中等专业学校试用教材

管理数学

吉林机电专科学校　卢吟雪　主编

机械工业出版社

本书按工业企业管理类专业招收高中毕业生，学制为三年的教学大纲编写的。内容包括：线性代数、线性规划、图与网络初步、概率论、数理统计、马尔科夫链及排队论。

为便于读者掌握教材内容，各章都有大量例题和习题，并附有答案。

本书系中等专业学校工业企业管理类专业的试用教材。高等专科学校、职工大学、业余大学也可选用。企、事业管理人员和工程技术人员均可参考。

管 理 数 学

吉林机电专科学校　卢吟雪　主编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 25 1/2·字数 627 千字

1986年6月北京第一版·1986年6月北京第一次印刷

印数 00,001—17,700·定价 3.70元

*

统一书号：15033·6381

前 言

本书是根据机械工业部教育局审定的工业企业管理类专业招收高中毕业生，学制为三年的教学大纲编写的。

本书系中等专业学校工业企业管理类专业的试用教材。高等专科学校、职工大学、业余大学也可选用。企、事业管理人员和工程技术人员均可参考。

全书共分七章。第一章线性代数、第二章线性规划、第三章图与网络初步、第四章概率论、第五章数理统计、第六章马尔科夫链、第七章排队论。

本书第一、三、五章由董式娟编写，第二、七章由卢吟雪编写，第四、六章由郑丽谦编写。主编卢吟雪，主审司徒松晃。

在编写过程中得到郑大本、黄奕陀、马文德、孙守炎、孙桂云、苏健基、阙颂廉、刘生锋等同志的大力支持和帮助，并在审稿会议中提出了很多宝贵意见，仅在此表示衷心感谢。

限于编者水平，书中不妥之处，希望得到读者批评和指正。

编 者

1985年6月

目　录

第一章　线性代数 ······ 1
§1-1　n 阶行列式 ······ 1
一、n 阶行列式的概念 ······ 1
二、n 阶行列式的性质 ······ 5
三、行列式的按行（列）展开法 ······ 9
四、克莱姆法则 ······ 12
习题1-1 ······ 14
§1-2　矩阵的概念及运算 ······ 16
一、矩阵的概念 ······ 16
二、矩阵的运算 ······ 19
习题1-2 ······ 24
§1-3　逆阵 ······ 26
一、逆阵的概念 ······ 26
二、可逆方阵的性质 ······ 27
三、逆阵的求法 ······ 27
习题1-3 ······ 32
§1-4　分块矩阵 ······ 33
一、分块矩阵的概念 ······ 33
二、分块矩阵的运算 ······ 34
习题1-4 ······ 38
§1-5　向量组的线性相关性与矩阵的秩 ······ 38
一、n 维向量 ······ 38
二、向量组的线性相关与线性无关 ······ 39
三、矩阵的秩 ······ 44
四、利用初等变换求矩阵的秩 ······ 46
习题1-5 ······ 49
§1-6　线性方程组 ······ 50
一、线性方程组有解的条件 ······ 50
二、非齐次线性方程组解的表达式 ······ 51
三、齐次线性方程组解的表达式 ······ 56
四、齐次线性方程组解的结构 ······ 58
五、非齐次线性方程组解的结构 ······ 62
六、解线性方程组的高斯消去法 ······ 64
习题1-6 ······ 69
第二章　线性规划 ······ 71
§2-1　线性规划问题的数学模型 ······ 71
§2-2　两个变量线性规划问题的图解法 ······ 74
§2-3　代数法 ······ 77
一、线性规划问题的标准型 ······ 77
二、线性规划问题的解 ······ 80
三、代数法的求解步骤 ······ 82
习题2-1 ······ 85
§2-4　单纯形法的原理 ······ 88
一、初始基本可行解的确定 ······ 88
二、最优性检验 ······ 89
三、确定新的可行基的方法 ······ 91
四、旋转运算 ······ 92
§2-5　单纯形法的计算步骤 ······ 94
一、单纯形表的结构 ······ 94
二、单纯形法的计算步骤 ······ 95
§2-6　人工变量法 ······ 102
一、大M法 ······ 102
二、两阶段法 ······ 104
§2-7　应用举例 ······ 108
习题2-2 ······ 112
§2-8　表上作业法 ······ 113
一、平衡运输问题及其数学模型 ······ 114
二、表上作业法的计算过程 ······ 116
§2-9　不平衡运输问题及其解法 ······ 124
一、产量大于销量的不平衡运输问题 ······ 124
二、产量小于销量的不平衡运输问题 ······ 126
§2-10　应用举例 ······ 129
习题2-3 ······ 132
第三章　图与网络初步 ······ 133
§3-1　引言 ······ 133
§3-2　基本概念 ······ 134
一、图 ······ 134
二、有向图与无向图 ······ 134
三、网络 ······ 135
四、边（弧）与顶点的关系 ······ 136
五、链和圈、路和回路 ······ 136
六、子图 ······ 136
七、连通图 ······ 137
八、图的同构 ······ 137

