

# 射流力学

◆ 董志勇 编著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 射流力学

董志勇 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统地阐述了射流的基本概念、基本特性、基本理论和最新研究成果,内容主要包括:层流射流、紊动射流、自由射流、冲击射流、壁面射流、旋动射流、变密度射流、双股射流、三维射流、射流传热传质、射流掺气、射流数学模型及其数值方法等。本书内容丰富,涉及工程实践中遇到的种种射流问题,几乎涵盖了所有射流类型。

本书可供水利水电工程、航空航天工程、给水排水工程、环境工程以及力学、能源、化工、冶金、机械、食品等领域的学生、教师、科研人员及工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

射流力学/董志勇编著. —北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-015075-9

I. 射… II. 董… III. 射流动力学 IV. O358

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 014899 号

责任编辑:胡 凯 于宏丽/责任校对:鲁 素

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2005年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年3月第一次印刷 印张:15

印数:1—2 500 字数:276 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 作者简介

董志勇,1962年11月生,山西潞城人,教授,工学博士,现在浙江工业大学建筑工程学院工作。1993年毕业于成都科技大学水利系水力学及河流动力学专业,获工学博士学位;1993~1995年在中国科技大学近代力学系流体力学专业做博士后;曾在澳大利亚昆士兰大学(The University of Queensland)、意大利阿基米德公司(Ponte di Archimede S. p. A.)、香港大学等做访问学者或做合作研究。长期从事水力学及流体力学方面的科研、教学工作。近年来,主持完成多项国家级、省部级研究项目,已出版专著《冲击射流》一部、浙江省高等教育重点教材《环境水力学》一部,在《中国科学》等国内外学术刊物上发表论文60多篇,其中被SCI, EI, ISTP三大检索收录30多篇。获教育部科技进步二等奖一项。现为浙江省“新世纪151人才工程”人选,浙江省高校中青年学科带头人,国际水利研究协会(IAHR)会员,《水动力学研究与进展》编委,《浙江工业大学学报》编委。

## 前 言

射流是指流体从各种形式的孔口或喷嘴射入同一种或另一种流体的流动。在水利水电工程、航空航天工程、给水排水工程、环境工程以及化工、冶金、能源、机械等许多领域,都会遇到大量的射流问题。

本书系统地阐述了在工程实践中遇到的各种射流问题,几乎涵盖了所有射流类型;既叙述经典理论,又论述最新研究成果。主要思路为:从层流射流到紊动射流;从自由射流到冲击射流;从单股射流到双股射流;从等密度射流到变密度射流;从无旋动射流到旋动射流;从射流的动量传递到射流的传质、传热;从平面、轴对称射流到三维射流、壁面射流、射流掺气;从试验研究到理论分析及数值模拟等。在叙述上,力求深入浅出、重点突出。为便于读者查找,参考文献放在书后统一列出,中文以姓氏笔画为序,西文按字母顺序;为适应不同层次读者使用和方便教学,对书中常用的外国人名译成通俗的中文译名;另外,书末附有射流力学常用专业术语中英对照表。如果本书的内容能对读者的学习、教学、研究、设计等有所帮助的话,作者将感到无比欣慰。

本书的出版得到“浙江工业大学专著出版基金”的资助,谨此表示衷心的感谢。作者的多位国内外同仁曾惠赠一些宝贵的资料或给予热情的帮助和鼓励,在此谨向他们表示真诚的谢意。特别要感谢赵玉英女士,在本书的写作和出版过程中,她帮助整理资料、绘图、电子排版及校对等工作。最后,感谢在本书写作和出版过程中所有给予关心、支持和帮助的人们。

在本书写作过程中,作者虽力求审慎,但由于水平有限,书中缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

2004年5月于杭州

E-mail: [dongzy@zjut.edu.cn](mailto:dongzy@zjut.edu.cn)

# 目 录

前言	
第一章 绪论	1
第二章 层流射流	4
2.1 基本方程	4
2.1.1 黏性流体运动的基本方程	4
2.1.2 层流边界层基本方程	4
2.2 平面层流射流	5
2.3 圆形层流射流	7
第三章 自由紊动射流	11
3.1 紊动射流基本方程	11
3.1.1 紊流基本方程	11
3.1.2 恒定紊流边界层方程	12
3.2 紊流的半经验理论	13
3.2.1 普朗特混合长度理论	13
3.2.2 普朗特自由紊流理论	15
3.3 自由紊动射流的一般特性	15
3.3.1 断面流速分布的相似性	16
3.3.2 射流边界线性扩展	17
3.3.3 动量通量守恒	18
3.4 平面紊动射流	18
3.4.1 格特勒解	19
3.4.2 平面紊动射流主体段	20
3.4.3 平面紊动射流初始段长度	23
3.5 圆形紊动射流	23
3.5.1 施里赫廷解	23
3.5.2 圆形紊动射流主体段	25
3.5.3 圆形紊动射流初始段长度	26
3.6 三维紊动射流	27
3.6.1 特征衰减区	28
3.6.2 半值宽	28

