XIAN
XING
GUI
HUA

线性规划

管梅谷 郑汉鼎

山东科学技术出版社

线 性 规 划

管梅谷　郑汉鼎

前　言

线性规划是运筹学的一个重要分支，它的应用极其广泛。大至整个国家的生产布局，物资调运；小至一个工厂或车间的生产安排，都可以用线性规划来进行计算，从而节约大量的人力、物力和资金。线性规划自产生以来的三十多年中，为生产部门节省的财富是无法估量的。

我国从 1958 年开始用线性规划来解决生产中的问题，并取得了一定的效果。我国四个现代化建设的需要，越来越多的人要求了解和掌握线性规划这一科学方法。为了满足广大读者的迫切需要，我们根据自己二十多年来的教学经验和科研成果，并参照国内外的最新资料，编著了《线性规划》这本书。

本书共分十四章：第一至第六章介绍了线性规划的一般理论与方法，这是最基本的内容；第八至第十二章介绍了“运输型”线性规划问题的有关理论与解法；第七、第十三、第十四章介绍了供读者进一步学习的材料和一些较近的结果。

本书既可以作为有志于研究线性规划理论和应用线性规划来解决生产实际问题的读者的入门书，也可以作为大学数学、经济、企业管理等专业的教科书，还可以作为研究生的教材。

目　录

第一章　线性规划问题

这一章，我们将列举一些简单的例子来阐明线性规划所研究的问题和它的数学模型及标准形式。还介绍两个变量的线性规划问题的图解方法，为下一章解线性规划问题的一般方法展开思路。

§1·1　线性规划所研究的问题

线性规划应用的范围是很广泛的，有物资运输、合理下料、资源利用等。

关于物资运输，先来看一个具体例子。要从甲城调出蔬菜2,000吨，从乙城调出蔬菜1,100吨，分别供应A地1,700吨、B地1,100吨、C地200吨、D地100吨。已知每吨运费如下表：

调出单位 \ 每吨运费 \ 供应单位	A地	B地	C地	D地
甲　城	21	25	7	15
乙　城	51	51	37	15

（单位：元）

假定运费与运量成正比。就是说，如果运1吨货物的运费是a，那么运K吨货物的运费就是ka。在这种情况下，采用不同的调拨计划，运费就可能不一样。例如，我们让甲城的2,000吨蔬菜分别供应给D地100吨，C地200吨，A地1700吨；让乙城的1,100吨蔬菜全部供应给B地。这种调拨计划可列下表表示：

	A地	B地	C地	D地	运出量
甲　城	1700	0	200	100	2000
乙　城	0	1100	0	0	1100
运入量	1700	1100	200	100	

这时候运费为：

$$1700\times21+200\times7+100\times15+1100\times51=94700\ (\text{元})。$$

如果让甲城的 2000 吨蔬菜分别供应给 A 地 1700 吨，B 地 100 吨，C 地 200 吨；让乙城的 1100 吨蔬菜分别供应给 B 地 1000 吨，D 地 100 吨，可列下表表示：

	A地	B地	C地	D地	运出量
甲　城	1700	100	200	0	2000
乙　城	0	1000	0	100	1100
运入量	1700	1100	200	100	

这时候运费是：

$$1700\times21+100\times25+200\times7+1000\times51+100\times15$$
$$=92100(\text{元})。$$

从运费可以看出：后一种调拨计划要比前一种节省运费 2600 元，即

$$94700-92100=2600(\text{元})。$$

那么还有没有更好的调拨计划呢？怎样找一个运费最省的调拨计划呢？我们可以把这个问题抽象成数学形式表示出来。

作一个蔬菜调拨计划就是给出从每一个产地运到每一个销地的蔬菜的数量。可以用变量 X_{ij} 来表示这些要找的数量，用 X_{11}，X_{12}，X_{13}，X_{14} 分别表示从甲城调往 A、B、C、D 四地的蔬菜数量，用 X_{21}，X_{22}，X_{23}，X_{24} 分别表示从乙城调往 A、B、C、D 四地的蔬菜数量。

