

清华大学电气工程系列教材

Fundamentals of
Electromagnetic Fields

电 磁 场 基 础

马信山 张济世 王 平 编著

Ma Xinshan Zhang Jishi Wang Ping

清华大学出版社

清华大学电气工程系列教材

Fundamentals of Electromagnetic Fields

电磁场基础

马信山 张济世 王 平 编著

Ma Xinshan Zhang Jishi Wang Ping

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是编者在清华大学电机工程与应用电子技术系多年讲授电磁场课程的基础上根据国家教委 1987 年的《电磁场课程教学基本要求》及我校教学改革的具体情况编写的,汲取了教研室集体教学经验。

全书共分两篇六章。第一篇静态电磁场包含:静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题,共四章;第二篇时变电磁场包含:准静态场、动态场,共两章。每章均附有习题,书末附有答案。

本书供高等工业学校电类各专业使用,也可供电力、自动化、电子、电磁测量和生物医学工程等方面的工程技术人员参考。

电磁场基础

马信山 张济世 王平 编著

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

责任编辑 刘元元

北京市清华园胶刷厂

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 22.5 字数: 531 千字

1995 年 5 月第 1 版 2003 年 6 月第 4 次印刷

印数: 6501~7300

ISBN 7-302-01591-0/TM·19

定价: 28.00 元

序 言

1987 年国家教委公布了高等工业学校《电磁场课程教学基本要求》。该课程是本科电类专业的技术基础课。本书是根据该文件和近年我校教学改革的具体情况编写的。一方面是为了适应拓宽专业面和新专业的需要,另一方面是为了保证与提高技术基础课的基本教学质量。

电类各专业的主要课程的核心内容都是电磁现象在特定范围、特定条件下的体现,分析电磁现象的定性过程和定量方法是电类各专业学生掌握专业知识和技能的基础。电磁场课程所涉及的内容是工科电类专业本科学生应具备的知识结构的必要组成部分。同时,电磁场理论又是一些交叉领域(如生物医学工程,仪器仪表工程)的学科生长点和新兴边缘学科发展的基础。学好电磁场理论将增强学生的适应能力与创造能力。

本书的特点是:采用了静态场—准静态场—动态场体系;加强了基本概念;强调了边值问题的基本处理方法。此外,力求内容和例题联系专业实际、适应电磁场近代发展趋势和恰当衔接先修课程。

参加本书编写的有马信山、张济世、王平。马信山编写第一、五、六章,并任主编;张济世编写第四章,并审校各章习题;王平编写第二、三章。在编写过程中,王先冲教授给予了很多指导,在此谨致谢意。

由于水平所限,书中不妥和错误之处可能不少,恳请批评指正。

编 者

1994 年 8 月于清华大学

目 录

第一篇 静态电磁场

第一章 静电场	3
§ 1-1 库仑定律·电场强度	3
§ 1-2 高斯通量定理	6
§ 1-3 静电场环路定理·电位	10
§ 1-4 电偶极子	15
§ 1-5 导体和电介质	17
§ 1-6 电介质中的电场·电位移	19
§ 1-7 静电场的基本方程·分界面上的边界条件	23
§ 1-8 泊松方程和拉普拉斯方程	27
§ 1-9 镜象法	31
§ 1-10 电轴法	37
§ 1-11 部分电容	42
§ 1-12 静电场能量	48
§ 1-13 电场力	51
* § 1-14 互易定理	53
提要	55
习题	57
第二章 恒定电场	65
§ 2-1 电流和电流密度	65
§ 2-2 恒定电场的基本方程	68
§ 2-3 分界面上的边界条件	71
§ 2-4 恒定电场与静电场的比拟	75
§ 2-5 导电媒质中偶极子电流源的电场	76
§ 2-6 电导与电阻的计算	78
§ 2-7 焦耳定律	85
提要	86
习题	88
第三章 恒定磁场	91
§ 3-1 安培力定律·磁感应强度	91
§ 3-2 磁通连续性定理·安培环路定律	95
§ 3-3 磁偶极子	100
§ 3-4 磁媒质中的磁场·磁场强度	102
§ 3-5 恒定磁场的基本方程·分界面上的边界条件	108
§ 3-6 标量磁位	110
§ 3-7 矢量磁位	113
§ 3-8 镜象法	126

