高等学校教学用書

向量分析講义

Г. Е. 希洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

向量分析講义

Г. Е. 希洛夫 著
方德植 林坚冰 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1954年出版的希洛夫（Г. Е. Шилов）著“向量分析講义”（Лекции по Векторному Анализу）譯出。原書經苏联文化部高等教育司审定为综合大学物理—数学系教学参考書。

向 量 分 析 講 义

Г. Е. 希 洛 夫 著

方 德 植　　林 坚 冰 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第051号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号 13010·381　開本 850×1168 1/32　印張 1　字數 5,000　印數 0001—4,500

1957年12月第1版　1957年12月北京第1次印刷　定價（5）¥ 0.48

序　言

在数学的物理应用上——在流体力学，电动力学，彈性理論上——向量分析的作用是大家都知道的。本書和許多通行的关于向量分析的著作（例如，H. E. 柯欽的，Я. С. 杜布諾夫的，以及B. И. 斯米尔諾夫的"高等数学教程"第二卷）不同的地方在于：它是建立在向量分析这一科目本身的完整的邏輯結構上面。古典的向量分析算子——梯度，散度以及旋度——在这里予以直接的定义。这种定义并沒有牽涉到坐标系以及按坐标求微分。因此，对于可能的向量場的范圍作某些扩大之下（超出一般所考虑的帶有可微分分量的向量場的范圍），我們就有可能达到一定的思維的完整性以及理論上的完美性。这种完美性，例如，可以表現在第十一章关于逆問題可解性的条件的陈述上。这条件对于所求的向量場的散度及旋度并沒有附加任何光滑性的要求。为着建立这問題最明显的解答，还要用到兩个互为配極型的向量場，那就是連續分布質量的引力場和連續分布电流的磁力場。通过全書各章节我們对此二向量場作了系統的探討；其中一个具零旋度，而另一个具零散度。最后，利用区域的可加函数——取其初等形式——像得到"关于按照区域的密度来建立各种区域的可加函数"的定理一样。也可以使得用同一观点来得到基本定理（奥斯特罗格拉得斯基-司托克斯型）。因此，細心的讀者会看出在某些情況下，特别是，在我們考虑多少帶有任意給定的散度和旋度的向量場的时候，以司梯則积分代替黎曼积分就可以得到更普遍的結果。但是，我們还是局限在散度和旋度只是連續（或分段連續）的場合。首先，是由于在这样实际上最普遍的場类中，結構上的完整性才得到保証，其次，也达到最大的显易性。

本書的基本内容是作者最近几年在以 M. B. 罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学以及以 T. Г. 舍甫欽柯命名的国立基輔大学所担任的課程——必修的以及專業的——的某些講稿所組成的。

Г. E. 希洛夫

目　　录

緒　論

要了解这本書的基本內容，一方面必須掌握向量代数，另一方面还要掌握多元函数的微积分学的一般知識。我們將自由地运用一些基本概念，像空間曲綫的弧長，曲面的面积，以及給定一个函数沿着曲綫，沿着曲面的积分等等。在这里所考慮的一切曲綫及曲面按其微分結構来說是相当簡單的，例如，要求光滑或由有限个光滑弧所組成(分段光滑)。讓我們来回忆一下：所謂光滑曲綫是指在它的每一个点的鄰近，只要适当地选擇坐标軸就可以表示为方程：

$$y=y(x),\ z=z(x),$$

其中函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 都是連續的，而且有連續的一級微商；同样的，所謂光滑的曲面是指在他的每一个点的鄰近，只要适当地选擇坐标軸就可以表示为方程：

$$z=z(x, y),$$

其中函数 $z(x, y)$ 是連續的而且有連續的一級微商。至于分段光滑的条件是保証曲綫的切綫(除了有限个角点)以及曲面的切面(除了有限条角綫)的存在和連續的变化。

关于符号方面还要交代几句話。此后向量是以粗号的拉丁字母表示。向量 **p**, **q** 的数量积以(**p**, **q**)表示，向量积以[**p**, **q**]表示。

空間的点通常用大写字母 A, B, M, P 等等来表示，曲綫用 L, Γ(必要时再加上附标)，曲面用 S, Σ，而空間区域用 G, V 来表示。我們也用这些同样的字母来表示曲綫的長度，曲面的面积以及区域的体积。这样記法是不会引起混乱的，因为从上下文立刻就可以明白所指的是什么，例如，所指的是曲綫本身或是他的長度。

