

高等學校教材

微分几何

方德植編

人民教育出版社

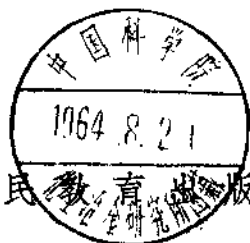
51.56
119

高等学校教材



微 分 几 何

方 德 植 編



人民教育出版社

本书以向量作为工具讲述“古典”微分几何。

全书内容共分四章。第一章主要是阐述“古典”微分几何的对象与方法，第二章与第三章对曲线论与曲面论的基础作了系统的、比较详细的介绍，还有一些重要的内容安排在第四章，作为补充教材之用。最后编入若干问题与定理供读者参考。

本书可作为综合大学数学专业微分几何课程的教科书。

微 分 几 何

方 德 植 編

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号K13010·1130 开本 860×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 9 $\frac{1}{16}$

字数 225,000 印数 0,001—4,000 定价(5) 1.90

1964年7月第1版 1964年7月北京第1次印刷

序 言

本书是以編者在厦門大学数学系多年来讲授微分几何所編的讲义为基础,并根据 1962 年教育部发下的綜合大学(五年制)数学专业教学計划(草案)中,对微分几何这門課程的安排(授課时数和開設学期)进行修訂而写成的。

本书总的特点是:由淺入深,循序漸进,以不多的篇幅(前三章)敘述了“古典”微分几何的基本內容;而且特別注意理論基础的系統性与严密性;此外,还注意到与力学的联系。最后介紹了在微分几何以及其他学科中常用的張量分析等;还以“問題与定理”为标题編入有关“古典”微分几何方面比較重要和著名的結論,供給讀者参考。

书中每节之末一般配有一定数量的习题,帮助讀者把所学到的理論与方法加以巩固和应用,其中个别习题还补充了正文的內容。在每章(除最后一章外)之末附有全章复习提綱与总习题,使讀者学完一个阶段后作一次有系統的复习,以达到对整个阶段的內容有較全面的理解;通过总习题使讀者能把每章的主要理論和方法灵活地运用到解决比較綜合性的問題。

全书共分四章。第一章讲述初步知識(曲綫和曲面——微分几何的主要对象)及預备知識(向量函数的运算及微分几何的方法和內容)。在这一章中闡明了利用向量分析这个方法作为工具的优越性,并且強調图形之間的接触及运动不变量等概念对全书具有基本的意义。这样,使讀者对微分几何这門課程具有初步的認識。

第二章(曲綫論)与第三章(曲面論)是微分几何的基本內容,

在这里作了系統的、比較詳細的敘述。特別是对曲面的“內在”几何与“外在”几何以及它們之間的联系作了比較清晰的闡明和討論。

为了使讀者获得更深入与更廣泛的知識，因此，把一些內容，例如卵形綫、平行移动概念、直紋曲面、极小曲面、張量分析等补充知識編为第四章。

书中(前三章)不带星号的內容都是必要的，每周讲课三小时，一学期內可以讲完。但是带星号的內容(包括第四章)也是重要的，可以根据讲课吋数与学生水平作适当的取舍，或者作为微分几何补充教程的一部分教材。

在編写过程中，我校几何教研室的同志們根据他們試用的情况，提出了不少的宝貴意見；特别是陈奕培同志不但在內容上提供意見，并且在行文上还协助修改，在这里向他們致以深切的謝意。

由于編者水平的限制，难免有不妥和錯誤之处，懇切地希望讀者給予指正。

方德植

一九六二年五月于厦門大学

目 录

序言.....	vii
緒論.....	1

第一章 初步知識与預备知識

§1 平面曲綫.....	4
1. 曲綫的确定法, 简单曲綫段.....	4
2. 奇异点.....	8
3. 漸近綫.....	11
4. 曲綫族的包絡.....	15
5. 曲率.....	18
6. 密切圓.....	20
§2 空間曲綫.....	22
1. 曲綫的确定法, 简单曲綫段.....	22
2. 空間曲綫的切綫, 法平面.....	25
§3 曲面.....	27
1. 曲面的确定法, 简单曲面块.....	27
2. 曲面的切平面, 曲面法綫.....	29
§4 向量函数.....	32
1. 向量函数的微分法.....	32
2. 高阶导数, 向量函数的戴劳定理.....	35
3. 向量函数的几个常用的性质.....	36
§5 微分几何的方法与内容.....	38
1. 运动不变量.....	38
2. 接触概念, 两条平面曲綫构成 n 阶接触的条件.....	40
第一章复习提綱及总习题.....	43