§3-3 树和最小部分树……138
一、树的概念及其性质……138
二、图的部分树……139
三、最小部分树……141
§3-4 最短路……143
一、最短路的概念……143
二、最短路的性质……143
三、最短路的求法……143
四、应用问题举例……148
§3-5 网络的最大流……150
一、基本概念……151
二、最大流的求法——标号法……153
习题3……159
第四章 概率论……163
§4-1 随机事件及其概率……163
一、随机事件……163
二、随机事件的概率……170
三、古典概型……172
四、条件概率、概率乘法公式、事件的独立性……178
五、全概率公式、逆概率公式……182
六、重复独立试验……187
习题4-1……189
§4-2 随机变量与概率分布……191
一、随机变量……191
二、离散型随机变量及其概率分布……192
三、连续型随机变量及其概率分布……199
四、随机变量的函数的分布……212
习题4-2……215
§4-3 随机变量的数字特征……216
一、离散型随机变量的数学期望……217
二、连续型随机变量的数学期望……221
三、数学期望的简单性质及随机变量函数的期望公式……223
四、方差及其简单性质……226
五、原点矩与中心矩……231
习题4-3……232
§4-4 二维随机变量及其分布……233
一、二维随机变量及其分布函数……234
二、二维离散型随机变量及其概率分布……236
三、二维连续型随机变量及其分布密度……240
四、随机变量的相互独立性……243
§4-5 二维随机变量的数字特征……246
一、二维随机变量的函数的数学期望……246
二、数学期望与方差……247
三、协方差、相关系数……249
§4-6 大数定律和中心极限定理……253
一、大数定律……253
二、中心极限定理……257
习题4-4……260
第五章 数理统计……262
§5-1 基本知识……262
一、随机抽样法……262
二、总体、个体、简单随机样本……262
三、样本的分布……263
四、统计量……266
五、抽样分布（统计量的分布）……267
习题5-1……269
§5-2 参数估计……270
一、基本概念……270
二、点估计量的评价标准……272
三、点估计的方法……273
四、区间估计的方法……278
五、补充说明……284
习题5-2……284
§5-3 假设检验……285
一、基本概念……286
二、正态总体的期望的假设检验……288
三、正态总体的方差的假设检验……292
四、正态总体参数的单边检验……297
五、补充说明……298
习题5-3……299
§5-4 回归分析……300
一、基本概念……300
二、线性回归……302
三、线性回归方程的应用……310
四、补充说明……312
习题5-4……312
第六章 马尔可夫链……314
§6-1 随机过程的概念……314
一、随机过程的定义……314
二、随机过程的有限维分布族……315
三、随机过程的基本类型……316
§6-2 马尔可夫链……317