§ 3-9 电感	128
§ 3-10 磁场能量	139
§ 3-11 磁场力	142
提要	145
习题	148
第四章 边值问题	161
§ 4-1 概述	161
§ 4-2 分离变量法	162
§ 4-3 复变函数法	184
§ 4-4 保角变换法	192
§ 4-5 有限元法	198
§ 4-6 图解法	206
§ 4-7 电模型法	208
提要	213
习题	214

第二篇 时变电磁场

第五章 准静态场	221
§ 5-1 电磁感应定律	221
§ 5-2 全电流定律	226
§ 5-3 时变电磁场的基本方程组·准静态场的分类和特点	228
§ 5-4 导电媒质中自由电荷的弛豫过程	235
§ 5-5 导电媒质分界面自由电荷的积累过程	237
§ 5-6 生物体内偶极子电流源的磁场	241
§ 5-7 通过导电媒质薄环的磁扩散过程	245
§ 5-8 传导干扰与抑制	246
§ 5-9 薄平板中的涡流	249
提要	253
习题	256
第六章 动态场	262
§ 6-1 动态场的基本方程组与广义波动方程	262
§ 6-2 坡印亭定理与坡印亭矢量	264
§ 6-3 动态位	269
§ 6-4 达朗贝尔方程的解答	272
§ 6-5 辐射	275
§ 6-6 电介质中的平面电磁波·波的极化	284
§ 6-7 平面波的反射与折射·介质波导	288
§ 6-8 导电媒质中的平面电磁波	292
§ 6-9 集肤效应·邻近效应·辐射干扰与电磁屏蔽	298
§ 6-10 金属波导与谐振腔	304
§ 6-11 电光效应	308
§ 6-12 核磁共振效应	310

提要	312
习题	315
附录一 矢量分析	319
§ 1 标量场的梯度	319
§ 2 矢量场的散度	320
§ 3 矢量场的旋度	321
§ 4 矢量场的积分特性	324
附录二 亥姆霍兹定理	326
§ 1 无旋场	326
§ 2 无散场	326
§ 3 亥姆霍兹定理	327
附录三 主要矢量分析公式	330
附录四 物理常数和材料电磁参数	333
习题答案	338
参考书目	352

第一篇

静态电磁场

第一章 静 电 场

本章讨论静止电荷引起的电场。介绍描述它的最主要的场量——电场强度、电通密度。从库仑定律出发得出基本规律,包括高斯通量定理和无旋特性。引入重要的辅助量电位。先分析真空中电场,再讨论电介质和导体的影响。引入极化电荷。得出静电场的基本方程,包括积分形式和微分形式。

应用积分形式的基本方程,导出不同媒质分界面上的边界条件。应用微分形式的基本方程,得出电位满足的微分方程,即泊松方程和拉普拉斯方程。讨论静电场问题解答的唯一性。由此给出两种重要的间接解法——镜象法和电轴法。

讨论独立导体和一对导体电极间电容的计算方法。建立多导体系统部分电容的概念。研究静电场能量、能量密度。最后重点介绍应用虚功原理求电场力的方法,即虚位移法。

§ 1-1 库仑定律·电场强度

电荷周围存在着一种特殊形式的物质,称为电场。相对于观察者为静止的且其电量不随时间而变的电荷所产生的电场,称为静电场。电场的表现是对于引入的静止试验电荷有力相作用。可利用这一表现来察看电场的存在。

1785年C. A. 库仑进行了著名的扭秤实验。总结为库仑定律:在真空中两点电荷间相互作用力与两电荷的乘积成正比,与电荷间距离的平方成反比;力的方向沿电荷之间的连线或延长线,同性电荷相互排斥而异性电荷相互吸引(如图1-1所示)。库仑定律的表达式为: q_1 对 q_2 的作用力 f_{21}

$$f_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_{12}^0 \quad (1-1)$$

q_2 对 q_1 的作用力 f_{12}

$$f_{12} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_{21}^0 \quad (1-2)$$