3.6.3	速度剖面的相似性	29
3.6.4	轴对称型衰减区	29
3.7	紊动射流相干结构简介	31
<b>第四章</b>	<b>紊动冲击射流</b>	<b>33</b>
4.1	引言	33
4.2	平面紊动冲击射流	34
4.2.1	自由射流区——冲击区	34
4.2.2	冲击区——壁面射流区	36
4.2.3	理论分析	37
4.3	圆形紊动冲击射流	41
4.3.1	速度剖面与速度比尺	41
4.3.2	压力剖面与压力比尺	42
4.3.3	壁面切应力	43
4.3.4	理论分析	43
4.4	冲击射流紊动结构	44
4.4.1	紊动强度	44
4.4.2	能量谱分布	45
4.4.3	两点双重速度相关	47
4.4.4	紊动能耗散导数与微尺度	49
4.4.5	积分尺度	50
4.4.6	紊动能平衡	51
4.5	冲击动水压力	54
4.5.1	时均压力分布	54
4.5.2	压力脉动强度分布	55
4.5.3	掺气对动水压力影响的理论分析	56
<b>第五章</b>	<b>壁面射流</b>	<b>58</b>
5.1	概述	58
5.2	格劳特壁面射流理论	59
5.2.1	层流壁面射流	59
5.2.2	紊动壁面射流	63
5.3	径向壁面射流	69
5.3.1	理论分析	69
5.3.2	实验结果	72
5.4	三维壁面射流	76
5.4.1	三维壁面射流的时均特性	76

5.4.2	三维壁面射流的紊动特性	81
<b>第六章</b>	<b>旋动射流</b>	<b>84</b>
6.1	概述	84
6.2	旋动射流的旋度和卷吸能力	86
6.2.1	旋度	86
6.2.2	卷吸能力	87
6.3	旋动射流轴向速度、切向速度及径向速度分布	88
6.3.1	旋动射流出口处速度分布	88
6.3.2	旋动射流的速度分布	88
6.4	旋动射流速度、静压轴向衰减规律	92
6.4.1	轴向速度、旋转速度及压力最大值沿轴向衰减的理论分析	92
6.4.2	轴向速度、旋转速度及静压最大值沿轴向衰减的实验结果	94
6.5	旋动射流紊动特性	95
6.5.1	旋动射流紊动强度轴向变化	95
6.5.2	旋动射流雷诺应力分布	95
<b>第七章</b>	<b>双股射流</b>	<b>98</b>
7.1	双股射流基本流动特征	98
7.1.1	会聚区	98
7.1.2	联合区	103
7.2	双股冲击射流的时均、紊动特性	109
7.2.1	上喷流的相似性	109
7.2.2	上喷流边界的扩展与轴线速度的衰减特性	111
<b>第八章</b>	<b>变密度射流</b>	<b>113</b>
8.1	羽流	113
8.1.1	积分方法	113
8.1.2	量纲分析法	119
8.2	圆形浮射流	120
8.2.1	静止均质环境中圆形浮射流	121
8.2.2	线性分层环境中圆形浮射流	127
8.3	二维浮射流	130
8.3.1	静止均质环境中二维浮射流	130
8.3.2	线性分层环境中二维浮射流	133
8.4	浮射流的量纲分析法	136
<b>第九章</b>	<b>射流传热、传质及掺气</b>	<b>141</b>
9.1	紊动扩散方程	141