第二章 曲綫論

§6 空間曲綫的伴随三面形.....	46
1. 切綫与法平面.....	46
2. 密切平面.....	46
3. 伴随三面形.....	49
§7 空間曲綫的基本不变量.....	50

1. 弧长, 自然参数	50
2. 曲率	55
3. 挠率	57
§ 8 曲线论的基本公式与自然方程	61
1. 伏雷纳公式	61
2. 标准展开式, 曲线在每个正常点邻近的结构	62
3. 基本定理与自然方程	65
4. 平面曲线的自然方程的积分法	69
5. 平面曲线的渐屈线与渐伸线	72
§ 9 特殊类型的曲线	76
1. 一般螺旋线	76
*2. 贝尔脱朗曲线	78
§ 10 从运动学的观点研究曲线	81
1. 伴随三面形的运动	81
2. 曲率、挠率和伏雷纳公式的运动学定义	83
*3. 采柴罗的不动条件	85
§ 11 可展曲面	88
1. 单参数曲面族的包络	88
2. 单参数平面族的包络	91
3. 空间曲线的渐伸线与渐屈线	98
*4. 空间曲线的密切球面与密切圆	101
第二章复习提纲及总习题	105

第三章 曲面论

§ 12 曲面的参数表示, 切平面与曲面法线	109
1. 曲面的参数表示	109
2. 曲面的坐标曲线	111
3. 表面上的曲线	112
4. 曲线坐标的变换, 曲面的正侧	114
*5. 曲面的奇异点	116
§ 13 第一基本形式, 曲面的内在性质	117
1. 曲面的线素, 第一基本形式	117
2. 两条曲面曲线的交角	123
3. 曲面的面积	125
4. 曲面的变形, 曲面的内在性质	128
5. 保角映射	131
§ 14 第二基本形式, 曲面的外在性质	137
1. 第二基本形式	137

2. 曲面曲线的曲率	140
3. 杜班标形, 欧拉公式	143
4. 主曲率与主方向的确定	147
5. 平均曲率与总曲率	148
6. 曲面在每个点邻近的结构	149
7. 球面表示	152
8. 曲率线	156
9. 第三基本形式	158
10. 渐近曲线	161
11. 共轭曲线	162
*12. 三重正交曲面族	168
§ 15 曲面论的基本公式与基本方程	174
1. 曲面论的基本公式	174
2. 高斯方程及彼得松-柯达齐方程	178
3. 曲面论的基本定理	182
§ 16 曲面的内在几何	188
1. 曲面曲线的测地曲率	188
2. 测地线	192
3. 测地坐标	196
4. 短程线	201
5. 高斯-波恩涅公式	205
6. 常曲率的曲面	209
7. 伪球面上的罗巴契夫斯基几何	211
第三章复习提纲及总习题	217

*第四章 补充知识

§ 17 卵形线	222
§ 18 测地映射	227
§ 19 勒维-其维塔的平行移动	230
1. 曲面上的向量及其平行移动	230
2. 平行移动的性质	233
3. 向量沿封闭道路的平行移动	235
§ 20 测地挠率	239
1. 测地线的挠率	239
2. 曲面曲线的测地挠率	241
3. 曲面曲线的二面角	243
§ 21 直纹曲面	246
§ 22 极小曲面	252

§ 23 張量分析	260
1. 坐标变换, 和式的記号	260
2. 張量的定义及其代数运算	262
3. 張量記号	266
4. 协变微分法	271
5. 曲面論的基本定理的证明	273

*問題与定理

緒 論

微分几何是以无穷小分析的方法来研究几何图形的性质，首先是研究曲綫与曲面的理論。它的特点，基本上限于研究曲綫和曲面在“小範圍”內的性质，就是所謂局部(或微观)微分几何，即研究曲綫和曲面上一点充分小的邻域的性质。这些性质是由給定曲綫或曲面的方程中所出現的那些函数的导数表达的量来刻划的。因此，微分几何要求所有被討論的函数按我們的需要都具有足够阶的連續的导数。

