

283233

物理学难题集萃

(增订本)

舒幼生 胡望雨 陈秉乾

高等教育出版社

物理学难题集萃

(增订本)

舒幼生 胡望雨 陈秉乾

04-44
257

高等教育出版社

(京)112号

内容简介

本书是编者在《物理学难题集萃》(1993年第1版)的基础上重新编篡而成的。本书在内容结构上删去了原书的全部基本题,新增和扩充了大量的难题;在题目的难度和广度上有所拓展,加进了从某些科研项目简化出来的题目;在解题分析上,编者不仅用准确、精炼的物理语言揭示了难题的难点所在,对关键步骤作了细致的分析,而且提供了不少独辟蹊径的解题方法,若非编者长期从事物理教学及研究工作,并全身心投入国际物理奥林匹克竞赛及国内各种物理竞赛工作,是难以编成本书的。本书是一部约二百万字的,具有资料保存价值的巨著。

本书可供各类高等学校物理专业师生使用;对国内外研究生考试有选用参考价值;也可作中学各级物理竞赛的培训资料,以及中学物理教师的参考用书。

责任编辑:奚静平

图书在版编目(CIP)数据

物理学难题集萃/陈秉乾等. - 2版(增订本). - 北京:
高等教育出版社,1999

ISBN 7-04-006999-7

I. 物… II. 陈… III. 物理学-习题 IV. 04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04987 号

物理学难题集萃(增订本)

舒幼生 胡望雨 陈秉乾 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京地质印刷厂

版 次 1993年5月第1版

开 本 787×1092 1/16

1999年6月第2版

印 张 82.75

印 次 1999年6月第1次印刷

字 数 1 500 000

定 价 67.90元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

解题是物理教学中的一个重要环节。它对于正确地、深入地理解基本内容,培养分析问题和解决问题的能力,以及从中汲取广博的实际知识等等,具有不可替代的重要作用。索末菲曾经写信告诫他的学生海森堡:“要勤奋地去做练习,只有这样,你才会发现,哪些你理解了,哪些你还没有理解。”杨振宁回忆他的大学生活时说过:“西南联大教学风气是非常认真的,我们那时所念的课,一般老师准备得很好,学生习题做得很多。”因而,编制、收集、选用各种题目特别是难题,并借此有效地提高学生的解题能力,已经成为广大师生瞩目的课题。

北京大学物理系普通物理教研室从1952年建立以来,走过了40多年漫长的教学历程。长期的教学实践,各种类型考试、竞赛的命题工作,特别是近10余年承担的参加国际中学生物理奥林匹克竞赛(IPhO)的中国队的培训、选拔和参赛任务,使我们积累了大量的资料和经验。应各方面的强烈呼吁,1993年6月我们编纂的《物理学难题集萃(附基本题,附详解)》(以下简称《原书》)由高等教育出版社出版。《原书》精选普通物理难题358题(其中力学113题,热学45题,电磁学83题,光学99题,狭义相对论18题),基本题285题,全书共643题,约百万字。出版后,受到广泛欢迎,近万部书很快销售一空。为了满足广大读者的迫切需要,我们放弃了重印《原书》的选择,决定重新编纂《物理学难题集萃(增订本)》(以下简称《增订本》)。《增订本》删除了《原书》中的基本题,保留了《原书》中的难题,并作了大量增补。另外,还精选了我们在培训、选拔参加IPhO中国队工作中编制的各种试题,作为《增订本》的最后部分,公诸于世。《增订本》中的难题仍大体按普通物理课程定位,其中力学170题,热学88题,电磁学151题,光学137题,近代物理39题,另有各类试题15份,83题,全书共668题,都有详细的分析和解答。

为了帮助读者更好地使用本书,下面谈谈我们在编纂过程中的一些基本想法和意图。

本书以“难题集萃”为名,显然,如何精选题目是编者面临的第一个关键问题。

我们的做法是,首先,从内容上说,尽力确保类型齐全,新颖先进,实用有效。为此,我们整理并保留了一批传统的普物难题,又从近年国内、外各种考试和竞赛中大量汲取了颇具新意的各类普物难题,其中还包括我们自己编制的各类普物难题。我们希望帮助读者了解各类普物难题大致可能深入和伸展到什么范围,涉及什么内容。我们希望勾画出各类普物难题演变和发展的历史轨迹。同时,还特别注意普物与后继课程之间的“结合部”即俗称“三不管”的内容,以及运用普通物理的原理和高等数学的工具可能解决的具有典型意义的各种理论问题和实际问题。相信本书提供的丰富资料会大大拓宽读者的视野。