在空間中(或曲面上)的区域称为閉的或开的，看他是否包含

它的所有边界点而定。

包含在积分表达式下的弧長單元，面积單元以及体积單元分别以 $dl, d\sigma, dv$ 表示；如果还要指出积分的变点（像在具参数的积分中），那末我們就写成 $dl(M), d\sigma(M), dv(M)$。积分符号的数目表示积分区域的維数；沿着閉曲綫(即圍着某一个有限的曲面)或閉曲面(即圍着某一个有限的体积)的积分也需要对应的积分符号；例如，函数 $f(M)$ 沿着閉曲面 Σ 的积分可表示为

$$\oiint_{\Sigma} f(M)d\sigma \quad \text{或} \quad \oiint_{\Sigma} f(M)d\sigma(M).$$

我們不但可以积分点的数量函数，而且也可以积分点的向量函数。如果 $\mathbf{R}(M)$ 是向量函数，那末，积分

$$\iiint_V \mathbf{R}(M)dv(M) \tag{1}$$

就認为是通常的积分和

$$\sum_i \mathbf{R}(M_i)\Delta v_i$$

的極限。当函数 $\mathbf{R}(M)$ 到处連續时，这个極限总是存在的(显然，它还是一个向量)。另一方面，如果把向量 $\mathbf{R}(M)$ 按坐标軸分解为分量的和

$$\mathbf{R}(M)=X(M)\mathbf{i}+Y(M)\mathbf{j}+Z(M)\mathbf{k},$$

那末积分(1)就化为三个通常的积分：

$$\iiint_V \mathbf{R}(M)dv(M)=\mathbf{i}\iiint_V X(M)dv(M)+$$

$$+\mathbf{j}\iiint_V Y(M)dv(M)+\mathbf{k}\iiint_V Z(M)dv(M).$$

从点 A 到点 B 的距离以 $r(A, B)$ 表示。如果 F 是某一点集，则 $r(A, F)$ 表示点 A 到 F 的距离，按定义說，就是从 A 到点 $B \in F$

的距离的下确界。

附录中，在"广义重积分"这个标题下，我們介紹多元函数的微积分学的一些概念和定理。这些概念和定理并不是經常在教科書或必修課程中都找得到的，但是对于本書的正文有某种独立的意义而且也常要用到的。

第一章　数量場及向量場·实例

場这个概念是向量分析的基础，它是借用于物理学和力学而且也是現实世界的一定数量关系和空間形式的一种表示方式。

如果对于空間（或空間的区域）的每一点 M 对应某一数量 $f(M)$，那末我們說給定了一个数量場。

因此，从邏輯方面来說，数量場的概念和函数的概念相比較并沒有包含任何新的内容，可是我們仍保留这沿用的术語——“場”——，以便照顧到而且强調这概念自身的起源和物理意义。

举出具有直接物理意义的数量場的实例是很容易的。例如观察并研究伏特計电極四周的温度場。在气象学上要研究大气的压力場。

比較复杂的例子是在連續介質力学中所考虑的質量的密度場。如果在体积 V 中充滿着質量，那末对于包含 Δm 克質量的区域 ΔV，我們定义这介質的平均密度为 Δm 与 ΔV 的比：$\mu(\Delta V)=$ $=\Delta m:\Delta V$。固定一点 $M\in V$ 再考虑一串区域 ΔV_n，当 $n\to\infty$ 时，它們收縮于点 M。对于每一个区域 ΔV_n，我們分别得其平均密度 μ_n。和在連續介質力学中通常所做的一样，我們假定对于任意选擇的一串区域，当 $n\to\infty$ 时，μ_n 都有一个确定的極限 $\mu=\lim\mu_n=$ $=\mu(M)$，这 $\mu(M)$ 与序列 ΔV_n 的选擇無关。在这种狀况下所得到的量 $\mu(M)$ 称为在点 M 質量的（真正）密度。假若密度 $\mu(M)$ 在区域 V 中每一点 M 都有定义，那末函数 $\mu(M)$ 在这个区域中就構成了一个数量場。我們称之为質量的密度場。

同样地，在电动力学中，对于充滿着电荷 q 的一个区域 V 也可以引入电荷密度的数量場。这个場在每一点 M 的数量是由比 $\Delta q:\Delta V$ 的極限来定义的，其中 Δq 为 ΔV 体积中的电荷量，体积