一、马尔可夫链 ……………………………317
二、切普曼—柯尔莫哥洛夫方程 …………318
§6-3 马尔可夫链的转移概率矩阵及链环转移图……………………………319
一、转移概率矩阵 …………………………319
二、链环转移图 ……………………………323
§6-4 马尔可夫链的遍历性与平稳分布……325
§6-5 马尔可夫链的应用……………………328
一、市场占有率的预测 ……………………329
二、利润预测 ………………………………331
三、决策技术 ………………………………333
习题6 ………………………………………339
第七章 排队论 ……………………………342
§7-1 概述……………………………………342
一、随机服务（排队）系统 ………………342
二、排队论的研究目的与方法 ……………343
§7-2 排队论的基本概念……………………343
一、排队系统的基本结构 …………………343
二、排队系统的组成和特征 ………………343
三、排队模型的分类 ………………………346
四、排队系统的数量指标 …………………347
§7-3 到达间隔的分布和服务时间的分布……………………………………348
一、经验分布 ………………………………348
二、最简单流（泊松输入）…………………350
三、指数分布 ………………………………353
§7-4 生灭过程………………………………354
§7-5 $M/M/1$模型……………………………356
一、无限队长——无限源的$M/M/1$模型 ………………………………………356
二、有限队长——无限源的$M/M/1/(N)$模型 ………………………………………360
三、顾客源为有限（m）的单服务台模型 …363
§7-6 $M/M/s$模型……………………………366
一、无限队长——无限源的$M/M/s$模型 ………………………………………366
二、有限队长——无限源的$M/M/s/(N)$模型 ………………………………………369
三、顾客源为有限（m）的多服务台模型 ………………………………………371
§7-7 排队系统的最优化问题………………372
一、$M/M/1$模型中最优服务率 …………373
二、$M/M/s$模型中最优服务台数s^* ……374
习题7 ………………………………………375
习题答案 ……………………………………378
附表 …………………………………………391
附表Ⅰ 泊松分布数值表 ……………………391
附表Ⅱ 函数 $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 数值表 ………394
附表Ⅲ 标准正态分布 ………………………396
附表Ⅳ t分布临界值表 ……………………397
附表Ⅴ χ^2分布临界值表 ……………………398
附表Ⅵ F分布临界值表 ……………………399
附表Ⅶ 相关系数显著性检验表 ……………401
主要参考文献 ………………………………401

第一章　线　性　代　数

线性代数研究的主要问题是变量之间的线性关系，其中包括线性方程组。本章首先介绍关于行列式和矩阵的一些知识，然后再利用这些知识讨论线性方程组的几个问题：有解的条件；解的表达式和求解方法。

§1-1　n 阶 行 列 式

一、n阶行列式的概念

如果一个方程组含有 n 个方程和 n 个未知量，且每个方程都是这 n 个未知量的线性方程，则将这个方程组称为 n 阶线性方程组。利用二阶行列式能解二阶线性方程组，利用三阶行列式能解三阶线性方程组。一般地可以设想，解 n 阶线性方程组应该用到 n 阶行列式。本节研究 n 阶行列式的概念、性质、展开法、以及用 n 阶行列式解 n 阶线性方程组的方法。为了从二、三阶行列式的结构规律中归纳出 n 阶行列式的概念，先介绍关于排列的一些知识。

（一）排列

1．全排列的概念

将 n 个不同的元素任意排成一列，称为这 n 个元素的一个全排列（简称排列）。n 个不同元素的全排列，共有 $n!$ 个。如果给 n 个元素规定出一种标准次序，则在上述 $n!$ 个排列中仅有一个是符合标准次序的，称为标准排列（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），而在其它所有排列中一定有某些元素没按标准次序排列。

2．排列的奇偶性

在一个排列中，如果有两个元素的先后次序与标准次序不同，我们就说这个排列有一个逆序。一个排列中所有逆序的个数，称为这个排列的逆序数。将逆序数为奇数的排列称为奇排列，将逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例如将 1，2，3，4，5 这五个自然数进行排列，并规定由小到大的次序为标准次序。排列 1 2 3 4 5 是标准排列，逆序数为零，所以是偶排列。排列 2 1 4 3 5 中有两个逆序（2 1），（4 3），也是偶排列。排列 2 4 1 3 5 中有三个逆序（2 1），（4 1），（4 3），是奇排列。排列 3 2 5 1 4 中有五个逆序（3 2），（3 1），（2 1），（5 1），（5 4），也是奇排列。

3．排列中的对换

在一个排列中，如果调换某两个元素的位置，而其它元素不动，则这个排列进行了一次对换。相邻两个元素的对换，称为相邻对换。

对换必定改变排列的奇偶性。例如将排列 3 2 5 1 4 经过对换（3，2）便得到排列 2 3 5 1 4，其逆序数由 5 变成 4，即由奇数变成偶数。一般地，有下列定理成立。

