，随意排成六十位数 n. 证明 n 不是完全平方数.

证明：假设对于某种排法 n 为完全平方数，即 $n = k^2$（k 为整数）. n 是由 1、2、3、4、5、6 这六数码各十个任意排列而成，情况较复杂. 但它们的各位数字之和不变，即 $10 \times (1+2+3+4+5+6) = 210$. 而 210 是 3 的倍数，说明 3 能整除 n，即 3 能整除 k^2. 由于 3 是质数，所以 3 也能整除 k，从而 9 能整除 k^2，即 9 能整除 n. 这说明 n 的各位数字之和能被 9 整除，但这个和是 210，它不能被 9 整除，所以 n 不是完全平方数.

练　习

1. 填空题：

(1) 两个质数之差是 17，则这两质数之和是______；

(2) 两个质数的平方和是 125，这两个质数是______；

2. 选择题：

(1) 若 x 是完全平方数，则它后面的一个完全平方数是（　　）

(A) $x+1$.　　(B) x^2+1.

(C) x^2+2x+1.　　(D) $x+2\sqrt{x}+1$.

(2) （第三届"缙云杯"初中数学邀请赛试题）1、9、8、6 四个数中完全平方数、奇数、合数和质数的个数依次是（　　）

(A) 1、2、3、4.　　　　(B) 1、2、3、0.

(C) 2、2、3、0.　　　　(D) 2、2、3、1.

3. 求不大于100的且恰有10个约数的自然数.

4. 已知 $1176a = b^4$，a、b 为自然数，求 a 的最小值.

5. 在1993上加一个三位数，使其和是完全平方数，问这样的三位数共有多少个？

6. 求一个四位数，使它前两位数字相同，后两位数字相同，且这四位数是完全平方数.

7. 一个整数如果加上100，则为一完全平方数；如果加上168，则为另一完全平方数. 求此数.

第二课　带余除法　利用余数分类

用一个整数 b 去除整数 a，有时恰好除尽，有时会有余数. 若记商为 q，余数为 r，即有

$$a = bq + r \quad (0 \leqslant r < b).$$

这个公式叫**余数公式**.

特别地，当 $r = 0$ 时，我们说 b 整除 a，记为 $b|a$.

在数学竞赛中，整数的整除或带余除法的问题是十分有趣的. 为研究方便，下面列出有关整除的几条基本性质：

(1). 若 $a|b$, $b|c$, 则 $a|c$；

(2). 若 $a|b$, $a|c$, 那么对于任何整数 m、n，都有 $a|(mb + nc)$；

(3). 若 $a|b$, $c|d$, 则 $ac|bd$.

例1　1270除以某自然数，其商为74，求除数和余数.

分析　设除数为 x，余数为 r. 由余数公式有 $1270 = 74x +$

r,且 $0 \leqslant r < x$,由此可确定 x 的取值范围.

解:由题意有 $\quad 1270 \geqslant 74x, \quad (1)$

$$1270 - 74x = r < x. \quad (2)$$

由(1)、(2),得 $\dfrac{1270}{75} < x \leqslant \dfrac{1270}{74}$.

即 $\quad 16\dfrac{14}{15} < x \leqslant 17\dfrac{6}{37}$.

$\therefore \quad x = 17, r = 1270 - 74x = 12$.

例 2 四个数 2613、2243、1503、985 被同一个正整数相除,所得余数相同,且不为零.求除数和余数.

解:设除数为 m,余数为 r,则有

$$\begin{cases} 2613 = am + r, & (1) \\ 2243 = bm + r, & (2) \\ 1503 = cm + r, & (3) \\ 985 = dm + r. & (4) \end{cases}$$

(1) − (2),得 $(a-b)m = 370 = 2 \times 5 \times 37$,

(3) − (4),得 $(c-d)m = 518 = 2 \times 7 \times 37$.

即 m 是 370 和 518 的公因数,因此 m 可取的值为 $m_1 = 2$,$m_2 = 37$,$m_3 = 74$.相对应的 r 的值为 $r_1 = 1$,$r_2 = 23$,$r_3 = 23$.

在第一册我们已经看到,利用整数的奇偶性能巧妙地解一些有趣的竞赛题.奇偶性就其实质而言,是整数被 2 除的余数为 1 或 0 的问题."余数"是整数中的重要概念,利用余数将自然数分类,在解题中有广泛的应用.下面我们来研究这一问题.

任何一个自然数 a,被自然数 b 除,余数只可能是 0,1,2,…,$b-1$ 这 b 种情况.这样我们把自然数按余数分为 b 类.

例如除数为 2,即 $b=2$ 时,余数只能是 0 和 1 两种情况.

这样我们把自然数分为被 2 除余数为 0 的类，记为 $2k$，叫偶数；余数为 1 的类，记为 $2k+1$，叫奇数. 每一自然数一定在这两类的某一类中.

一个整数被 3 除，即 $b=3$ 时，余数 r 只能是 0、1、2 中的一个. 因此所有整数按照被 3 除时的余数分为三类. 即 $3k$、$3k+1$、$3k+2$. 任何整数在这三类的一类中. 由于 $3k+2=3(k+1)-1$，所以，有时也将这三类记为 $3k-1, 3k, 3k+1$.