值得指出的是,在本书中,我们并不是单纯地引用收罗到的各类普物难题,而是经过分析和提炼,力图把握住各类普物难题的核心,编纂成一系列题意简单明确而内涵丰富的题目。相信这将有助于读者登堂入室,逐步懂得难题的奥秘。体会到编者用心的教师,可取本书所列难题为素材,加工出适合各种用途的高层次难题,学生若也能有所体会,则表明其驾驭难题的能力已经大大提高了。

其次,题目的难易固然主要表现为物理内容和所需数学手段的深浅、繁简,但同时也在于提问角度的变化,综合、类比、联想能力的考验,以及能否正确地解决各种具体问题,等等.有鉴于此,我们不仅在内容上力求类型齐全,而且力图使读者能够接触到具有不同风格、形式、提问角度,乃至叙述方式的各类典型普物难题.

有了好的题目,怎样充分地加以利用,以便有效地提高学生的解题能力呢?这是编者面临的第二个关键问题.

我们认为,所谓解题,无非是分析、表达和演算.所谓分析,是指对具体问题的定性物理分析,即分析涉及的现象和过程,分析在各种条件下可能出现的结果或变化,以及导致这些结果或变化的物理原因.通过分析,才能建立起物理现象或过程的正确物理图象,把复杂的问题分解成各个相互联系的局部,判定各个局部的性质和特点,明确需要寻找的关系,把握住解题的关键.然后,在正确运用基本规律的基础上理出解题的线索,确定解题的步骤.所谓表达,是指对物理内容的数学表述,即赋予各种条件、要求和关系以确切的数学形式.所谓演算,不言而喻,是数学工具的运用,应该准确、快捷和规范化.定性的物理分析,恰当的数学表述和准确的定量演算是不可分割的,解题的成功正在于三者的完美结合.其中,我们想特别强调对题目的分析,因为它是表达和演算的根据,只有在分析基础上的解题才是自觉的、主动的和透彻的,才能避免盲目性和随意性.重在分析,务求透彻,讲究质量,并持之以恒,确有举一反三,触类旁通之功效,这是培养和提高解题能力的关键.本书每题在求解之前都先作分析,目的正在于此.

应该指出,我们从理论上把解题概括为分析、表达、演算三个环节,决不是试图树立某种新的教条或模式,而是力图根除乱套公式,片面追求数量,不求甚解的弊病.不仅如此,从某种意义上讲,实际的理论研究工作的都离不开提出问题、分析、表达、演算等环节.因此,通过解题,自觉地培养和提高定性物理分析的能力,积累和总结数学表达的经验,掌握熟练准确地运用各种数学工具的本事,或许正是解题的本意.当然,解题能力的提高决不是孤立的事情,而是教学质量和学生水平的综合反映.另外,解题也只是培养物理人才的一个方面,过分夸大亦非所宜.

随着21世纪的到来,我们这一代从五、六十年代开始任教的教师都将先后退休,新一代的精英已经或即将登台执教,因而在新老交替之际,总结经验,积累资料,培训师资,继往开来,适应时代发展的需要,已经成为当务之急.就习题而言,目前,各类普物习题集并不少见,但以精选难题并附详细分析、求解为内容的书籍并不多见,本书试图弥补这一空缺,从这方面给年轻教师以切实的帮助,同时,也是对我们自己在这方面工作的回顾和纪念.

蔡伯濂教授拨冗审阅全书,谨此致谢.

本书适合于各类高校讲授、学习普通物理的师生,中学物理教师,以及有志于各类物理竞赛的大、中学生使用和参考.

