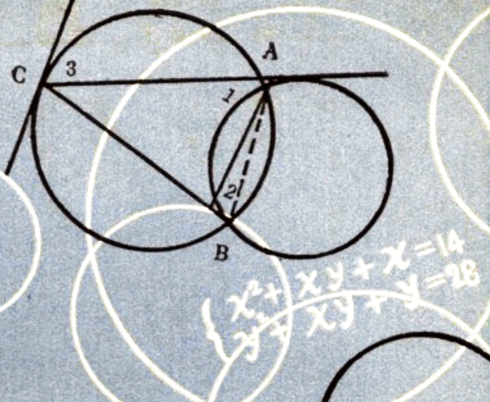
数理化基础知识

M



微积分

山东科学技术出版社

编者的话

数学、物理、化学是重要的基础学科。它已经渗透到人们的全部实践活动。纵览宇宙，运算天体，探索粒子之微，揭示生命之谜，从高深抽象的科学理论，到人们丰富繁杂的日常生活无处不用数理化。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数学、物理、化学的重要作用。

从提高整个中华民族的科学文化水平出发，为配合业余教育的全面开展，满足广大读者自学的急切需要，特别是为了帮助考大学的青年和在校学生加深对课本知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《数理化基础知识》。其中，《代数》 3 册，《几何》、《三角》、《解析几何》、《微积分》各 1 册；《物理》4 册；《化学》2 册。

在编写过程中，我们根据成人和速成的特点，参照教育部现行中学教学大纲的内容，由浅入深，循序渐进，着重讲清数学、物理、化学的基本概念和基本知识，对每一章中的关键性问题都做了重点介绍，并重视了运算技巧的训练和分析总结解题规律。每册书都选有一定数量的综合性习题，在选习题时还注意了习题的典型性，以培养读者举一反三的能力。每章后有小结，难度大的习题有提示，每册书末有答案备查。

这套基础知识丛书，可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

目　　录

第一章　函数与极限

微积分是微分和积分的合称。微分描述物体运动的局部性质，积分描述物体运动的整体性质。例如，求运动着的物体在某一瞬时的运动速度就是微分学问题；由运动物体在各点的瞬时运动速度求物体运动的全部路程就是积分学问题。微积分在自然科学和工程技术中有广泛的用途。

微积分研究的主要对象是函数，而极限理论是微积分的理论基础。因此，在这一章，先介绍函数与极限的基础知识。

§1·1　初等函数

函数在《代数》第二册里已作了较详细的讨论。这里先将基本初等函数总结一下，然后再进一步介绍复合函数及初等函数的概念。

1. 基本初等函数

客观世界的规律是错综复杂的，作为表达客观规律的函数关系的结构也是错综复杂的。而我们在实践中遇到的函数，往往是由一些较为简单而又常见的函数组成的。这些函数称为**基本初等函数**。可归纳为以下六种：

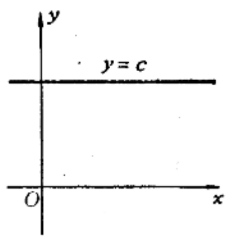


图 1·1

(1) 常数函数

$y=c$，这是所有函数中最简单的一类。对于任何 x，它始终取同一个值。定义域是 $(-\infty, +\infty)$(图 1·1)。

(2) 幂函数

$y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)。例如，$y=x$、x^2、x^3、x^{-1}、x^{-2}、$x^{\frac{1}{2}}$等等。这一类函数的定义域由 α 的值确定，如 $y=x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是$(0,+\infty)$；$y=x^{-2}$ 的定义域是$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$(图 1·2)。

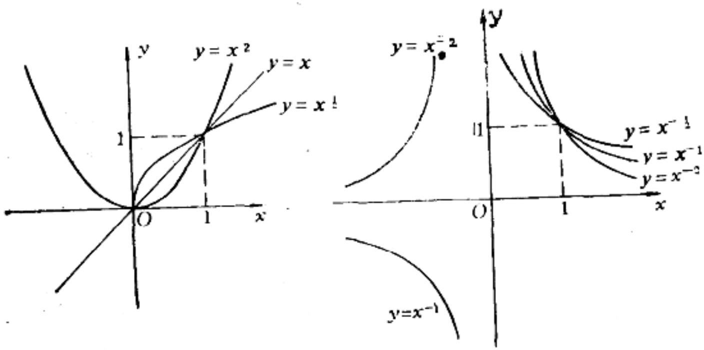


图 1·2

(3) 指数函数

$y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)。这类函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$(图 1·3)。

