现代数学译丛

非线性与泛函分析

M. S. 博格 著

科学出版社

现代数学译丛

非线性与泛函分析

M. S. 博格 著

余庆余 译

陈文塬 校

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书系统地阐述了非线性泛函分析中的基本理论、方法、工具和结果，如隐函数定理、拓扑方法、变分方法、歧点理论等以及有着广泛应用的各种非线性算子. 此外，还介绍了这门学科在经典的以及现代的数学物理中各种问题上的大量应用. 本书内容丰富、全面、系统，可供大学数学系高年级学生和教师以及从事数学、数学物理和力学等工作的科技人员阅读参考.

M. S Berger
NONLINEARITY AND FUNCTIONAL ANALYSIS
Academic Press, 1977

现代数学译丛
非线性与泛函分析
M. S. 博格 著
余庆余 译
陈文𡩋 校
责任编辑 张晓凌 夏墨英
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1989年11月第一版 开本：850×1168 1/32
1989年11月第一次印刷 印张：16 1/4
印数：0001—4 215 字数：423,000
ISBN 7-03-000672-0/O · 181
定价：19.50元

序　　言

近几十年来，数学界对有关线性算子的问题和把线性代数的已知结果推广到无穷维空间的问题给予了极大的重视．这是很有远见的．由此导出的丰富理论对整个数学产生了深远的影响．然而，当人们去掉线性的假定时，算子理论以及有关的许多具体问题展示出数学研究的一个崭新领域．在这方面迄今得到的基本结果已经使线性理论得到完善和深入的发展．和线性的情形一样，这些结果是由数学分析中的具体问题引出来的，并和它们有着密切的联系． 这本讲义的目的就是系统地讲授这些基本的非线性结果，以及它们对数学分析各个领域中不同具体问题的应用．

依照 Henri Poincaré（我们这门学科的一个伟大先驱）的想法，我这里是在最广泛的意义下使用"数学分析"这个术语的．的确，仔细审查那些在实或复流形的微分几何、经典的和现代数学物理以及变分学的研究中所出现的具体的非线性问题，就会发现许多反复出现的典型问题，而它们必将导致深刻的数学结果．

从抽象的观点看，处理上述课题基本上有两条途径．第一条是，像上面提到的，将线性泛函分析中，由 Fredholm, Hilbert, Riesz, Banach 和 von Neumann 等人获得的结果推广到更一般的非线性的情形．第二条途径是，把这门学科看作流形和流形间映射的无穷维微分几何学．显然，这两者紧密相关．当它们和现代拓扑结合在一起时，就成了强有力的数学思想的一个典范．

最后，在这两种方法之外，还有一种本质上既是非线性的，又是无穷维的现象．认识这种事物的框架正处在发展之中．

本书要讲的材料分为三部分，每部分都包括两章．第一部分首先提供了为理解后面内容所需要的背景材料以及数学上的预备知识．其次，讲述非线性算子的初等微积分学和分类．第二部分

讨论局部分析．第三章论述了古典反函数和隐函数定理在无穷维时的各种推广，以及研究算子方程的 Newton 法、最速下降法、强函数法．在第四章，我把注意力转向那些与歧点和奇扰动有关的参数相依扰动现象．在这一章，拓扑（“超越”）方法的应用是本质的．本书的第三部分（也是最后一部分）讲述大范围分析，指出把具体分析和抽象方法结合起来的必要性．第五章发展了可用于一般算子的整体性方法．这章还特别介绍了映射度的各种理论和应用，以及它与球面高阶同伦群有关的最新进展，还介绍了线性化方法和投影法．第六章介绍大范围变分学和它在现代临界点理论中的发展．这个材料自然是从与高型临界点有关的极小化问题和等周问题中引伸出来的．

本书的一个重要课题是把得到的抽象结果用于解决几何学和物理学中饶有趣味的问题．选择所讲述的应用时，既考虑到其自身的意义，也注意到它们与书中所介绍的抽象内容的关系．在很多情形中，具体的例子要求对理论作一些推广，因此它也为理论的进一步发展提供了动力．我希望所涉及的一些较深的和较复杂的应用将提高这门迅速发展的学科的价值和意义．

此外，我选取了一些非线性问题作为我们抽象化的模型，它们包括：

(i) 确定非线性常微分方程组的周期解；

(ii) 各类半线性椭圆型偏微分方程的 Dirichlet 问题；

(iii) 在给定的紧流形上，确定“最简”度量的微分几何问题（这里“最简”指常曲率）；

(iv) 非线性弹性的 von Kármán 方程解的结构．

所有这些模型说明需要发展新的理论，需要更精巧、更深刻的研究方法．另外，这些问题的古典性表明，对不太经典的非线性问题抽象本质的研究还是大有可为的．

本书叙述的很多抽象结果和应用都是近代的成果，我希望它们构成整个发展的一个统一体系，这个体系不同于这门学科的已有专著，在选材时是相当主观的．为使本书篇幅不致过大，很多重

要的题目仅仅是粗略提及，提到时讲得也很少．有关半序 Banach 空间、变分不等式、凸分析、单调映象、抛物型和双曲型偏微分方程的材料都略去了，关于这些课题已经有了很多现代专著和综述文章．本书的风格略有不同，我迴避了过于特殊以致不能阐明所提到的一般原理的那些应用，二阶非线性微分方程两点边值问题就是一个例子．这样的问题可以(例如)用相平面法成功地加以解决．最后，现代物理学的"Euclid"场论方法已经指出，非线性双曲型方程组常常可以借助于这里解决的非线性椭圆型边值问题来处理．