ΔV 收縮于一点 M 的过程和上面所述的一样。

現在我們来考虑向量場。

如果对于空間(或空間的区域)的每一点 P 对应有某一向量 $\mathbf{R}(P)$, 那么我們說給定了个一向量場。

与数量場的情况一样，向量場的概念和向量函数的概念在实質上是一样的；保留这沿用的术語——向量場——是为着保留这个概念的几何和物理的意义。

引力場是向量場的重要的物理学实例之一。假定在空間中分布有質量，那么按牛頓定律位于点 P 的單位質量有一引力 $\mathbf{F}(P)$, 这个引力就称为在点 P 的引力場的强度，其明确的表示式以后再加以叙述。对应于空間中一切的点的向量 $\mathbf{F}(P)$ 全体構成一个向量場，这个場称为給定質量系的引力場。

現在我們要建立关于力 $\mathbf{F}(P)$ 的公式。

若引力場只由一个位于点 M_0 的質量 m_0 所产生的，那么按牛頓定律这个向量場 $\mathbf{F}(P)$ 的强度在适当的單位制下可以写成公式

$$\mathbf{F}(P)=\frac{m_0}{r^2(P,M_0)}\mathbf{e}(P,M_0), \tag{1}$$

其中 $r(P,M_0)$ 表示連結 P 和 M_0 綫段的長度，而 $\mathbf{e}(P,M_0)$ 表示由点 P 到点 M_0 的方向的單位向量。自然，这里还要假定 P 和 M_0 不是同一点。

假定引力場不是由一个而是由几个(例如 n 个)分别位于点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 所产生的，那么他們每一个作用于点 P 的單位質量的力可得自与(1)相类似的公式。这些質量作用的总和，按照力的加法定律可表示为向量的和

$$\mathbf{F}=\frac{m_1}{r^2(P,M_1)}\mathbf{e}(P,M_1)+\cdots+\frac{m_n}{r^2(P,M_n)}\mathbf{e}(P,M_n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r^2(P,M_j)}\mathbf{e}(P,M_j), \tag{2}$$

这里要加一个条件，那就是点 P 与任何一点 M_j 不重合。

現在我們再看質量連續分布在有限体积 V 上的情形，其分布密度 $\mu(M)$ 是分段連續的。首先，我們还假定 P 点是在体积 V 的外面。

將体积 V 分为 n 个小体积 $dV_j(j=1, 2, \cdots, n)$，并且以 dm_j 表示体积 dV_j 内所含的質量。

很自然地我們可以認为質量單元 dm_j 对于在点 P 的單位質量的作用力 dF_j 就像是把这 dm_j 集中在 dV_j 中任意一点（例如在点 M_j）一样。这就使得我們能够用剛才所得到的公式来表示力

$$d\mathbf{F}_j=\frac{dm_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j)=\frac{\mu(M_j)dv_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j).$$

沿整个体积 V 积分，我們就得到总引力的表达式：

$$\mathbf{F}(P)=\iiint\limits_V \mu(M)\frac{\mathbf{e}(P, M)}{r^2(P, M)}dv(M). \tag{3}$$

注意，积分(3)不但对于 V 的外点，而且对于 V 的内点都有定义。在后一种情况，积分是广义的，但还是存在的，因为分母中的量 $r(P, M)$ 是以二次冪出現（見附录引理 1）。

当研究物質运动时，我們还会碰到一个新的向量場的物理学实例。假定某一連續介質，例如連續分布的質量，在运动。那么在所考虑的空間区域中每一点 M，可对应一向量 $\mathbf{u}(M)$，它等于那一瞬間在点 M 的質粒的速度。在每瞬間对全部点 M 的向量 $\mathbf{u}(M)$ 的全体構成一向量場，即运动質粒的速度場。

物質密度 $\mu(M)$ 和速度 $\mathbf{u}(M)$ 的乘积形成一个新的向量，称之为冲量密度。于是又得到一个新的向量場——冲量密度場。

將冲量密度再乘以体积單元 ΔV 所得到的乘积 $(\mu\Delta V)\mathbf{u}(M)=\Delta m\cdot\mathbf{u}(M)$，恰好是体积單元 ΔV 内質粒的冲量。

假定电荷在运动，那么，这种运动在物理学上称之为电流。速度 $\mathbf{u}(M)$ 与电荷密度 $q(M)$ 的乘积称为（体积的）电流密度。电流

密度向量記做 $\mathbf{j}(M)$，所对应的向量場称为电流場。乘电流密度以体积單元 ΔV 所得到的乘积 $\Delta \mathbf{J}(M)=\mathbf{j}(M)\Delta V$ 称为电流單元。