定理　对排列进行任意一次对换，都必定改变这个排列的奇偶性。

证明　先证相邻对换的情形。设已知排列

$$a_1a_2\cdots a_iabb_1b_2\cdots b_j$$

经过相邻对换（a，b）后，它变成排列

$$a_1a_2\cdots a_iba b_1b_2\cdots b_j$$

这时元素a_1，a_2，…，a_i，b_1，b_2，…，b_j的位置没动，所以对排列逆序数没产生影响。而元素a，b的排列次序由ab变成ba，必定改变逆序数。假设规定由小到大的次序为元素的标准次序。如果$a<b$，则由ab变成ba时逆序数增加1；如果$a>b$，则由ab变成ba时逆序数减少1。不论逆序数增加1还是减少1，它的奇偶性必定改变。

这说明进行一个相邻对换必改变排列的奇偶性，而进行两个相邻对换必两次改变排列的奇偶性，结果是不改变排列的奇偶性。总之，进行奇数个相邻对换必改变排列的奇偶性，进行偶数个相邻对换不改变排列的奇偶性。

证明一般对换的情形。设已知排列

$$a_1a_2\cdots a_iab_1b_2\cdots b_jbc_1c_2\cdots c_k \tag{1-1}$$

经过对换（a，b）后，变成排列

$$a_1a_2\cdots a_ibb_1b_2\cdots b_jac_1c_2\cdots c_k \tag{1-2}$$

我们可以把由（1-1）到（1-2）的过程，看成是进行下列$2j+1$个相邻对换的结果：首先由排列（1-1）经过j个相邻对换得排列

$$a_1a_2\cdots a_ib_1b_2\cdots b_jabc_1c_2\cdots c_k \tag{1-3}$$

再由排列（1-3）经过一个相邻对换得到排列

$$a_1a_2\cdots a_ib_1b_2\cdots b_jbac_1c_2\cdots c_k \tag{1-4}$$

最后由排列（1-4）经过j个相邻对换得到排列（1-2）。

因为由排列（1-1）经过奇数个相邻对换得到排列（1-2），所以必定改变了它的奇偶性。

由于标准排列的逆序数为零，是偶排列，所以由此定理可直接得出下列推论。

推论　将奇排列变成标准排列需要进行奇数个对换，将偶排列变成标准排列需要进行偶数个对换。

（二）二、三阶行列式结构的分析

在一个行列式里，横排称行，纵排称列，行列式中的数称元素。

1．二阶行列式

从二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-5}$$

中可以发现以下的规律：

（1）各项的组成　每一项都是不同行不同列的两个元素的乘积，因此可以写成$a_{1p_1}a_{2p_2}$的形式，且各因子的第一个下标（行标）的排列1 2是标准排列，第二个下标（列标）的排列p_1p_2取遍了1，2两个数所有可能的排列1 2，2 1。

（2）各项的符号　当某一项列标的排列是偶排列时，这一项就取正号；当列标的排列是奇排列时，这一项就取负号。如果用t表示列标排列p_1p_2的逆序数，则这一项的符号为$(-1)^t$。

（3）项数　由于列标的排列p_1p_2是1，2两个数的排列，这种排列共有2!个，故二阶行列式（1-5）里共有2!项，即2项。

总之，二阶行列式（1-5）可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}$$

其中 Σ 表示对1，2两个数的所有可能的排列 p_1p_2 取和。

2．三阶行列式

从三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-6}$$

中可以看出，它具有类似二阶行列式的规律性。

（1）各项的组成　每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积，因此可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式，且各因子的行标的排列1 2 3是标准排列，而列标的排列 $p_1p_2p_3$ 是1，2，3三个数所有可能的排列123，231，132，312，213，321。

（2）各项的符号　列标的排列为偶排列的项取正号，列标的排列为奇排列的项取负号。如果用 t 表示某一项列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，则这一项的符号为 $(-1)^t$。

（3）项数　由于列标的排列 $p_1p_2p_3$ 是1，2，3三个数的排列，这种排列共有3!个，故三阶行列式（1-6）里共有3!项，即6项。

总之，三阶行列式（1-6）可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 Σ 表示对1，2，3三个数的所有可能的排列 $p_1p_2p_3$ 取和。