同样，除数为 5 时，可将整数分为五类，即 $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ 或记为 $5k, 5k\pm1, 5k\pm2$.

例3 假设一种食品需凭票证购买. 证明购买超过 17 千克这种食品，只需用 3 千克和 5 千克面额的票证支付，无需找补.

分析 此题的难点在于无法确定购粮的千克数. 但无论购多少千克食品，如果用 3 千克的票证支付，于是可将购食品的千克数 n 被 3 除后的余数分为三类. 即：

(1) 若买食品 $n=3k$ 千克，显然只用 3 千克的票证支付即可.

(2) 若买食品 $n=3k+1$ 千克（$3k+1>17$），显然 $k>5$. 又 $3k+1=10+3(k-3)$，所以可支付 2 张 5 千克的票证，$k-3$ 张 3 千克的票证.

(3) 若买食品 $n=3k+2$ 千克（$3k+2>17$），显然 $k>5$. 又因 $n=3k+2=20+3(k-6)$，故可用 4 张 5 千克的票证和 $k-6$ 张 3 千克的票证支付.

证明：（略）.

评注 这种利用余数分类的思想，可将研究对象的范围缩小，便于讨论分析，是解数学问题的重要思想方法.

例 4 在已知数列 1、4、8、10、16、19、21、25、30、43 中，相邻若干数之和能被 11 整除分为一组，问这样的组共有多少？

分析 若将各个和求出来，再依次检查它们能否被 11 整除，显然这样解太复杂. 现将考查的情况范围缩小，研究它们被 11 除的余数.

解：因为 $1 = 0 \times 11 + 1$，$4 = 0 \times 11 + 4$，$8 = 1 \times 11 + (-3)$，$10 = 1 \times 11 + (-1)$，$16 = 1 \times 11 + 5$，$19 = 2 \times 11 + (-3)$，$21 = 2 \times 11 + (-1)$，$25 = 2 \times 11 + 3$，$30 = 3 \times 11 + (-3)$，$43 = 4 \times 11 + (-1)$.

显然，对于原数列若干相邻数之和是否能被 11 整除，只须研究它们的余数之和能否被 11 整除. 为此，依次列出原数列中各数被 11 除的余数(如图 1—1 所示).

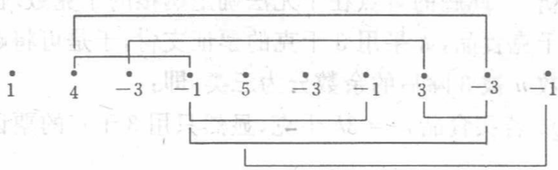


图 1—1

符号┌──┐与└──┘表示线下与线上几个余数，显然它们之和均为 0. 因此，它们所对应的几个数之和能被 11 整除. 由图 1—1 知，满足条件的数共 7 组.

练　习

1. 选择题：

(1) 如果 $a \div b$ 的商是 111 余 24，此时 b 的最小值是(　　)

(A) 23. (B) 25. (C) 28. (D) 33.

(2) a 除以7余2,b除以7余5,当$a^2>3b$时,a^2-3b除以7的余数是( )

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

2. 填空题:

(1)"五一节"是星期一,"国庆节"是星期____;

(2) 一个整数除300,262,205得到的余数相同,这个整数是____.

3. 求一个最大数,用它去除13511、13903和14589所得余数相同.

4. 求证:任意一个大于23的自然数,都可以由若干个5和7相加而得.

5. 证明:如果两个整数被同一正整数相除时余数相等,那么这两个整数之差,一定能被这个正整数整除.

6. 试证方程$x^2-4y^2=3$无整数解.

二　不等式及其应用

不等式是数学的主要内容,也是学习数学不可缺少的工具,应用十分广泛.本章主要介绍解不等式的一些技巧,以及不等式的一些应用.

第三课　解不等式

解不等式主要根据不等式的性质以及整式恒等变形的有关知识和技巧.

例1　解不等式 $\dfrac{2x-3}{x+1}>1$.

分析　解分式不等式时,一般将它化为整式不等式组.

解1:原不等式化为 $\dfrac{x-4}{x+1}>0$.

上式表明 $x-4$ 与 $x+1$ 之商为正,所以 $x-4$ 与 $x+1$ 同号,于是可得

$$\begin{cases}x-4>0,\\x+1>0;\end{cases}\quad \text{或} \quad \begin{cases}x-4<0,\\x+1<0.\end{cases}$$

解得 $x>4$ 或 $x<-1$.

故原不等式的解为 $x>4$ 或 $x<-1$.

分析　不等式 $\dfrac{x-4}{x+1}>0$ 的解,是由 $x-4$ 与 $x+1$ 的符号确定的.为确定 $x-4$ 与 $x+1$ 的符号,可令 $x-4=0$ 与 $x+1=0$,得 $x=4$ 与 $x=-1$.由 $x=-1$ 或 4 将实数从小到大分为三部分,在每一部分内便可确定每个式子的符号.