(4) 对数函数

$y=\log ax$($a>0$，$a\neq1$)。这类函数的定义域是$(0,+\infty)$(图 1·4)。对数函数 $y=\log ax$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数。在微积分中特别重要的是以数 e 为底的对数，称它为自然对数，记为 $\ln x$。

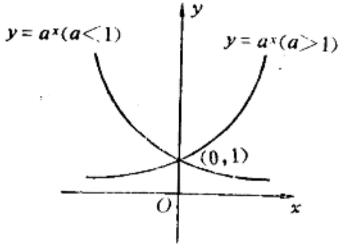


图 1·3

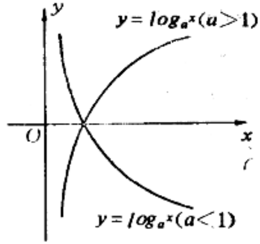


图 1·4

(5) 三角函数

$y=\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$。$\sin x$ 和 $\cos x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，$\operatorname{tg} x$ 的定义域是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$的实数（k 为整数），$\operatorname{ctg} x$ 的定义域是 $x\neq k\pi$ 的实数（k 为整数）（图 1·5～图 1·8）。

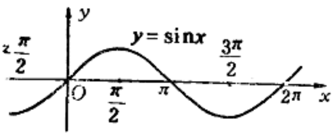


图 1·5

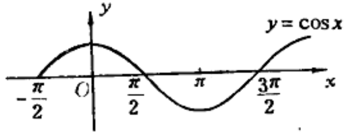


图 1·6

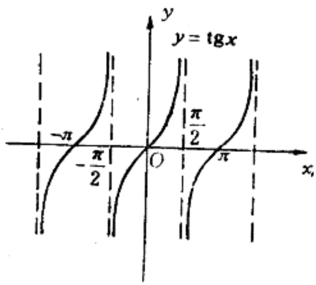


图 1·7

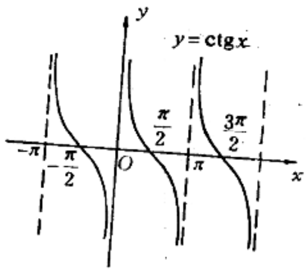


图 1·8

（6）反三角函数

$y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$. $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$，$\operatorname{arctg} x$ 和 $\operatorname{arcctg} x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$（图 1.9～图 1·12）。

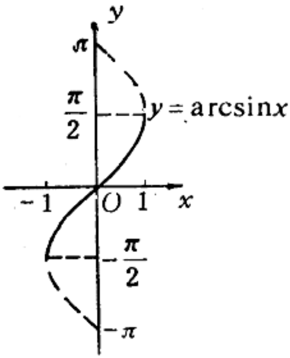


图 1·9

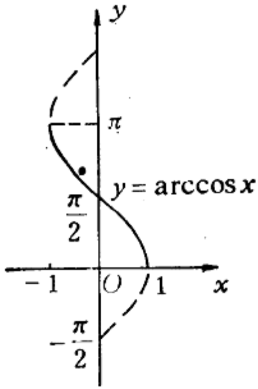


图 1·10

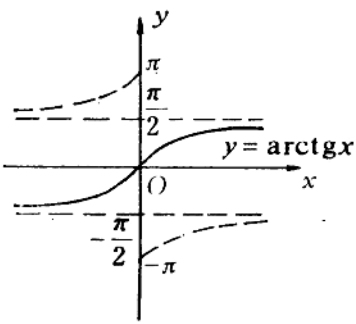


图 1·11

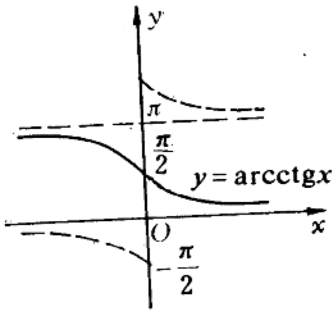


图 1·12

2. 复合函数

在实践中经常要遇到比较复杂的函数. 这些函数是由基本初等函数通过某些运算而成的.