编者

1997年夏于北京大学

目 录

前言

第一部分	力学(170 题)	1
第一章	运动学(15 题)	3
第二章	牛顿运动定律(20 题)	29
第三章	功,能和动量(39 题)	67
第四章	角动量,有心运动(14 题)	134
第五章	静力平衡(12 题)	169
第六章	刚体动力学(27 题)	189
第七章	振动与波动(43 题)	249
第二部分	热学(88 题)	345
第一章	平衡态,理想气体状态方程(16 题)	347
第二章	热力学第一、第二定律(25 题)	366
第三章	气体动理论(理想气体动理论,麦克斯韦分布,玻尔兹曼分布,平均自由程,输运过程,布朗运动)(30 题)	410
第四章	范德瓦耳斯气体,液体,固体,相变(17 题)	465
第三部分	电磁学(151 题)	491
第一章	静电场,导体与介质(46 题)	493
第二章	磁场,磁介质(27 题)	570
第三章	电磁感应(23 题)	625
第四章	电流,直流电路(35 题)	664
第五章	交流电路,暂态过程及其他(20 题)	729
第四部分	光学(137 题)	778
第一章	几何光学(42 题)	780
第二章	光的干涉(27 题)	841
第三章	光的衍射(22 题)	888
第四章	光的偏振(35 题)	931
第五章	光的色散,散射和吸收(11 题)	986
第五部分	近代物理(39 题)	1005

第一章	量子物理(20题)	1007
第二章	狭义相对论(19题)	1051
第六部分	试题(83题)	1089
	力学试题(一)(6题)	1091
	力学试题(二)(6题)	1104
	热学试题(一)(5题)	1120
	热学试题(二)(5题)	1132
	电磁学试题(一)(5题)	1145
	电磁学试题(二)(5题)	1158
	电磁学试题(三)(电路)(5题)	1171
	电磁学试题(四)(电路)(5题)	1184
	光学试题(6题)	1198
	近代物理试题(5题)	1207
	综合试题(一)(6题)	1220
	综合试题(二)(6题)	1243
	综合试题(三)(6题)	1265
	综合试题(四)(6题)	1286
	综合试题(五)(模拟研究生入学普物试题)(6题)	1309

第一部分

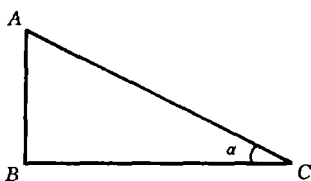
力 学

第一章 运动学

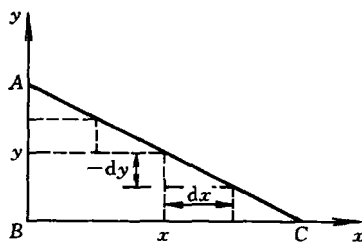
【题 1】 如力图 1-1-1, 直角三角形 ABC 在铅垂平面内, 斜边 AC 与水平边 BC 的夹角为 α , 一质点从 A 点由静止出发, 在重力作用下到达 C 点. 当所循路径为从 A 经 AB 和 BC 时, 从 A 到 B 需时 t_1 , 从 B 到 C 需时 t_2 ; 当所循路径为 AC 时需时 t_3 , 假定质点拐折时不花费时间, 且只改变速度方向而速度大小不变.

1. 为使循上述两条路径由 A 到 C 所需时间相等, 即使 $t_1 + t_2 = t_3$, 试问角 α 应为多大?

2. 设角 α 取上述值, 设质点只能在三角形范围内沿竖直路径和水平路径从 A 点到达 C 点, 显然有无穷多种选择. 试问什么路径花费的时间最多? 什么路径花费的时间最少? 所需的最长时间与最短时间之比是多少?



力图 1-1-1



力图 1-1-2

【分析】 质点在 AB 段和 AC 段均作匀加速直线运动, 前者的加速度为 g , 后者的加速度为 $g \sin \alpha$, 在 BC 段作匀速直线运动. 运用运动学公式可找到各段所需时间之间的关系, 再根据 $t_1 + t_2 = t_3$ 的要求即可确定相应的特定角度 α .

如力图 1-1-2, 符合题意的路径除了 AC 路径外, 还有由许多水平段以及把各水平段连结起来的各竖直段所构成的各种路径. 符合题意的各种路径中, 各竖直段长度之和等于直角边 AB , 各水平段长度之和等于直角边 BC , 由于质点拐折时不花费时间且速度大小也不改变, 故走完各竖直段所需的总时间 $t_{\text{总}}$ 就等于直接从 A 经 AB 到达 B 所需的时间 t_1 . 但走完各水平段所需的总时间则与质点在各水平段的速度大小有关, 即与各水平段的高度有关. 如果选择的路径, 使各水平段均位于三角形的底部 (即为 BC 边), 则质点在该水平段具有的速度最大, 所需时间应最短. 反之, 如果选择的路径, 使各水平段位于尽可能高的位置 (当然, 以不超出边线 AC 为条件), 则质点在各该水平段具有的速度最小, 所需时间应最长. 所以, 需时最长的路径为力图 1-1-2 中虚线所示的锯齿状路径, 各锯齿的水平段 dx 和竖直段 dy 均为无穷小量, 各锯齿紧靠着 AC 而又都不超出 AC 边. 确定了需时最短和最长的路径, 求出相应的最短和最长时间, 即可得出两者之比.