和質量运动不同，电流产生一个新的物理現象——磁力現象，这可以利用磁針作实驗而加以証实。根据比屋-薩尼尔定律由电流單元 $\Delta \mathbf{J}(M)$ 在点 P 所产生的磁力 $\Delta \mathbf{H}(P)$ 在适当的單位制下可按如下的公式計算：

$$\Delta \mathbf{H}(P)=\frac{[\Delta \mathbf{J}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}=\frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}\Delta V.$$

沿充滿着电流的体积积分。我們就得到在 P 点的总磁力：

$$\mathbf{H}(P)=\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)} dv(M). \qquad (4)$$

类似于积分(4)的积分在其他数学物理的領域中也碰到过(例如在流体力学中流質运动的渦流現象)。所对应的向量場在那里有着完全不同的物理意义。

为着有可能用同一的数学观点来探討这些物理上不同的現象，对于每一个定义在体积 V 内的(連續的或分段連續的)向量場 $\mathbf{j}(M)$，我們都按以下的公式对应一个新的向量場 $\mathbf{H}(P)$。

$$\mathbf{H}(P)=\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)} dv(M), \qquad (5)$$

其中 V 是向量場 $\mathbf{j}(M)$ 所在的区域。(假若这个区域不是有界的，那么，为了使积分(5)存在需要附加条件，那就是場 $\mathbf{j}(M)$ 在無穷远处要減少得相当快，例如，当場 $\mathbf{j}(M)$ 在有界区域 V 以外等于零，則积分(5)显然存在)。場 $\mathbf{H}(P)$ 称为向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場。

注意：場 $\mathbf{H}(P)$ 在 $\mathbf{j}(M)$ 所在体积 V 的內外都存在。在体积內点这积分是广义的，但还是收斂的，因为分母中的量 $r(M, P)$ 以二次冪出現(附录引理 1)。

物理学中有时所考虑的电流是沿着無厚度的曲面流动，更多情况是沿着曲綫(导体)流动。在这种情况下要引入电流的綫密度或面密度的概念。

考虑沿着一个無粗細的导綫流动的电流，在点 M 电荷流速 $\mathbf{u}(M)$ 与电荷綫密度的乘积，称之为在点 M 的綫电流密度。在这种情况下，电流單元是指电流密度 $\mathbf{u}(M)q(M)$ 与导綫在点 M 处所取弧長單元 Δl 的乘积。

这时，对应的磁力場是按以下的公式求得

$$\mathbf{H}(P)=\int_L \frac{[\mathbf{j}(M),\mathbf{e}(M,P)]}{r^2(M,P)}dl(M). \qquad (6)$$

这个积分对于在曲綫 L 外面的点 P 是存在的。

在一般的情况下，假定 $\mathbf{j}(M)$ 是任意綫性向量場（即沿着曲綫 L 定义的向量函数 $\mathbf{j}(M)$ 在每一点 M 的方向都切于 L)，那么对积分(6)我們也称为向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場。

我們再考虑积分(6)的一个重要的特殊情形，就是当 L 是一条直綫而向量 $\mathbf{j}(M)$ 在每一点 $M\in L$ 有定長 j。

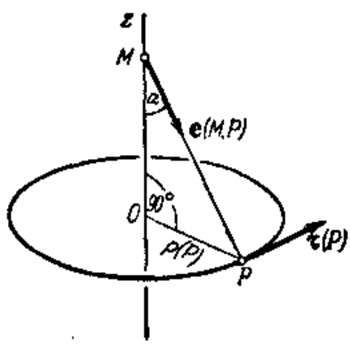

圖 1.

从物理学上来說，这种情况就对应于沿着無限長直导綫均匀流动的电流的磁場。

取导綫为 Oz 軸，其正向为电流流动的方向。由 P 作 Oz 軸的垂綫，其垂足取作坐标原点 O; 这垂綫長度記做 $\rho(P)$。

若 α 为角度 OMP, 由圖 1, 立刻得到

$$[\mathbf{j}(M),\mathbf{e}(M,P)]=j\sin\alpha\cdot\boldsymbol{\tau}(P),$$

其中 $\boldsymbol{\tau}(P)$ 是單位向量它在 P 点切于以 O 为中心 OP 为半徑的圓

Γ，圓所在的平面垂直于直綫 L。

其次
$$r(M,P)=\frac{\rho(P)}{\sin\alpha},\quad z=\rho(P)\operatorname{ctg}\alpha,$$

因之
$$dz=\frac{-\rho(P)d_{\alpha}}{\sin^2\alpha}.$$

于是我們得到 $d\mathbf{H}$ 的公式
$$d\mathbf{H}=\frac{[\mathbf{j}(M),\mathbf{e}(M,P)]}{r^2(M,P)}dz=-\frac{j\sin\alpha\,d\alpha}{\rho(P)}\boldsymbol{\tau}(P).\qquad(7)$$