从甲、乙两城分别调往A、B、C、D四地的蔬菜的数量的总和应该分别等于2000吨和1100吨。所以这些X_{ij}应该满足：

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=2000 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=1100 \end{cases} \qquad (1\cdot1)$$

运到A、B、C、D四地的蔬菜的数量应该分别是1700吨、1100吨、200吨、100吨。所以X_{ij}还应该满足：

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}=1700 \\ X_{12}+X_{22}=1100 \\ X_{13}+X_{23}=200 \\ X_{14}+X_{24}=100 \end{cases} \qquad (1\cdot2)$$

X_{ij}是运量，不能是负数，所以还应该满足：

$$X_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2,3,4) \qquad (1\cdot3)$$

除了满足上述要求以外，还应该使运费最省。单位运费已经由上面的表格列出。总的运费应该是所有的产地到销地的运量乘以运费再加起来，即

$$f=21X_{11}+25X_{12}+7X_{13}+15X_{14}+51X_{21}$$
$$+51X_{22}+37X_{23}+15X_{24}.$$

总起来说，我们要找的是X_{ij} ($i=1,2;\ j=1,2,3,4$) 在满足(1·1)，(1·2)，(1·3)的条件下，使f达到最小。写成数学形式就是：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=1700 \\ x_{12}+x_{22}=1100 \\ x_{13}+x_{23}=200 \\ x_{14}+x_{24}=100 \end{cases}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2;\ j=1,2,3,4$$

并且使 $f=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}$

$+15x_{24}$ 达到最小。

上面讲的是一个特殊的运输问题。一般的运输问题可以表达如下：设有若干地点（称为发点）$A_1,A_2,\cdots,A_m$，分别拥有某种物资 $a_1,a_2,\cdots,a_m$。现在要把这些物资调运给其他若干个需要这种物资的地点（称为收点）$B_1, B_2,\cdots, B_n$，而这些地点的需要量分别为 $b_1, b_2,\cdots, b_n$。已知从 A_i 运一个单位物资到 B_j 的运费为 c_{ij}。问应当如何分配这些物资，才能使运费达到最省（已知 $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$）。

用 x_{ij} 表示从 A_i 运到 B_j 的物资数量，则 x_{ij} 应该满足下列约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1·4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad j=1,2,\cdots,n \tag{1·5}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{1·6}$$

(1·4)式表示从 A_i 发出的物资总量是 a_i，(1·5)式表示在 B_j 处收到的物资总量是 b_j，(1·6) 式表示运输的物资数量是非负的。

运输问题可归结为：求 x_{ij} $(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$，满足(1·4)、(1·5)、(1·6)，并且使运输费用

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \text{ 达到最小。}$$

关于合理下料问题。某工厂有一批长度为 5 米的钢管（数量充分多），为制造零件的需要，要将它们截成长度分别为 1400 厘米、950 厘米、650 厘米的管料。而且，这三种管料要按 2:4:1 的比例配套生产，就是说每制造一个成品分别需要 2 根 1400 厘米、4 根 950 厘米、1 根 650 厘米的管料。

把一根一定长度的钢管截成几段需要的管料时，一般要产

生残料。例如，把 5 米的钢管截成 1400 厘米的 3 根和 650 厘米的 1 根，要剩残料 150 厘米。如果截成 1400 厘米的 2 根和 950 厘米的 2 根剩残料 300 厘米。现在的问题是如何截分才能使截下来的三种管料，既能配套，又能使残料最少。

下面，根据可能列出 8 种截法（残料明显很多的截法就不再列出来了）：

截法		1	2	3	4	5	6	7	8
长度	1400厘米	3	2	2	1	1	0	0	0
	950厘米	0	2	0	3	1	5	3	1
	650厘米	1	0	3	1	4	0	3	6
残料(厘米)		150	300	250	100	50	250	200	150