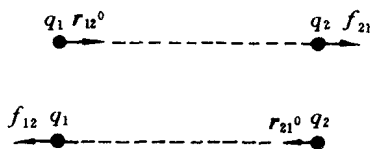


图 1-1

式中, r 是两点电荷间的距离, r_{12}^0 是由 q_1 指向 q_2

的单位矢量, r_{21}^0 是由 q_2 指向 q_1 的单位矢量, ϵ_0 是真空的介电常数,亦称真空的电容率。本书采用我国法定计量单位,电荷的单位为库[仑](C),距离的单位为米(m),力的单位为牛[顿](N), ϵ_0 的单位为法[拉]/米(F/m),其值为

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

关于平方反比律的2次方,库仑当时所使用的实验方法不很准确;后来麦克斯韦得出:2的误差小于1/21600;近代实验证明:宏观范围内2的误差不超过 10^{-16} 量级。

实验还表明,若干点电荷间的相互作用力符合力的叠加原理。

电场可以通过另一引入的带电试体所受的作用力来描述。为了使被研究的电场尽量

少受该试体的影响,要求试体的几何尺寸很小,其带电量 q_i 也很小,即电量很小的点电荷。表征电场特性的基本量是电场强度 E ,简称为场强,为矢量

$$E(x, y, z) = \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{q_i} \quad (1-3)$$

式中 f 表示试体电荷 q_i 在观察点 $P(x, y, z)$ 所受的作用力。对于一个点电荷 q 在真空中所建立的电场强度

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^0 \quad (1-4)$$

它与试体电荷 q_i 无关。 q 所在点称为源点,观察点称为场点。 r^0 和 r 分别为由源点指向场点的单位矢量和距离。电场强度 E 的单位为伏[特]/米(V/m)或牛[顿]/库(N/C)。

根据叠加原理,多个(n 个)点电荷在真空中建立的电场强度为

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^2} r_k^0$$

线电荷、面电荷、体电荷的电场强度分别为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau dl}{r^2} r^0$$

其中, $\tau = \frac{dq}{dl}$ 为线电荷密度,单位为库/米(C/m);

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s dS}{r^2} r^0$$

其中, $\rho_s = \frac{dq}{dS}$ 为面电荷密度,单位为库/米²(C/m²);

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} r^0$$

其中, $\rho = \frac{dq}{dV}$ 为体电荷密度,单位为库/米³(C/m³)。而 l, S, V 分别表示线、面、体。

例 1-1 真空中有限长直线段 l 上均匀分布着线密度为 τ 的电荷,如图 1-2 所示。求线外任一点 P 处电场强度。

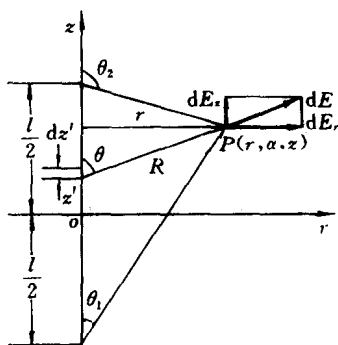


图 1-2

解 根据几何尺寸的对称性,采用圆柱坐标,令 z 轴与线电荷重合,原点放在直线 l 的中点。观察点(即场点)的坐标为 $P(r, \alpha, z)$;用 dz' 表示线元, $\tau dz'$ 源点的坐标为 $(0, 0, z')$ 。这样, $\tau dz'$ 在 P 点处电场的三个圆柱坐标分量分别为

$$dE_r = dE \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz'}{R^2} \sin \theta$$

$$dE_\alpha = 0$$

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz'}{R^2} \cos \theta$$

利用 $R = \frac{r}{\sin \theta} = r \csc \theta$

$$z' = z - r \cot \theta, \quad dz' = r \csc^2 \theta d\theta$$

可得

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin\theta}{r} d\theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \cos\theta}{r} d\theta$$

整个直线段 l 上的电荷在 P 点处的电场为

$$E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

如果直线段 l 趋于无限长, 则 $\theta_2 = \pi, \theta_1 = 0$, 得

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_z = 0$$

或

$$E = r^0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

例 1-2 一半径 a 的球面上均匀地分布有电荷, 总电量为 q , 如图 1-3 所示。求球外、球内的电场强度。

解 面电荷密度 ρ_s 为

$$\rho_s = \frac{q}{4\pi a^2}$$

采用球坐标, 令原点位于球心而极轴通过 P 点, 电场强度

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS}{R^2} R^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s a^2 \sin\theta d\theta d\alpha}{R^2} R^0$$

$$dE_z = dE \cos\varphi$$

$$E = \int dE_z = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta \cos\varphi}{R^2} d\theta$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta \cos\varphi}{R^2} d\theta$$