例如, 图 1·13 是一种曲柄连杆机构的示意图. 设半径为 r 的主动轮以等角速度 ω 旋转, 连杆 AB 长 l, 则滑块 B 的运动规律, 即 $s(t)$ 的表达式为:

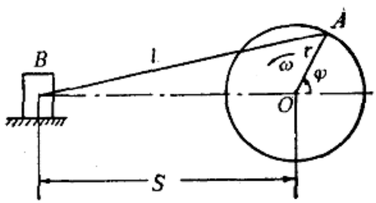


图 1·13

$$S=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}-r\cos\omega t.$$

在研究滑块的速度时, 因为 l 比 r 长很多, 所以可以略去根号中的 $r^2\sin^2\omega t$ 这一项, 简化为

$$S=l-r\cos\omega t.$$

这个较为复杂的函数式, 是由下面两种运算构成的:

一是复合运算. $\cos\omega t$ 这一项中的 ωt 是曲柄转过的角度, 记为 φ, $\varphi=\omega t$. 先对自变量 t 进行运算求得角 φ, 再对 φ 进行余弦运算得 $\cos\varphi$. 也就是说, $\cos\varphi$ 是 φ 的函数, φ 又是 t 的函数. 在这里运算的特点是:"运算套运算". 这种运算称为复合运算.

二是四则运算. 对 l、r、$\cos\omega t$ 这三项进行四则运算得 S.

通过上例的分析, 使我们认识到, 复杂的函数可以分解

为简单函数；反之，简单函数通过复合运算和四则运算，可以构成复杂的函数。四则运算我们比较熟悉，在这里不再介绍了。下面，介绍由复合运算构成的函数。

如果 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，则称 y 是 x 的复合函数，称 u 为中间变量。将函数 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$；相反，一个函数也可以用设置中间变量的方法，拆成几个函数的复合。

例如，若 $y=\lg u$，$u=\sin x$，则 $y=\lg\sin x$，这就是它们的复合函数。类似地可以考虑多个函数的复合函数。设 $y=\lg u$，$u=\sin x$，$x=t^2$，依次代入就得到复合函数 $y=\lg\sin t^2$。

例如，$y=\cos^2(x^2+1)$，可以看作是由三个函数

$$y=u^2,\ u=\cos v,\ v=x^2+1$$

复合起来的。这样就把一个复杂的函数拆成三个简单的函数。

如果把一个比较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成的复合函数，那么对这个函数的研究就可转变成对那几个简单函数的研究。而这些简单函数往往是基本初等函数或基本初等函数经四则运算构成的函数。这就使研究的问题易于解决。

【例 1】将函数 $y=\left[\dfrac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}\right]^3$ 分解成简单的函数。

解　$y=u^3$，$u=\dfrac{1-v}{1+v}$，$v=W^2$，$W=1-x^2$。

应当注意的是复合函数的定义域。复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，应该是在 $\varphi(x)$ 的定义域里那些使 $u=\varphi(x)$ 的值，属于函数 $f(u)$ 的定义域里的一切 x 值的全体。因此，在确定

复合函数的定义域时，应该先确定函数$\varphi(x)$的定义域，然后再从$\varphi(x)$的定义域中找出使$f(u)$有定义的x值的全体。解这类问题往往要借助于解一个不等式组。

【例 2】确定函数$y=\sqrt{\log_a x}\ (a>1)$的定义域。

解 这个函数的定义域由下面两个条件所决定：

$$\begin{cases} x>0, & (1) \\ \log_a x \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $\qquad x\geqslant 1.\qquad(3)$

(1)式与(3)式的公共解是$x\geqslant 1$，所以所求函数的定义域为$(1,+\infty)$。

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的且能用一个公式表示的函数，称为**初等函数**。在微积分中所讨论到的函数，绝大多数都是初等函数。

【例 3】试证明函数$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$是初等函数。

证明 因为函数$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$是两个函数$Z_1=\sqrt{\sin x}$和$Z_2=\sqrt{16-x^2}$的和，而$Z_1=\sqrt{\sin x}$是由$Z_1=\sqrt{u}$，$u=\sin x$复合而成的复合函数；$Z_2=\sqrt{16-x^2}$是由$Z_2=\sqrt{v}$，$v=16-x^2$复合而成的复合函数。

所以函数$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$是一个初等函数。

【例 4】试证明函数

$$y=\begin{cases} x+1, & -\infty<x<0 \\ 0\quad, & x=0 \\ x-1, & 0<x<+\infty \end{cases}$$