【解】 1. 设 $AC = L$, 由运动学公式, 有

$$L \sin \alpha = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1)$$

$$L \cos \alpha = g t_1 t_2 \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t_3^2 \quad (3)$$

由(1)、(2)两式,得

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L \sin \alpha}{g}}, \quad t_2 = \cos \alpha \sqrt{\frac{L}{2g \sin \alpha}} \quad (4)$$

故

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{L}{g}} \left(\sqrt{2 \sin \alpha} + \cos \alpha \sqrt{\frac{1}{2 \sin \alpha}} \right)$$

把(3)式代入上式,得

$$t_1 + t_2 = t_3 \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right)$$

由题意,要求

$$t_1 + t_2 = t_3 \quad (5)$$

故应有

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = 1$$

即

$$2 \sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2$$

解出

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \text{或} \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 48.6^\circ$$

2. 根据上述分析,需时最短的路径为由 A 点经 AB 和 BC 到达 C 点,或由 A 点经 AC 到达 C 点. 需时最长的路径为力图 1-1-2 中虚线所示的锯齿状路径,各锯齿的水平段 dx 和竖直段 dy 均为无穷小量,且紧靠着 AC 而又都不超过 AC 边.

对于需时最短的路径,所需时间为

$$t_{\min} = t_1 + t_2$$

由(4)式及题 1 的答案

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2} \cot \alpha = \frac{2}{3}$$

故

$$t_{\min} = t_1 + \frac{2}{3} t_1 = \frac{5}{3} t_1$$

对于需时最长的路径,所有竖直段所需总时间 $t_{\text{总}} = t_1$,所有水平段所需总时间用 τ_2 表示,则需时为

$$t_{\max} = t_1 + \tau_2$$

为了计算 τ_2 , 考虑高度为 y 的任一水平段 dx , 质点以速度 v 经过 dx 所需时间为

$$d\tau_2 = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{2g(L\sin\alpha - y)}}$$

因

$$\cot\alpha = -\frac{dx}{dy}$$

故

$$d\tau_2 = -\frac{\cot\alpha}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{L\sin\alpha - y}}$$

所有水平段所需总时间为

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \int d\tau_2 = -\frac{\cot\alpha}{\sqrt{2g}} \int_{L\sin\alpha}^0 \frac{dy}{\sqrt{L\sin\alpha - y}} \\ &= \cot\alpha \sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}} = t_1 \cot\alpha = \frac{4}{3} t_1\end{aligned}$$

所以

$$t_{\max} = t_1 + \tau_2 = \left(1 + \frac{4}{3}\right)t_1 = \frac{7}{3}t_1$$

t_{\max} 与 t_{\min} 之比为

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{7}{5}$$

【题2】 一质点以初速度 v_0 作直线运动, 所受阻力与其速度成正比. 试求当质点速度减为 $\frac{v_0}{n}$ ($n > 1$) 时, 质点经过的距离与质点所能行经的总距离之比.

【分析】 由题设, 质点的加速度 $a = \frac{dv}{dt} = -kv$, 积分可得出 $v(t)$, 再积分可得出 $x(t)$, 积分常数由初条件 $t=0$ 时 $v=v_0, x=0$ 确定. 上述 $v(t)$ 和 $x(t)$ 是 t 时刻质点的速度和位置, $x(t)$ 亦即经 t 时间后质点经过的距离. 总距离 x_m 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 x 值, 速度减为 $v_1 = \frac{v_0}{n}$ 时所经距离 $x(t_1)$ 则可由速度从 v_0 减为 v_1 所需的时间 t_1 求出.

【解】 质点沿直线运动, 取该直线为 x 坐标, 取原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置.