本书是在几年中写成的．不可避免会出现各种印刷错误，欢迎读者把所发现的错误通知我，以便今后订正．我希望这里讲述的材料有着充分的连贯性，饶有风趣和富有吸引力，给读者提供一个进一步探讨非线性分析的一个框架．

本书略去了很多有趣的非线性问题和解释的例子，以使篇幅不致太大．我打算在不久的将来完成另一卷书，它将包括这些问题以及同样有启迪但更常规的问题．该书还将包括一个更完备的文献索引．

记号和术语

Ω	N维实 Euclid 空间$\mathbf{R}^N$中的开子集
$\mathfrak{M}^N$	N维光滑流形
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	$\mathbf{R}^N$中点x的 Descartes 坐标
$D_i=\partial/\partial x_i$	对定义在Ω上的函数求一阶偏导数的运算
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$	重指数
$\|\alpha\|$	$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$
D^α	$\prod_{i=1}^{N}D_i^{\alpha_i}$
$F(x,D^\beta u,D^m u)$	m阶的微分算子，显式地依赖于m阶的高阶微分算子 D^α，其中 $\|\beta\|<m$
X	函数的线性向量空间
线性算子F	对任意 $f,g\in X$，以及数α,β，都有 $F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$
非线性算子F	一个算子,不必是线性的
拟线性微分算子 $F(x,D^\beta f,D^\alpha f)$	当看作最高阶微分算子 $D^\alpha f$ 的函数时，F是线性微分算子
定义在Ω上的微分方程	两个微分算子间的方程，在Ω的每一点成立
古典解	定义在Ω上的(充分光滑的)函数，在Ω的每一点都满足方程
$\|x\|$	向量 $x\in\mathbf{R}^N$ 的长度
$\\|u\\|$	Banach 空间X元素u的范数
绝对常数	在不等式 $F(x)\leqslant cG(x)$ 中用到,意指当

x 变化时 c 与 x 无关

半范　　定义在 X 上的非负函数 g，满足 $g(\alpha x)=|\alpha|g(x)$ 和 $g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$

给读者的建议

本书试图把数学分析的某些方面和科学的其它领域结合起来．要达到这个目的，就必须对问题的来源给予更多的说明，并要求给出一个通常教科书中没有的创造性的方法．

第一章和第二章提供问题的背景和预备知识，可以不去读它．建议读者跳过它们去读那些他感兴趣的东西，直接读后面的章节．当需要时再回过头来读第一部分，以补充所需要的知识．在此，并没有要求读者把这本书依次从头读到底．

从性质上来说，第三章是抽象的，并且发展了一个使用“泛函分析”语言的工具．对于后面的整个内容来说，第三章的前三节是必需的．与此相反，第四章整个是属于应用的．事实上，要想对参数相依性局部分析有个真正的了解，必须仔细思考一些具体的经典的模型．当然，读者可以只选择那些他感兴趣的应用．

第三部分可以分开来读．例如，第五章包括三条平行发展的线索：5.1 节，5.2 节和 5.3 节—5.5 节(当然，要想理解得深刻，必须把三条线都融汇起来)．类似地，第六章自然地分成三部分：6.1 节—6.2 节，6.3 节—6.4 节，以及 6.5 节—6.7 节．前两部分没有用到拓扑方法，但是，对于第三部分来说，拓扑方法却是本质的．

我们要求读者具备一些预备知识，其中包括常规的线性泛函分析、常微分方程以及偏微分方程的知识．如果对大学里所讲授的物理学和微分几何再有些了解，那对于理解有关应用的那些部分是有帮助的．这些应用处理得比较简洁，并具有不同程度的彻底性．把每个应用和传统的更详尽的处理方式加以比较将是有益的．我的打算是向读者提供这门学科的一个概况，使他们对它的范围、效用和分枝有所了解．同时，对于关键的思想又不致模糊．

目　　录

第一部分　预 备 知 识

第二部分 局部分析

第三部分 大范围分析

第一部分 预备知识

在微分几何和数学物理中，以及在很多其它科学领域里，很多问题都和非线性微分方程组的求解有关．但是，因为这些方程组大多数都是“不可积的”，即是说，它们的解不能用闭型写出．一般说来，研究这些方程的经典方法失效，于是要求寻找新的方法．近年来已找到研究这些问题的一个新方法，它既比较有效，又简单易懂．这个方法本质上在于：用函数空间的语言把所给的问题加以改写；然后，借助于泛函分析的方法，对这个抽象问题尽可能完善地加以分析；最后再把所得的结果进行“翻译”，以回到原来的问题．从几个方面来说，这个一般方法都是重要的：首先，它去掉了无关紧要的枝节，更易于揭示出该问题的分析核心．其次，表面上看来不同的问题可以用同一个理论来处理．最后，能够清楚地确定，哪些抽象结构将是研究新颖的非线性现象的基础．今后我们要描述这些思想的轮廓，以及(非线性)泛函分析和具体问题之间的相互作用．

第一部分的目的

和其它众多的数学领域不同，即使在最简单的例子中，我们所要讨论的问题也是以把各种不同特性的内在“结构”结合在一起而为其特点．于是，虽然这里提出的大多数问题是容易陈述的，但要真正充分理解所给问题的解答却需要大量预备知识．所以第一部分的目的有以下四个方面：

i) 系统地列出这些预备知识；

ii) 导出今后要研究的各类具体问题；

iii) 指出用适当的抽象非线性算子改写具体问题的必要步

骤；

iv）发展抽象算子的微积分学.

第一章处理前两个问题，而第二章探讨后两个内容.