3．n 阶行列式

根据二、三阶行列式的结构规律，定义 n 阶行列式。

定义　设有排成 n 行 n 列的 n^2 个元素

$$\begin{matrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{matrix}$$

如果用 n^2 个元素组成 $n!$ 个项，使得其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 再乘以 $(-1)^t$，其中 p_1，p_2，…，p_n 是1，2，…，n 这 n 个自然数的一个排列，而 t 是这个排列的逆序数，则将这 $n!$ 个项的代数和 $\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n^2 个元素组成的 n 阶行列式，记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1-7}$$

其中 Σ 表示对1，2，…，n 这 n 个数的所有可能的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和。为简单起见，有时将

这个 n 阶行列式记作 $\Delta(a_{ij})$ 或记作 D。

作为例子，现在按定义计算一类特殊行列式的值。行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$a_{ii}\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）主对角线(从左上角到右下角的对角线)下方的元素皆为零，我们将这种行列式称为上三角形行列式。类似地还可以定义下三角形行列式。现在求上三角形行列式的值。按定义（1-7），D_1 是 $n!$ 项的和。

$$D_1=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

由于第 n 行上的元素除 a_{nn} 外皆为零，所以这 $n!$ 项中除 $p_n=n$ 的项不为零外，其余各项皆为零，于是 $a_{np_n}=a_{nn}$，则有：

$$D_1=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{nn}$$

由于第 $n-1$ 行上的元素除 a_{n-1n-1}，a_{n-1n} 外皆为零，所以在 D_1 不为零的项中 p_{n-1} 只能取 $n-1$ 和 n 两个值。由于 $p_n=n$，可知 p_{n-1} 只能等于 $n-1$（因为如果 p_{n-1}，p_n都等于 n，则 $a_{n-1\,n}$，a_{nn} 同在第 n 列，这不符合定义），于是 $a_{n-1\,p_{n-1}}=a_{n-1\,n-1}$。依此类推，最后可以证明 $a_{2p_2}=a_{22}$，$a_{1p_1}=a_{11}$，即：

$$D_1=\Sigma(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{nn}$$

由于列标排列也是标准排列，$t=0$，故$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{nn}$。

这说明上三角形行列式的值等于其主对角线上的 n 个元素之积。同法可计算下三角形行列式的值也等于其主对角线上 n 个元素之积。

如果行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）这种行列式称为对角形行列式。显然，对角形行列式的值也等于其主对角线上的 n 个元素之积。

例1-1 计算四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

解 行列式D为上三角形行列式，故：

$$D=1\times 2\times 8\times\frac{5}{2}=40$$

例1-2 计算五阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

解 行列式D为下三角形行列式，故：

$$D=3\times(-2)\times 0\times 8\times(-6)=0$$

二、n阶行列式的性质

如果把行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行依次地变成各列（当然这时各列也必依次地变成各行），便得一个新行列式：

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们将它称为D的转置行列式。

性质1　行列式D与其转置行列式D^T相等。

证明　将D^T写成：

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

显然$b_{ij}=a_{ji}$。按行列式定义可知：

$$D^T=\Sigma(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}。$$

为了将$(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$与$D$中的项进行比较，现在把各因子的行标排列$p_1p_2\cdots p_n$调整成标准排列$1\ 2\cdots n$，这时各因子的列标排列$1\ 2\cdots n$就变成了一个非标准排列，我们用$q_1q_2\cdots q_n$表示。这说明，经过调整后，$D^T$中的乘积$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$变成了$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$。由于$q_1q_2\cdots q_n$互不相等，可知$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$是行列式中不同行不同列的$n$个元素，它们的乘积必定是$D$中的一个乘积。

下面证明D^T中乘积$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$前的符号$(-1)^t$与$D$中乘积$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$前的符号$(-1)^s$相同，其中$t$，$s$分别是排列$p_1p_2\cdots p_n$与$q_1q_2\cdots q_n$中的逆序数。将乘积$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$中的任意两个因子$a_{p_ii}$与$a_{p_jj}$的位置调换后，行标排列由$p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$（其逆序数已设为$t$）变成$p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$（其逆序数记作$t_1$），列标排列由$1\ 2\cdots i\cdots j\cdots n$（其逆