挑选其中一种省料的截法（例如截法 5），当然可以使残料最少，但是不能满足配套要求。所以我们必须同时采取若干种截法，配合起来，在完成配套要求的条件下，使总的残料最少。

用 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示采用第 i 种截法的钢管数目，那么截出的 1400 厘米的管料数目是：

$$3x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5.$$

截出的 900 厘米的管料数目是：

$$2x_2+3x_4+x_5+5x_6+3x_7+x_8.$$

截出的 650 厘米的管料数目是：

$$x_1+3x_3+x_4+4x_5+3x_7+6x_8.$$

根据配套要求，它们应该分别等于 $2a$, $4a$, a（a 是套数）。我们先让 a 等于某一个正整数，例如 $a=1$。求出 x_i（$i=1,2,\cdots,8$）以后，如果 x_i 是分数（以后可以看到 x_i 一定是有理数），就乘以 x_i（$i=1,2,\cdots,8$）的分母的最小公倍数。这时候残料 $S=150x_1+300x_2+250x_3+100x_4+50x_5+250x_6+200x_7+150x_8$。所以这个问题的数学形式就是：

求 x_j ($j=1,2,\cdots,8$)，满足：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5 &=2\\ \quad 2x_2+ \quad 3x_4+x_5+5x_6+3x_7+x_8 &=4\\ x_1 \quad +3x_3+x_4+4x_5 \quad +3x_7+6x_8 &=1\end{cases} \tag{1·7}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,8) \tag{1·8}$$

并且使 $f=150x_1+300x_2+250x_3+100x_4+50x_5+250x_6+200x_7+150x_8$ 达到最小。

关于资源利用问题。设某企业有 m 种不同的资源（如原料、能源、资金等）用来生产 n 种产品，用 a_{ij} 表示生产一个单位第 j 种产品所消耗的第 i 种资源的数量，用 C_j ($j=1,2,\cdots,n$)表示第 j 种产品的单位价值，而这个企业现存的第 i 种资源的数量是 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$。现在要来作一个能够充分利用现有资源的生产计划，使每种产品在不超过现有资源的条件下，总产值最大。

我们用 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示生产第 j 种产品的数量。由于所消耗的资源不能超过现有的数量，所以 x_j 必须满足：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1·9}$$

由于我们的目标是在以上约束条件下，使总产值 $f=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$ 达到最大。因此，显然还要使

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1·10}$$

上述几个例子，虽然有着不同的实际内容，但是它们的共同点都是求一组变量的值，这组值要满足一定的约束条件，如供求关系、生产任务、资源限制等。这种约束条件都可以用一组线性不等式或线性方程来表示，同时还要使某个指标（如总运费、总残料、总产值等）达到最小或最大，而这种指标又都可以用一个线性函数（称为目标函数）来表示。象具有这些特征的问题，就叫做线性规划问题。

§ 1·2 线性规划问题的数学模型

线性规划问题是具有下述形式的数学问题：

求 x_1, x_2,…, x_n, 满足下列条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \gtreqless {}^{*} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases} \tag{1·11}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \cdots, \ x_n \geqslant 0 \tag{1·12}$$

使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 达到最小（或最大）。条件(1·11)、(1·12)称为这个线性规划问题的约束条件，函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为目标函数。线性规划问题中的约束条件(1·11)的左端和目标函数都是变量 x_j($j = 1, 2, \cdots, n$) 的线性函数。

上面给出的线性规划模型中，是对不同的问题而言的，约束条件可以是线性方程组，也可以是线性不等式组。目标函数可以求最小值，也可以求最大值。为了方便起见，可用一种统一的标准形式表示出来。

求 x_1, x_2, …, x_n, 满足

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i{}^{*} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ &x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{1·13}$$