不是初等函数。

证明 因为函数y不能用一个公式表示，所以该函数不

是初等函数。

为了研究方便，初等函数可以根据运算的不同，分类如下：

$$\text{初等函数}\begin{cases}\text{代数函数}\begin{cases}\text{有理函数}\begin{cases}\text{有理整函数}\\\text{有理分函数}\end{cases}\\\text{无理函数}\end{cases}\\\text{超越函数}\end{cases}$$

(1) 有理整函数

由自变量与常量经过加、乘的运算而形成的多项式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

称为有理整函数。其中 x 是自变量，n 是正整数，a_0、a_1、a_2、…、a_n 等都是常量。

(2) 有理分函数

两个多项式相除的商

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

称为有理分函数。如果 b_0，$b_1,\cdots,b_{m-1}$ 都等于 0，而 $b_m\neq0$，它就是有理整函数。

有理整函数与有理分函数统称为有理函数，它是对自变量 x 作有限次四则运算而形成的。

(3) 无理函数

对自变量 x 施行四则运算和开方运算而形成的函数，称为无理函数，例如，

$$\sqrt{x^2+1}，\sqrt{ax^2+bx+c}，\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\text{等等。}$$

注　如果对自变量 x 不作开方运算，就不是无理函数，例如 $y=\sqrt{5}x+\sqrt{2}$ 不是无理函数。

有理函数与无理函数统称为代数函数。

（4）超越函数

除代数函数外，其它函数都称为超越函数，例如：

$$y=\sin x,\ y=x+\arccos x,$$

$$y=\ln\frac{x}{x+1},\ y=xa^{x}\ \text{等等。}$$

注 超越两字的字面意义就是“超出”的意思。超越函数就是含有超出代数运算(加、减、乘、除、乘方、开方)以外的运算形成的函数。

习 题 1

1．选取适当的中间变量，将下列函数分解为简单的函数：

（1）$y=\sin\frac{1}{3}t$；　　（2）$y=\sqrt{3x^2+4}$；

（3）$y=\sin^2 x$；　　（4）$y=2^{x\lg x}$；

（5）$y=\lg(\sqrt{x}-1)$；　　（6）$y=\ln\sin(x-3)$；

（7）$y=\arcsin(2+t^3)$；　　（8）$y=\operatorname{ctg}(x\cdot 2^x)$；

（9）$y=\lg\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$；　　（10）$y=(\sin\sqrt{1-x^2})^2$。

2．设 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$，求 $y=f[\varphi(t)]$：

（1）$f(x)=\sin x$，$\varphi(t)=2\operatorname{arctg} t(-\infty<t<+\infty)$；

（2）$f(x)=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$，$\varphi(t)=\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$。

3．求下列函数的定义域：

（1）$y=\lg(\sqrt{x}-1)$；　　（2）$y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$；

（3）$y=\ln(\ln x)$；　　（4）$y=\arccos\sqrt{2x}$；

（5）$y=\arcsin 10^x$；　　（6）$y=\ln\sin x$。

§1·2 极限的概念

1. 极限实例

【例 1】 已知自由落体的速度函数 $v=gt$（g 是重力加速度），求经过 3 秒后物体下落的路程。

解 对于等速运动，我们已经知道计算路程的公式是

$$路程=速度\times时间。$$

但是，自由落体的下落速度是随时间而变化的，不能直接用上面的公式计算路程。因此，以计算等速运动路程的方法为基础，来解决变速运动的路程问题，就会遇到速度的“变”与“不变”的矛盾。

图 1·14

为了解决这个矛盾，我们把时间区间 $[0,3]$ 分成 n 小段（图 1·14），各段时间长为 $\frac{3}{n}$，在每段开始时的速度分别为 $g\cdot0$，$g\cdot\frac{3}{n}$，$g\cdot2\cdot\frac{3}{n}$，$\cdots$，$g(n-1)\frac{3}{n}$。由于自由落体运动的速度是逐渐变化的，在很短一段时间 $\frac{3}{n}$ 里，速度的变化很小，可以近似地看成等速。因此，在各段时间内的速度以这段开始时的速度来近似代替，从而求出各段路程的近似值。

第 1 段 $(g\cdot0)\frac{3}{n}=0$，

第 2 段 $\left(g\cdot\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}=g\left(\frac{3}{n}\right)^2$，

第 3 段 $\left(g\cdot 2\cdot\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}=2g\left(\frac{3}{n}\right)^2$，

……………………………………

第 n 段 $\left[g(n-1)\frac{3}{n}\right]\frac{3}{n}=(n-1)g\left(\frac{3}{n}\right)^2$.