序数为$m=0$）变成$1\ 2\cdots j\cdots i\cdots n$（其逆序数记作$m_1$）。由前面的对换定理可知，$t_1$与$t$，$m_1$与$m$的奇偶性都不相同，故$t+m$与$t_1+m_1$的奇偶性相同，从而$(-1)^{t+m}=(-1)^{t_1+m_1}$，即$(-1)^t=(-1)^{t_1+m_1}$。

同理可证，如果在调换后的乘积$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_jj}\cdots a_{p_ii}\cdots a_{p_nn}$中，再调换任意两个因子的位置，并将调换后的乘积中行标排列与列标排列的逆序数分别记作t_2与m_2，则$(-1)^{t_1+m_1}=(-1)^{t_2+m_2}$，即$(-1)^t=(-1)^{t_2+m_2}$。

继续进行这种调换过程，最多进行到$n-1$次，即可将行标排列变成标准排列（其逆序数为零），这时列标排列为$q_1q_2\cdots q_n$（其逆序数已设为s），从而有$(-1)^t=(-1)^{0+s}=(-1)^s$。

总之，D^T中的任意一项必定是D中的一项。反之，同法可证，D中的任意一项也必定是D^T中的一项，这说明D与D^T是由相同的项构成的，所以$D=D^T$。

由性质1可知，凡是对行成立的性质，对列也必成立，反之亦然。

性质2　如果交换行列式的两行（列），则行列式变号。

证明　假设交换行列式D的第i列与第j列（$i<j$），并将交换后的行列式记作：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1i}\cdots a_{1n}\\ a_{21}\cdots a_{2j}\cdots a_{2i}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{ni}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots b_{1i}\cdots b_{1j}\cdots a_{1n}\\ a_{21}\cdots b_{2i}\cdots b_{2j}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\quad b_{ni}\cdots b_{nj}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中$b_{ki}=a_{kj}$，$b_{kj}=a_{ki}(k=1,2,\cdots,n)$

由定义可知：

$$\begin{aligned}D_1&=\Sigma(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots b_{l_i}\cdots b_{m_j}\cdots a_{np_n}\\&=\Sigma(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{lj}\cdots a_{mi}\cdots a_{np_n}\end{aligned}$$

其中$1\cdots l\cdots m\cdots n$是标准排列，$t_1$为排列$p_1\cdots i\cdots j\cdots p_n$的逆序数。若用$t$表示排列$p_1\cdots j\cdots i\cdots p_n$的逆序数，则由定义可知：

$$D=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{lj}\cdots a_{mi}\cdots a_{np_n}$$

由对换定理可知，t与t_1的奇偶性相反，即$(-1)^{t_1}=-(-1)^t$，故：

$$D_1=-\Sigma(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{lj}\cdots a_{mi}\cdots a_{np_n}=-D$$

推论　如果行列式中某两行（列）的所有元素都对应相等，则此行列式等于零。

证明　设行列式D有某两行相同，交换这两行得一新行列式D_1，其实它与D相同，即$D_1=D$。但由性质2知$D_1=-D$，于是$D=-D$，$2D=0$，$D=0$。

性质3　如果用一个数k乘行列式D某一行（列）的所有元素，则行列式的值变成kD。

证明　假设用k乘D的第i行的所有元素后，得到行列式D_1，于是

$$\begin{aligned}D_1&=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}\\&=k\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=kD\end{aligned}$$

推论　行列式任意一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面。

性质4　如果行列式某两行（列）的所有元素都对应成比例，则此行列式等于零。

证明　假设行列式D的第i行与第j行元素对应成比例，即有常数k使得$a_{il}=ka_{jl}$（$l=1,2,\cdots,n$）这说明k是第i行所有元素的公因子，将它提到行列式记号外，剩下的行列

式中第 i 行与第 j 行的元素对应相等，故$D=0$。

性质 5　如果行列式D的某一行（列）的所有元素都是两数之和，则可按这一行（列）的元素对D施行分配律，即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则$D=D_1+D_2$。

证明　按定义有

$$\begin{aligned} D&=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &=D_1+D_2 \end{aligned}$$

性质 6　如果将行列式D的某一行（列）的所有元素都乘以同一数k，然后加到另一行（列）的对应元素上，则此行列式不变。

证明　例如将D的第 j 列元素乘以 k 加到第 i 列对应元素上，所得行列式记作D_1，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1i}+ka_{1j}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2i}+ka_{2j}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{ni}+ka_{nj}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1i}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2i}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{ni}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}\cdots ka_{1j}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots ka_{2j}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots ka_{nj}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D+0=D$$