沿全直綫积分这表达式，实际上就是对等式(7)右方的 α 积分，其积分限从 π 到 0：
$$\mathbf{H}(P)=-\frac{j\boldsymbol{\tau}(P)}{\rho(P)}\int_{\pi}^{0}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{2j}{\rho(P)}\boldsymbol{\tau}(P).\qquad(8)$$

因此，沿着直綫 L 定义的常向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場 $\mathbf{H}(P)$ 在每一点 P 的向量值可按公式(8)計算之。

注意，当点 P 离开 L 愈远，向量 $\mathbf{H}(P)$ 的長度愈減少，因为他是与 P 离开这直綫的距离的一次冪成反比的。

第二章 奥斯特罗格拉得斯基公式及其推广

在这一章里，我們要考虑多元函数积分学的基本公式——奥斯特罗格拉得斯基公式。这一公式連同其推广在此后研究数量場以及以坐标的可微函数为分量的向量場中是一个重要的工具。

奥氏公式 有名的單元函数的牛頓-萊布尼茲公式

$$\int_a^b \frac{dX(x)}{dx}dx = X(b) - X(a) \tag{1}$$

是在函数 $X(x)$ 的微商存在而且連續的假定下，把这个微商的积分表示为 $X(x)$ 自身的边界值。轉到多元——例如三元——函数以及沿三維区域的积分，我們必須期望在右方出現函数在区域边界上的数值；自然，当計算这些函数值的时候它將写成沿着区域边界某种曲面积分的形式。因此，我們考虑沿着以 Σ 为边界的区域 V 的积分

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}dv = \iiint\limits_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

其中被积函数$\dfrac{\partial X}{\partial x}(x, y, z)$是連續的；关于这个边界，暫时假定它与平行于 Ox 軸的每一条直綫至多交于二点。固定 y 及 z 对 x 求积分，再利用牛頓-萊布尼茲公式(1)，我們得到：

$$I = \iint\limits_{S_{yz}} [X(B) - X(A)]dy\,dz.$$

其中 AB 是积分段(其端点与 y, z 的值有关)．而 S_{yz} 是体积 V 在平面 Oyz 上的投影(見圖 2)。考虑曲面 Σ 在点 A 及 B 的單元

$d\sigma(A)$ 及 $d\sigma(B)$，并且以 $\mathbf{n}(A)$ 及 $\mathbf{n}(B)$ 表示对应的外法綫的單位量，这时显然，

$$dydz(B)=d\sigma(B)\cos(\widehat{\mathbf{n}(B),\mathbf{i}}),$$

$$dydz(A)=d\sigma(A)\cos(\widehat{\mathbf{n}(A),-\mathbf{i}})=-d\sigma(A)\cos(\widehat{\mathbf{n}(A),\mathbf{i}}).$$

所以，积分 I 可表示为曲面积分的形式：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}X(M)\cos(\widehat{\mathbf{n}(M),\mathbf{i}})d\sigma(M),$$

因此，所求的公式有如下的形式：

$$\iiint\limits_{V}\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}dv=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}X(M)\cos(\widehat{\mathbf{n}(M),\mathbf{i}})d\sigma(M). \qquad (3)$$

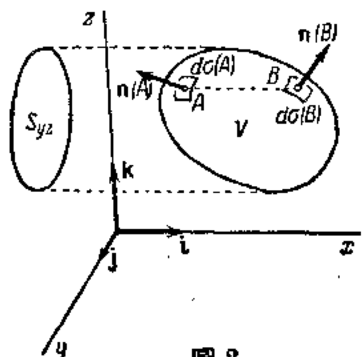

圖 2.

平行于 Ox 軸与区域 V 的边界至多相交二点的假定是容易除掉的。实际上，每一个区域都可以分解为有限个区域的和，使这些区域都满足我們的条件。对于一个区域写出公式(3)，然后相加，那么在左边我們得到沿整个区域 V 的积分；而在右边，凡是沿任何二分域的公共边界的积分恰好兩兩相消，因为对于这兩分域，在公共边界部分的法向量方向恰好相反；在它的和中剩下的只有沿这个区域自身的边界的积分。

写出与公式(3)类似的公式，其左方被积函数为 $Y(x,y,z)$ 关于 y 的偏微商以及 $Z(x,y,z)$ 关于 z 的偏微商。再將这些結果相加，我們就得到一个对称的公式，这个公式是由奥氏首先建立的(1834)：