把各段路程近似值加起来，得到所求路程 s 的近似值 s_n：

$$s\approx s_n=0+g\left(\frac{3}{n}\right)^2+2g\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+(n-1)g\left(\frac{3}{n}\right)^2$$

$$=g\left(\frac{3}{n}\right)^2[1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$=g\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{n(n-1)}{2}=4.5g\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

时间区间[0,3]分得越细，即 n 越大，近似程度越高．如果是分成10段、100段、1000段……，即 $n=10$、$n=100$、$n=1000$…，可以算出 s_n 的一系列值，如下表：

n	10	100	1000	10000	100000
s_n	$4.5g-0.45g$	$4.5g-0.045g$	$4.5g-0.0045g$	$4.5g-0.00045g$	$4.5g-0.000045g$

从表中可以看出，随着小段越分越细，即 n 越来越大，算出来的 s_n 的值越来越接近“$4.5g$”．无限地分下去，即 n 无限增大，s_n 的值就无限接近“$4.5g$”．这一事实，简单地表示为：当 $n\to\infty$ 时，$s_n\to 4.5g$，或者说，当 $n\to\infty$ 时，s_n 的极限是 $4.5g$．数值 $4.5g$ 就是所要求的路程 s．记为

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}4.5g\left(1-\frac{1}{n}\right)=4.5g.$$

以上的计算过程可以归结为："分割，近似代替，求和，取极限"。这就是第四章要讲的定积分。

【例 2】已知自由落体下落的路程函数 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，求落体在时刻 t_0 秒的瞬时速度。

解　我们已经知道，等速运动在每一时刻的速度（瞬时速度）就是平均速度，有公式

$$速度=\frac{路程}{时间}.$$

而自由落体的下落速度是随时间而变化的，所以，上面的公式不能直接用。要求出落体在某一时刻的速度，必须解决速度的"变"与"不变"这对矛盾。

在时刻从 t_0 到 t 的很短一段时间内，速度变化不大，以"不变代变"，求出这段时间内的平均速度：

$$\bar{v}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}$$
$$=\frac{1}{2}g(t+t_0).$$

在时刻 t_0 的速度 v 近似等于这个平均速度 $\bar{v}$，当 t 越接近于 t_0，$\bar{v}$ 就越接近 v。给 t 一系列越来越接近于 t_0 的值，求出相应的 $\bar{v}$ 的值，如下表：

t	$t_0+0.1$	$t_0+0.01$	$t_0+0.001$	$t_0+0.0001$	$t_0+0.00001$
$\bar{v}$	$gt_0+0.05g$	$gt_0+0.005g$	$gt_0+0.0005g$	$gt_0+0.00005g$	$gt_0+0.000005g$

从表中可以看出，当 t 无限接近于 t_0 时，平均速度 $\bar{v}$ 无限接近于一个常数 gt_0，即当 $t\to t_0$ 时，$\bar{v}\to gt_0$，或者说：当 $t\to t_0$ 时，$\bar{v}$ 的极限是 gt_0。数值 gt_0 就是所要求的 t_0 时刻的瞬时速度，并记为

$$v=\lim_{t\to t_0}\bar{v}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0.$$

以上介绍的计算方法就是第二章要讲的微分法。

2. 数列的极限

在例 1 中，数列 $s_n=4.5g\left(1-\frac{1}{n}\right)$，当 n 无限增大时，s_n 无限接近于 $4.5g$，我们说数列 s_n 当 $n\to\infty$ 时以 $4.5g$ 为极限。一般数列极限定义如下：

定义 1 设数列 $\{x_n\}$：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近于一个常数 A，则称数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时以 A 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

所谓“当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 A”，意思是：当 n 充分大时，x_n 与 A 可以任意接近，要多近就有多近。换言之，当 n 充分大时，$|x_n-A|$ 可以任意小，要多小就有多小。

例如，数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时以 1 为极限，因为当 n 充分大时，

$$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}$$