利用行列式的这些性质，可以简化计算行列式的手续，下面举例说明之。首先进入 n 个记号：用 r 和 c 分别表示行和列，用 $r_i\times k$ 表示“第 i 行所有元素皆乘以 k”，用 c_i+kc_j 表示“将第 j 列乘以 k 后加到第 i 列”，用 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示“交换第 i 、j 两行”……

例1-3　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&4&3&2\\0&-1&-1&1\\0&4&4&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&-1&-1&1\\0&4&3&2\\0&4&4&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+4r_2]{r_3+4r_2}-\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&6\\0&0&0&11\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)\times(-1)\times(-1)\times 11=11$$

例1-4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=1\times 2\times 8\times\frac{5}{2}=40$$

例1-5 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

解 从第4行开始，后行减前行：

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

三、行列式的按行（列）展开法

按定义计算行列式是比较复杂的，而且行列式的阶数越高，计算就越复杂。但是如果能用低阶的行列式来表示高阶的行列式，那就可以简化行列式的计算。下面研究行列式的降阶问题，为此首先介绍代数余子式的概念。

在 n 阶行列式 D 中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。在 M_{ij} 前添上 $(-1)^{i+j}$ 后称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式为：

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

而 a_{23} 的代数余子式为 $(-1)^{2+3}M_{23}$，即 $A_{23}=-M_{23}$。

在特殊情形下，行列式与其代数余子式之间具有下列关系。

预备定理　如果 n 阶行列式 D 的第 i 行的元素除 a_{ij} 外其余皆为零，则此行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即：

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证明　首先证明 a_{ij} 位于第一行第一列的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0\ \cdots\ 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

由（1-7）可知，D 中每一项都有第一行的元素作为因子，而第一行的所有元素除 a_{11} 外皆为零，因此

$$D=\Sigma(-1)^t a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中仅有 $(n-1)!$ 项，而 t 表示排列 $1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，它等于排列 $p_2\cdots p_n$ 的逆序数。提出各项的公因子 a_{11} 后，可将 D 表示为：

$$D=a_{11}\Sigma(-1)^t a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

右端的代数和正好是 $n-1$ 阶行列式 M_{11}，于是 $D=a_{11}M_{11}$。由于 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，所以 $D=a_{11}A_{11}$。

现在证明 a_{ij} 位于第 i 行第 j 列的一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots a_{ij}\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用前面的结果，首先把 D 作如下的调换：把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，…，第 1 行对调，这样，a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为 $i-1$。根据行列式的性质 2，对调后的行列式为：

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots a_{ij} & \cdots 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots a_{i-1j} & \cdots a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots a_{i+1j} & \cdots a_{i+1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}D$$

再把 D_1 的第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第 1 列对调，这时 a_{ij} 调到原来 a_{11} 的位置上，调换的次数为 $j-1$，根据性质 2，所得的行列式为：

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j-1}D_1=(-1)^{j+i-2}D=(-1)^{i+j}D$$

由于 a_{ij} 已调到原来 a_{11} 的位置上，利用前面的结果有 $D_2=a_{ij}M_{ij}$。所以 $(-1)^{i+j}D=a_{ij}M_{ij}$，从而

$$D=\frac{a_{ij}M_{ij}}{(-1)^{i+j}}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

在一般情形下，行列式与其代数余子式之间具有下列关系。

定理 行列式 D 等于它的任意一行（列）的各元素与其代数余子式的乘积之和，即：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-8}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-8'}$$

证明 把行列式 D 写成：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用行列式的性质5，可把D写成下列n个行列式之和，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2}\cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据预备定理可得：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

如果按行列式的列进行上述证明，则得：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

这个定理叫做行列式的按行（列）展开定理。由这个定理可得下列重要推论。

推论　行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

证明　反用行列式的展开定理，将$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$写成一个行列式，可得：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

由于第i行与第j行上的元素对应相等，故行列式等于零。

利用展开定理并结合行列式的性质还可以简化行列式的计算。

例1-6　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$