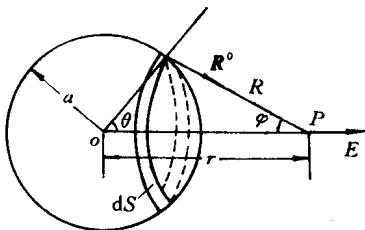


图 1-3

但是由图 1-3, 有

$$\cos\varphi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

$$\cos\theta = \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}, \quad \sin\theta d\theta = \frac{R}{ar} dR$$

代入前式, 得球外点的电场强度

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_{r-a}^{r+a} \left(\frac{a}{2r^2} \right) \frac{R^2 + r^2 - a^2}{R^2} dR \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2r^2} \right) \left[R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right] \Big|_{r-a}^{r+a} \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{a}{2r^2} \times 4a \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi a^2 \rho_s}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

或

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

即球外的电场与在球心电量为 q 的点电荷所建立的电场相同。这样,在计算球外的电场时,可以将球面上的电荷用位于球心的点电荷来代替。

对于球内点,上面的积分下限换成 $a-r$,则

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2r^2} \right) \left[R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right] \Big|_{a-r}^{a+r} = 0$$

即球内没有电场。这与带电荷 q 的孤立导体球的电场相同。

§ 1-2 高斯通量定理

在描绘静电场时,电场强度穿过一个曲面的通量是很重要的概念。穿过面积元 dS 的电场强度通量 $d\Psi_E$ 为

$$d\Psi_E \equiv E \cos \theta dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-5)$$

式中 E 是 dS 处的电场强度, dS 的方向为其法向, θ 是 E 与 dS 间的夹角。当选取 dS 的方向与 E 一致时,有

$$E = \frac{d\Psi_E}{dS}$$

故 E 亦称电场强度通量密度。运用通量密度的概念可以方便地求解一些具有对称性的静电场,如球形对称、柱形对称等。通过任一曲面 S 的电场强度通量 Ψ_E

$$\Psi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-6)$$

式中, Ψ_E 的单位为伏·米 ($V \cdot m$)。

在无限大真空中,如有一点电荷 q 。取该点电荷所在处为球心,作一任意半径 r 的闭合球面 S ,则由该球面穿出的电场强度通量为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{r}^0 dS = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2}$$

所以

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

若 S 是任意形状的闭合面,该关系仍然成立。今证明于后。

这里需先介绍立体角的概念。在一个半径为 r 的球面上任取一个面积元 dS ,则此面积元可构成一个以球心 o 为顶点的锥体,如图 1-4 所示。取 dS 与 r^2 的比值来定义 dS 对球心所张的立体角 $d\Omega$,单位为球面度(sr)。立体角是该图中锥体的空间角度,在数值上等于锥体在单位半径的同心球面上割出的面积。整个闭合球面对球心所张的立体角为 4π 。一个不是球面元的 dS 对一点 o 所张的立体角可以这样计算:以 o

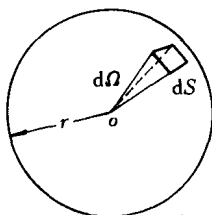


图 1-4

点为球心, o 到 dS 的距离 r 为半径作一球面, 取面积元矢量 dS 在球面上的投影 $dS \cdot r^0$ 与 r^2 的比值为面积元 dS 对 o 点所张立体角 $d\Omega$, 即有

$$d\Omega \equiv \frac{dS \cdot r^0}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (1-7)$$

式中, r^0 为由观察点 o 指向 dS 的单位矢量, θ 为 dS 与 r^0 间夹角。一个任意形状的闭合面对一观察点 o 所张立体角有两种情况: 一种情况是 o 点在闭合面内, 如图 1-5(a) 所示。可以用 o 点为球心, 任意半径作一球面, 则 dS 对 o 点所张立体角也就是它对 o 点构成的锥体在球面上割出的球面元的立体角。可见, 整个闭合面对 o 点所张的立体角与球面对 o 点所张的立体角相等, 皆为 4π 。另一种情况是 o 点在闭合面外, 如图 1-5(b) 所示。由于闭合面 S 的图示两部分表面的立体角为等量异号, 故相互抵消。依此推理, 可得 S 所张立体角为零。一个无限大的平面 S 对附近的 o 点所张立体角为 $\pm 2\pi$, 正负号与 S 的法向选取有关, 若 S 的法向由某区域 1 指向 2, 则 o 点位于区域 1 取正, 位于区域 2 取负。