上面所指出的，微分几何的主要研究对象是曲綫与曲面，但是我們要認識到这些图形的概念都是从现实世界中抽象出来的。由于人們在实践活动和自然界的各种現象中，經常遇到各种形状的曲綫和曲面。例如行星在空間中运行的軌道，炮彈在空間中所經過的軌道，螺旋彈簧的形状等等曲綫的种类，是不胜枚举的。同样地，物体的表面、薄壳、輪船的外壳、机器的侧面等等給出各种各样的曲面。当然，上面所列举的各种图形并不是几何上的曲綫与曲面，但是我們把现实的对象想像为几何的图形，即使只是最初的近似，也足以应用到研究很多的实际問題了。

客观现实各种各样的綫都是有粗細的，如果抽掉粗細的因素，就引出几何中的曲綫概念，因此我們就把曲綫想像为沒有厚度与寬度的綫。从这个抽象概念所反映出来的现实物体的普遍性质，就是当物体在其厚度和寬度比其长度小得多的情况下所具有性质。同样地，如果抽掉薄壳的厚度和物体表面的精确位置，就引出几何中的曲面概念。这些概念的更严格的定义是属于拓扑学的範圍，我們在这里暫不談它。

微分几何的产生与发展跟分析有不可分割的联系，分析的許多問題是从几何問題給出的。例如，由于切綫概念的产生引出了微分概念，面积和体积概念的产生引出了积分概念等等。

洛比大尔在1695年出版了“用来理解曲綫的无穷小分析”一书，闡明了分析与曲綫的緊密联系。

关于微分几何的形成，首先應該提起的是，伯努利在1687年提出要在給定曲面上求“最短道路”的問題，从此出发而发展了同微分几何有着緊密联系的变分法。1760年欧拉发表了关于在一个曲面上曲綫的曲率的著作。关于曲綫与曲面理論較完整的第一部著作是蒙日在1795年刊行的“分析在几何上的应用”。

与实践問題有关的还有高斯关于曲面論的經典著作，从他在1827年所出版的“关于曲面的一般研究”，奠定了近代形式的曲面論基础，高斯是从地理制图的要求出发的。

曲綫和曲面的完整理論是在上世紀形成的，通常叫它为“古典”微分几何。“古典”微分几何的发展在达尔布所著的“一般曲面理論讲义”里作了全面的总结，这部名著共分四卷，是在1887~1896年分期出版的。

罗巴契夫斯基的非欧几何的发现，在整个几何的发展中起了革命的作用。到了1854年，黎曼的演讲“論作为几何基础的假設”，奠定了黎曼几何的基础。这对近代微分几何的发展起了巨大的作用。

在克莱恩(1872年)所发表的“爱尔兰根綱領”里提出了群論观点，这个观点应用到各种几何上，使本世紀开端即从古典微分几何发展了一系列的新方向，它們都是統一在同一个群論观点之下的，这指的是專門研究曲綫、曲面在各种几何变换下的不变性质。古典微分几何无非是研究在运动之下图形的不变性质，射影微分几何是研究在射影变换之下图形的不变性质，仿射微分几何

是研究在仿射變換之下圖形的不變性質。還有其它種類繁多的幾何學，因為取定某一個變換群作為基礎，就可以研究圖形在這個群中的變換之下保留不變的性質，這個群論觀點應用到幾何上由嘉當所發展，他建立了“仿射聯絡空間”和“射影聯絡空間”的理論。這些都是近代微分幾何的主要內容，但是我們在這個基礎教程中僅限於敘述古典微分幾何的基本內容，至於近代微分幾何各個方面的成就則屬於幾何專門組課程的範圍，這裡不作介紹。

第一章 初步知識与預备知識

在本章里，我們首先把微分几何的主要对象——曲綫和曲面——的概念及其简单的性质作初步的叙述，其中有些内容在数学分析和解析几何里已經讲过了，这里只作简单的复习。其次，为了以后的需要，把研究微分几何的主要工具——向量分析——作扼要的介紹。最后把微分几何的方法和內容作概括性的叙述，使讀者对本門課程具有初步的認識。