由题设, 在任意时刻 t , 质点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

式中 k 是常数. 分离变量, 得

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

积分, 得

$$\ln v = -kt + C$$

式中 C 为积分常量。初条件为

$$t=0 \text{ 时, } v=v_0$$

故

$$C = \ln v_0$$

代入上式,得

$$v = v_0 e^{-kt} \quad (1)$$

可见质点的速度 v 随时间 t 按指数衰减,如图所示。

由

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

积分,得

$$x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C'$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时, } x=0$$

故积分常量为

$$C' = \frac{v_0}{k}$$

代入上式,得

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = x_m (1 - e^{-kt}) \quad (2)$$

这是质点行经的距离 x 随时间 t 的变化关系,式中 $x_m = \frac{v_0}{k}$ 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 x 值,即为质点所能行经的总距离,如图所示。

设经 t_1 时间后,质点的速度减为 $v_1 = \frac{v_0}{n}$,由(1)式,得

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{n} = e^{-kt_1}$$

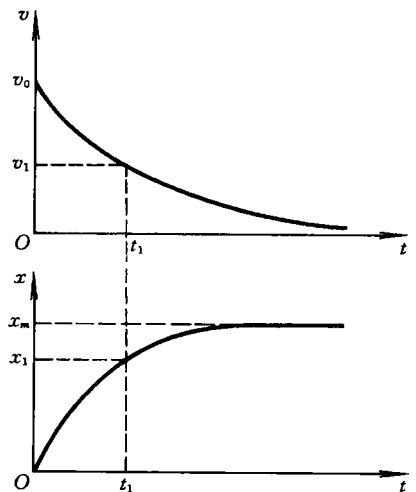
取对数,得

$$t_1 = \frac{\ln n}{k} \quad (3)$$

由(2)、(3)式,当质点速度减为 $v_1 = \frac{v_0}{n}$ 时所经距离 x_1 与质点所能行经的总距离 x_m 之比为

$$\frac{x_1}{x_m} = 1 - e^{-kt_1} = 1 - e^{-\ln n} = 1 - \frac{1}{n}$$

因此,在任一时刻 t ,质点的位置 x 与速度 v 遵循以下规律



力图 1-2-1

$$\frac{v}{v_0} + \frac{x}{x_m} = 1$$

【题3】 一质点以初速度 v_0 作直线运动,所受阻力与其速度的三次方成正比.试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律.

【分析】 与上题相仿,从 $a = \frac{dv}{dt} = -kv^3$ 出发,通过积分可得 $v(t)$ 和 $x(t)$,消去 t 即可得出 $v(x)$, $v(x)$ 也可直接通过积分求得.

【解】 取质点运动所循的直线为 x 轴,取坐标原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置.由题设,质点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^3$$

或

$$\frac{dv}{v^3} = -k dt$$

积分,得

$$\frac{1}{2v^2} = kt + C, \quad \text{或} \quad \frac{1}{v^2} = 2kt + C'$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时, } v = v_0$$

故积分常量

$$C' = \frac{1}{v_0^2}$$

代入上式,得

$$v(t) = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

因 $v = \frac{dx}{dt}$,故

$$dx = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

积分,得

$$x = \frac{1}{kv_0} \sqrt{1 + 2kv_0^2 t} + C$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时, } x=0$$

故积分常量

$$C = -\frac{1}{kv_0}$$

代入上式,得

$$x(t) = \frac{1}{kv_0} (\sqrt{1+2kv_0^2 t} - 1) \quad (2)$$

由(1)、(2)式,消去 t ,得

$$v(x) = \frac{v_0}{1+kv_0 x} \quad (3)$$

又,因

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

及

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^3$$

故

$$v \frac{dv}{dx} = -kv^3, \quad \text{或} \quad \frac{dv}{v^2} = -k dx$$

积分,得

$$-\frac{1}{v} = -kx + C$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时, } v=v_0, \quad x=0$$

故积分常量

$$C = -\frac{1}{v_0}$$

代入上式,得

$$\frac{1}{v} = kx + \frac{1}{v_0} = \frac{1+kv_0 x}{v_0}$$

或

$$v(x) = \frac{v_0}{1+kv_0 x}$$

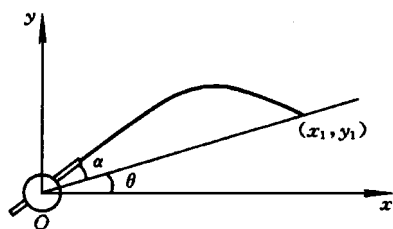
此即上述(3)式.

【题4】 如图,在倾角为 θ 的山坡平面上有一门大炮,大炮相对于山坡的仰角为 α ,发射炮弹的初速为 v_0 . 试求炮弹着点的位置,并求能达到最大射程的仰角,忽略空气阻力.