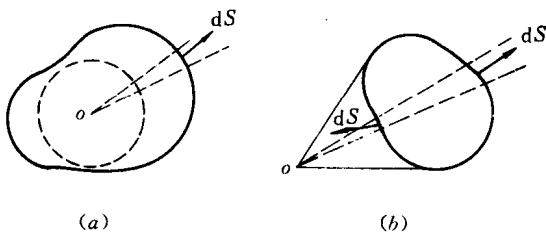


图 1-5

现在来证明高斯通量定理。真空中仅有一个点电荷 q 时, 由任一形状闭合面 S 穿出的电场强度通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \end{aligned}$$

式中, Ω 是 S 对 q 所在点所张的立体角。如果 q 在闭合面 S 之内, 则 Ω 为 4π , 上式变为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

如果 q 在闭合面 S 之外, 则 Ω 为零, 即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

真空中若有 N 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_N$, 则从闭合面 S 穿出的电场强度通量等于各点电荷产生的通量的代数和, 即

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oint_S \mathbf{E}_N \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_N}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

故

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0} \quad (1-8)$$

上式为真空中高斯通量定理的积分形式,它可推广到体电荷、面电荷和线电荷的情况。对于所有情况 $\sum q$ 表示闭合面 S 内的总电量。

静电场可用电力线来形象地描述电场强度通量。电力线的密疏用以表示通量密度的大小。电力线上任一点的切线方向与该点电场强度的方向一致。若 $d\mathbf{l}$ 是电力线的长度元, $\mathbf{E}$ 矢量将与 $d\mathbf{l}$ 的方向一致,故

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (1-9)$$

该式就是电力线的微分方程式,在直角坐标中将

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1-10)$$

例 1-3 题目与例 1-1 相同,但直线段 l 趋于无限长。

解 (1) 根据对称性,定性地分析场的分布特点。观察 P 点的电场强度。在与 τdl 对称的位置处总可找到 $\tau dl'$, 如图 1-6(a)。 τdl 所建立的分量为 $d\mathbf{E}$, $\tau dl'$ 所建立的分量为 $d\mathbf{E}'$ 。 $d\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{E}'$ 数值相等,合成矢量沿 r^0 方向。可以看出,电场强度的特点是:沿 r^0 方向并且以 l 为轴旋转对称。

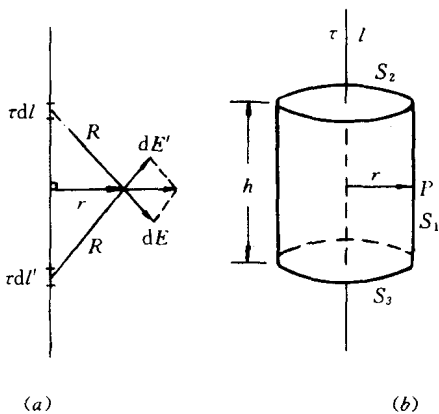


图 1-6

(2) 选择高斯面。以 l 为轴线,通过 P 点做一圆柱面 S_1 ,再加以上底 S_2 与下底 S_3 ,形成闭合面 S ,这就构成了高斯面,如图 1-6(b)。

(3) 运用真空中高斯通量定理:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\tau h}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\tau h}{\epsilon_0}$$

但等号左端第 2,3 两项为零,这是由于做点积运算时 $\cos\theta=0$ 的缘故,左端第一项做点积运算时 $\cos\theta=1$,故

$$\iint_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \iint_{s_1} dS = E(2\pi rh)$$

所以

$$E(2\pi rh) = \frac{\tau h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

与例 1-1 中结果一致,而计算较简便。

例 1-4 真空中有电荷云,以体密度 ρ 均匀分布于一半径为 a 的球内,如图 1-7(a)所示。试求球内、外的电场强度。

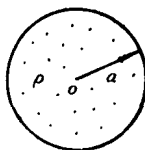
解 作球面为高斯面,球心位于 o 点,球面通过观察点 P ,球半径为 r 。运用高斯通量定理,若 P 在球内, $r < a$, 则

$$\oiint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{r}^0$$

(a)