并且使

$$\min f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{1·14}$$

其他形式的线性规划问题都能变换成上述形式。

---

* 记号 $\gtreqless$ 表示 $\geqslant$，$=$，$\leqslant$ 三个符号中任意一个。

* 我们假设 $b_i \geqslant 0$。如果不是这样，可以在方程式两端同乘以(-1)。

（1）若给出了一个约束条件是不等式的线性规划问题，可以引入松弛变量 y_i，把不等式改成等式。原来的约束条件是：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i & i=1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j=1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1·15}$$

现在把它改成：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i & i=1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j=1, 2, \cdots, n \\ y_i \geqslant 0 & i=1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{1·16}$$

目标函数不动，得到一个新的线性规划问题。

很明显，用约束条件(1·16)解出线性规划问题的解以后，把 y_i 去掉，就是原来的线性规划问题的解。

当然，当(1·15)的不等式是≥号时，只要在(1·16)中把 y_i 的系数改成(－1)就行了。

（2）如果给出的线性规划问题是要求使目标函数达到最大，那么我们在目标函数上乘以(－1)，然后再求它达到最小，就与原问题一样了。

综上所述，一般线性规划问题就是找一组非负变量，满足一个线性方程组，并且使一个线性函数达到最小值。

以后可经常用向量的形式来写线性规划问题。

求向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1·17}$$

使 $$\min f(X) = CX.$$

这里 $P_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$，$C=(c_1, c_2,\cdots,c_n)$，$b=(b_1, b_2,\cdots,b_m)^T$，约束条件中的 0 代表零向量。

用矩阵的形式来叙述线性规划问题也可以，如：

求向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，满足

$$\begin{cases} AX=b \\ X\geqslant 0 \end{cases} \tag{1·18}$$

使 $$\min f(X)=CX.$$

这里，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T,$$

$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，0 表示零向量.

下面再引进两个概念：任何一组满足约束条件的解称为可行解；凡使目标函数达到最小值（最大值）的可行解称为最优解.

§1·3 两个变量的线性规划问题的图解法

给出这样一个两个变量的线性规划问题.

求 x_1，x_2，满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2 \\ x_1\geqslant c,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

并且使 $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ 达到最小（最大）.

用图解法来解这个问题. 在平面上取定一个直角坐标系，它的二个坐标是 x_1，x_2. 先来看平面上哪些点是可行解？

把满足约束条件(1·18)中 $a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1$ 的 x_1、x_2 看成平面上的一个点，这个点应该在什么地方呢？平面被直线 $a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$ 划分成两个半平面（图 1—1），这个点一定在这两个半平面的某一个上面（到底在哪一个半平面上，由系数 a_{11}，

a_{12}，b_1 很容易决定）。反过来，这个半平面上任何一点都满足不等式 $a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1$。所以可行解的全体在平面上就是下列四个半平面的交集（图 1—2）：

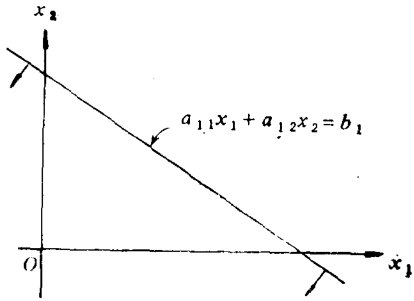

图 1—1

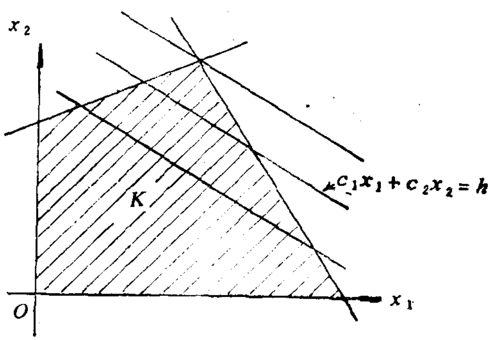

图 1—2

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2 \\ -x_1 \qquad\qquad\ \leqslant 0 \\ \qquad\qquad -x_2\leqslant 0 \end{cases}$$

这个交集可能是空集合。如果它不是空集合的话，那么它就是平面上的一个凸多边形，当然这个凸多边形可能是有界的，也