§ 1. 平面曲綫

1. 曲綫的确定法. 简单曲綫段. 在解析几何中，我們知道，可以用方程来确定平面曲綫。通常是用下列三种形式的方程来給定的。

1° 显式确定法 在緒論中已經指出，在微分几何里，只研究图形在小范围内的性质，所以对于曲綫來說，只要考虑它的一小段就行了。因此，先来給出一个基本性的定义，所謂**简单曲綫段**就是这样的点的軌迹，在直角笛氏坐标系的适当选择下，点的坐标 (x, y) 满足下面形式的方程：

$$y=f(x), \quad (1)$$

这里横坐标 x 在区間 $a \leq x \leq b$ 上取值，并且函数 $f(x)$ 在这个区間上是单值、連續可微的。从直观来看，当横坐标 x 由 a 变到 b 时；简单曲綫段 AB (图1)对应于区間 $a \leq x \leq b$ 上每一点 x 与平行于 y 軸的直綫交于一个点而且只交于一个点 P ，这个点 P 沿着一个方向画出曲綫段 AB 。由此可见，这时曲綫弧上的点 $P(x, y)$ 与区間

$a \leq x \leq b$ 上的点 x 构成一一对应。所以简单曲綫段自己不能相交。此外, 由于函数 $f(x)$ 的連續可微性, AB 是一条光滑的曲綫段。如果曲綫上的一点 P 的邻域是简单曲綫段, 則 P 叫做曲綫上的一个正常点。

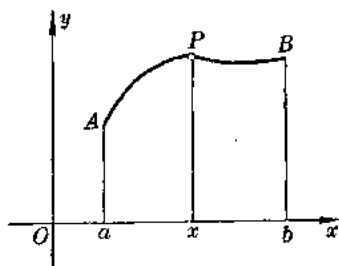


图 1

2° 隱式确定法 点的坐标 (x, y) 满足一个隱式方程

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

的軌迹; 其中函数 $\varphi(x, y)$ 在 xy 平面上的一个区域 D 中关于 x, y 是連續可微的, 并且两个偏导数 φ_x, φ_y 不全为零, 这个軌迹就叫做平面上的曲綫。这样的命名是恰当的, 因为从下面的定理 1 的证明里就会看到, 軌迹(2)在区域 D 中某点 P_0 的充分小的邻域里具有简单曲綫段的形状。

定理 1. 設 $P_0(x_0, y_0)$ 是曲綫(2)上的一个已知点, 假定函数 $\varphi(x, y)$ 在点 P_0 有連續的偏导数, 并且

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0, \quad (3)$$

則点 $P_0(x_0, y_0)$ 是曲綫上的一个正常点。

[证] 由条件(3)可知, $\varphi_x(x_0, y_0)$ 与 $\varphi_y(x_0, y_0)$ 之中, 至少有一个不等于零; 为了确定起見, 假設 $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。此外因为 P_0 为曲綫(2)上的一个已知点, 所以 $\varphi(x_0, y_0) = 0$ 。因此, 根据隱函数的存在定理, 存在正数 δ 和 s 以及在点 x_0 的一个邻域 $|x - x_0| < \delta$ 的一个单值、連續的可微函数 $y = f(x)$, 使得所有的点 $(x, f(x))$, $|x - x_0| < \delta$ 满足方程(2), 并且这些点就是矩形 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < s$ 中所有满足(2)的点。因此, 由方程

$$y = f(x), \quad |x - x_0| < \delta$$

所确定的軌迹是一条简单曲綫段。而且按上段的定义可知

$P_0(x_0, y_0)$ 是曲綫(2)上的一个正常点.

3° 参数式确定法 如果把平面上的曲綫看作点的連續运动的軌迹, 則当点 P 从時間 $t=\alpha$ 到時間 $t=\beta$ 作曲綫运动时, 动点 P 的直角坐标就可以用 t 的函数 $x(t)$, $y(t)$ 来表达. 反之, 对于給定的函数 $x(t)$, $y(t)$ 就可以确定动点的坐标. 因此, 平面曲綫可以用下列形式的两个方程来給定:

$$x=x(t), \quad y=y(t). \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (4)$$

方程組(4)叫做曲綫的参数表示或者参数方程, t 叫做参数.

当然, 变数 t , 不必具有時間的意义, 因为从給定的参数 t 可以换成另一个参数, 例如, 可以用 $t=u^2$ 或者一般地以 $t=t(u)$ 引进另一个参数 u , 并不变更曲綫本身.

和由方程(2)来定义曲綫一样, 在下面的定理 2 的证明中就会看到, 軌迹(4)在某一小段內具有簡單曲綫段的形状.