若 P 在球外, $r > a$, 则

$$\oiint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} \left(= \frac{q}{\epsilon_0} \right)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} \left(= \frac{q}{\epsilon_0} \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

(b)

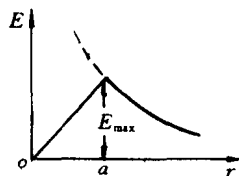


图 1-7

值得注意的是,球内电荷 q 的体密度只要保持球对称,即使不均匀亦可在球外获得同样的电场强度。

若 P 在球面上, $r = a$, 则

$$\mathbf{E} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \mathbf{r}^0$$

E 值达到最大 $E_{\max}$, 如图 1-7(b)所示。当球半径 a 趋于零时 $E_{\max}$ 也趋于零。这就是说,当 ρ 为有限值时, ρdV 在其电荷自身处所建立电场强度趋于零。

例 1-5 真空中有面电荷,均匀地分布于一个平面圆盘上,如图 1-8 所示,电荷面密度为 ρ_s 。求圆心 o 处平面两边无限邻近点的电场强度。

解 先分析 o 点法线 n 上任一观察点 P 的电场强度 E , 有

$$\mathbf{E} = E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\rho_s d\mathbf{S}}{r^2} \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{n}$$

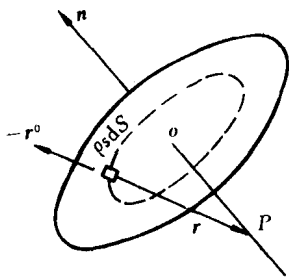


图 1-8

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dS \cdot (-\mathbf{r}^0)}{r^2} \\
&= \frac{-\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \iint_n d\Omega = \frac{-\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \Omega
\end{aligned}$$

当 P 点顺 $\mathbf{n}$ 方向移至邻近 o 点时, Ω 趋于 2π , $E_n = \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0}$; 当 P 点顺 $\mathbf{n}$ 方向移开 o 点但仍无限邻近时, Ω 为 -2π , $E_n = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$ 。注意 E_n 有突变, 突变量为 $\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ 。此时, 面电荷发出的电力线向圆平面两边伸展。

§ 1-3 静电场环路定理 · 电位

电场强度是矢量, 其运算比较复杂。因此, 希望能找到一个标量函数来表征静电场。力是矢量, 它所作的功恰是一个标量。据此, 我们来考查试体电荷 q_i 在静电场中沿某一路径从一点 P 移到另一点 Q 时, 电场力对 q_i 所作的功 $A_{PQ} = \int dA$, 有

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = q_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

可得

$$A_{PQ} = q_i \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

定义 A_{PQ} 与 q_i 的比值为沿某一路径由 P 点到 Q 点的电压, 并用 U_{PQ} 来表示。于是

$$U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_i} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-11)$$

该式表明静电场中两点间的电压, 等于由一点至另一点移动单位正电荷时电场力所作的功。电压的单位是伏[特](V)。

现在来研究, 在静电场中任意两点间的电压与所取路径是否有关的问题。先考查仅一个点电荷 q 的电场, 如图 1-9 所示。电压

$$\begin{aligned}
U_{PQ} &= \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right)
\end{aligned} \quad (1-12)$$

式中 r_P, r_Q 分别为 P, Q 两点与 q 间的距离。可以看出, P, Q 两点间的电压只与 P 点和 Q 点的位置有关, 而与所取路径无关。这是静电场的重要性质。对于具有多个点电荷、线电荷、面电荷或体电荷的电场, 该结论也是正确的。这是因为任何电荷分布都可以把它们分成许多点电荷的元电荷。根据叠加原理, 将每个元电荷所建立的电场进行叠加, 合成电场也必具有这一性质。

静电场的这一性质可以通过另一形式表达, 即电场强度的环路积分恒等于零。下面以图 1-10 为例来进行分析。若沿两条不同路径 PmQ 和 PnQ , 求电场强度 $\mathbf{E}$ 的线积分, 根据电压与所取路径无关, 应有

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PnQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$