【分析】 炮弹射出后,只受重力作用,水平方向的运动是匀速直线运动,竖直方向的运动是匀加速直线运动,由此不难求出炮弹的轨迹方程 $y(x)$,它和山坡的轨迹方程 $y = x \tan \theta$ (直线) 联立求解得出的 (x_1, y_1) 就是炮弹着点的位置. 显然, x_1 (或 y_1) 将随仰角 α 变化,最大射程相应的仰角可由极值条件 $\frac{dx_1}{d\alpha} = 0$ (或 $\frac{dy_1}{d\alpha} = 0$) 求出. 也可由 x_1 (或 y_1) 的表达式给出射程的表达式,由后者得出最大射程相应的仰角.

【解】 如图,取直角坐标 Oxy ,原点 O 在大炮处, $t=0$ 时刻发射炮弹,于是炮弹的初始位置、初速度和加速度分别为

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ v_{0x} = v_0 \cos(\theta + \alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\theta + \alpha) \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



力图 1-4-1

炮弹的运动方程为

$$\begin{cases} x = tv_0 \cos(\theta + \alpha) \\ y = tv_0 \sin(\theta + \alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去时间 t , 得出炮弹的轨迹方程为

$$y = x \tan(\theta + \alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta + \alpha)} x^2 \quad (1)$$

山坡的轨迹方程为

$$y = x \tan \theta \quad (2)$$

(1)、(2)式联立求解, 得出炮弹着点的位置为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{v_0^2}{g} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \\ y_1 = \frac{v_0^2}{g} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \tan \theta \end{cases} \quad (3)$$

最大射程相应的仰角应满足的条件是

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 0$$

即

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\alpha} &= \frac{v_0^2}{g} [2 \cos 2(\theta + \alpha) + 4 \tan \theta \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha)] \\ &= \frac{2v_0^2}{g} [\cos 2(\theta + \alpha) + \tan \theta \sin 2(\theta + \alpha)] = 0 \end{aligned}$$

即

$$\tan \theta = -\cot 2(\theta + \alpha)$$

即

$$\cot 2(\theta + \alpha) = -\tan \theta = \cot(\theta + \frac{\pi}{2})$$

即

$$2(\theta + \alpha) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

故达到最大射程的仰角为

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

又,由(3)式得出射程 R 的公式为

$$\begin{aligned} R &= \frac{x_1}{\cos \theta} = \frac{v_0^2}{g \cos \theta} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \theta} [\tan(\theta + \alpha) - \tan \theta] \cos^2(\theta + \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \theta} \frac{\cos(\theta + \alpha) \sin \alpha}{\cos \theta} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin(\theta + 2\alpha) - \sin \theta] \end{aligned}$$

当

$$\theta + 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

时,达到最大射程,为

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} (1 - \sin \theta)$$

【题5】 两质点在地面上同一地点以相同速率 v_0 从不同抛射角抛出. 试证明,当两质点的射程 R 相同时,它们在空中飞行时间的乘积为 $\frac{2R}{g}$, 忽略空气阻力.

【分析】 由质点斜抛运动的轨迹方程 $y(x)$ 及落地点 P 的纵坐标 $y=0$, 联立求解可得出射程公式, 进而得出飞行时间公式. 显然, 射程 R 和飞行时间 t 都会随初速率 v_0 以及抛射角 α 变化. 现在, 两质点的抛射角 α_1, α_2 不同, 而射程相同均为 R , 这要求 α_1 和 α_2 满足一定的关系. 把这一关系代入飞行时间公式, 当可证明 $t_1 t_2 = \frac{2R}{g}$.

【解】 取坐标如图, 当质点从 O 点以初速率 v_0 和抛射角 α 抛出时, 有

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去时间 t , 得出斜抛运动的轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

落地点 P 的纵坐标为零, 即

$$y = 0$$

由上两式联立解出的 x 即为射程 R ,

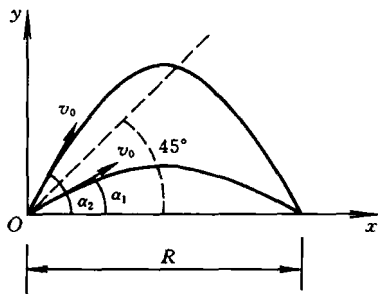
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

相应的飞行时间为

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

现两质点从同一地点 O 以相同初速率 v_0 抛出, 抛射角不同, 分别为 α_1 和 α_2 , 但射程相同, 故有

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$$



力图 1-5-1