定理 2. 若函数 $x(t)$, $y(t)$ 在一点 t_0 的充分小的邻域里都是单值的, 并且有連續的导数, 又

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right), \quad (5)$$

則点 t_0 为曲綫上的一个正常点.

[证] 令

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0); \quad (6)$$

由不等式(5)知, $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$ 之中至少有一个不等于零, 不妨假設

$$\dot{x}(t_0) \neq 0,$$

根据隐函数的存在定理, 从方程 $x=x(t)$ 可以唯一地解出

$$t = \varphi(x), \quad (7)$$

使得在 x_0 的邻域里滿足方程 $x=x(t)$, 并且 $t_0 = \varphi(x_0)$. 把这个 t 的值代入方程 $y=y(t)$, 我們得到:

$$y = f(x), \quad (8)$$

其中 $f(x) \equiv y[\varphi(x)]$; 这个函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域里具有連續的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}. \quad (9)$$

因此, 方程(8)在点 t_0 的充分小的邻域里表示一条簡單曲綫段, 所以点 t_0 为曲綫(5)的一个正常点. 证毕.

最后, 我們指出当 t 从 $t=\alpha$ 变到 $t=\beta$ 时, 点 $P(x, y)$ 画出一条曲綫段 AB , 对于区間 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上每一个 t 的值, 在曲綫段 AB 上各有一个点而且只有一个点与它对应, 但反过来是不成立的, 因为曲綫段 AB 上的同一点有时可以有不同的 t 的值与它对应. 例如, 曲綫(图 2)

$$x=t^2, \quad y=t(1-t^2)$$

图 2

上的点 $P(1, 0)$ 与两个 t 的值 $t=\pm 1$ 对应.

但是, 在条件(5)之下, 限于在一点 t_0 的充分小的邻域里, 参数 t 与曲綫(4)上的点构成一一对应, 因为在这个邻域里, 若有两个 t 的值 t_1 和 t_2 对应于同一个点, 则有

$$x(t_1) - x(t_2) = 0,$$

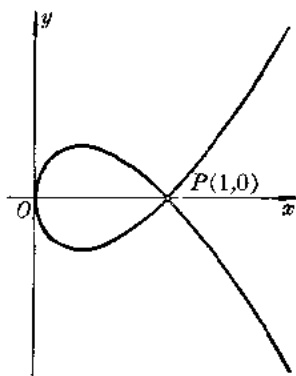
$$y(t_1) - y(t_2) = 0.$$

根据拉格朗日(Lagrango)的有限改变量定理, 就可以推出

$$\dot{x}(\theta_1) = 0, \quad \dot{y}(\theta_2) = 0,$$

其中 θ_1, θ_2 是介于 t_1, t_2 之間的值, 因为 t_1, t_2 可以充分地接近于 t_0 , 从函数 $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ 的連續性, 就有

$$\dot{x}(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0.$$



这跟条件(5)矛盾.

2. 奇異点. 关于平面曲綫的奇異点的理論是相当复杂的, 在这里只叙述主要的事实, 并列举一些例子加以說明, 而不給出严格的証明.

我們来考虑由隱式方程(2):

$$\varphi(x, y) = 0$$

所給定的曲綫. 如果点 $P_0(x_0, y_0)$ 不是曲綫(2)的正常点, 則称 P_0 为它的一个奇異点. 根据定理 1, 奇異点的坐标必須同时滿足下列三个方程:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi_x(x, y) = 0, \quad \varphi_y(x, y) = 0. \quad (10)$$

如果函数 $\varphi(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的二阶偏导数不全为零, 則称 P_0 为曲綫的一个二重点.

現在来考虑在二重点 P_0 处的切綫問題. 設曲綫可写为参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

并令在二重点所对应的参数值为 $t = t_0$, 为了求出曲綫的切綫, 先把恒等式

$$\varphi(x(t), y(t)) = 0$$

关于 t 求导数, 得到

$$\varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} = 0.$$

关于 t 再微分一次, 即得

$$\varphi_{xx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\varphi_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \varphi_{yy} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \varphi_x \frac{d^2 x}{dt^2} + \varphi_y \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

因在二重点处有 $\varphi_x(x, y) = 0, \varphi_y(x, y) = 0$, 所以

$$\varphi_{xx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\varphi_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \varphi_{yy} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0.$$

若令