9.1.1 分子扩散	141
9.1.2 紊动扩散	143
9.2 紊动施密特数、普朗特数	144
9.2.1 紊动施密特数	144
9.2.2 紊动普朗特数	145
9.3 浓度、温度扩散特性	146
9.3.1 自由射流若干扩散特性	146
9.3.2 冲击射流横断面浓度分布	147
9.3.3 冲击射流轴线浓度衰减规律	150
9.4 射流掺气过程	151
9.4.1 射流直径对掺气最小速度的影响	151
9.4.2 液体黏性对掺气最小速度的影响	152
9.4.3 掺气最小速度相关分析	153
9.4.4 射流速度对气泡大小及频率的影响	155
9.4.5 紊动强度对掺气最小速度的影响	155
9.4.6 射流掺气机理	156
9.4.7 冲击点掺气特性	159
9.5 射流掺气量计算式	162
9.5.1 概述	162
9.5.2 欧文公式	165
9.5.3 范迪桑德-史密斯公式	167
9.6 气泡离散输运特性	169
9.6.1 气泡大小	169
9.6.2 气泡穿透深度	170
9.6.3 传质率	170
<b>第十章 射流数值模拟</b>	<b>172</b>
10.1 紊流模型	172
10.1.1 准确的雷诺应力方程、 $k$ 方程和 $\epsilon$ 方程	172
10.1.2 单方程模型	173
10.1.3 标准 $k$ - $\epsilon$ 模型	174
10.1.4 代数应力模型	175
10.2 涡量-流函数法	178
10.2.1 沃尔夫斯坦方法	178
10.2.2 艾格沃尔-鲍厄方法	179
10.3 原始变量法	190

---

10.3.1 有限体积法基本思想 .....	192
10.3.2 通用微分方程的二维离散化方程 .....	193
10.3.3 QUICK 格式 .....	195
10.3.4 三维问题的离散化方程 .....	197
10.3.5 SIMPLE 系列算法 .....	198
10.3.6 射流场模拟结果 .....	202
<b>参考文献</b> .....	<b>214</b>
<b>射流力学常用术语中英对照</b> .....	<b>223</b>

# 第一章 绪 论

射流是指流体从各种形式的孔口或喷嘴射入同一种或另一种流体的流动。在水利水电工程、航空航天工程、给水排水工程、环境工程以及化工、冶金、能源、机械等许多领域,都会遇到大量的射流问题。

若自喷嘴射出的流体射入流体特性相同的无限空间中,则称之为淹没自由射流;若射流处于层流状态,则称为层流射流;若射流为紊流状态,则称之为紊动射流或湍射流。实验研究表明,紊动自由射流一般分为三个区段,即初始段、过渡段及主体段。初始段由势流核和剪切层组成,在势流核内,其速度保持原来的出射速度,边界逐渐向射流轴线收缩直至相交;在剪切层内,其速度分布具有误差函数形式,并自入射点逐渐向两侧扩展,即边界层的扩展。实验观察表明,剪切层内存在相干结构,亦称拟序结构。这种有组织结构向下运动时,有一种成对合并的现象,称之为涡旋配对。射流的断面扩展及其对周围流体的卷吸就是涡旋配对的结果。在自由射流主体段,边界层充分发展,其速度、浓度(温度)等均服从高斯分布。射流的过渡段很短,一般在分析中常予以忽略。另外,对于三维紊动射流,按其轴线速度衰减状况,可分为三个明显的流动区域,即势流核心区、特征衰减区及轴对称(径向型)衰减区。

冲击射流是指自由射流对固体壁面的冲击流动,按其流动特性可分成三个流动区域:①自由射流区,该区流动特性与自由射流相同;②冲击区,该区流动改变方向,并且有很大的压力梯度;③壁面射流区,对于紊动壁面射流,分为内层和外层,内层具有壁面边界层的特性,外层则具有自由射流的特性。

按照驱使射流在下游环境中进一步运动和扩散的动力来划分,可分为动量射流(俗称射流)、浮力羽流(俗称羽流)、浮力射流(俗称浮射流)。动量射流是指射流的出流速度较高,它依靠出射的初始动量来维持自身的继续运动,所以动量对它的流动起支配作用。羽流是指射流的初始出射动量很小,进入环境以后靠浮力的作用来促使其进一步运动和扩散,所以浮力起着支配作用。由于浮力引起的扩散云团形似羽毛状,故称羽流。浮力的产生一般来自两种原因:其一是由于射流流体本身的密度与周围环境流体密度不同,如密度小的废水排入含盐度大的海水中;其二是由于温差引起的浮力,如冷却水排入河流,烟囱排入大气的烟雾等。浮射流则是兼受动量和浮力两种作用而运动的射流,实际上是一种初始密度不同于周围环境流体(容纳水体)密度的射流,其密度差有时为正有时为负,决定了浮射流的方向。

若射流的密度比周围环境流体密度小,则浮力的方向竖直向上,叫作正浮力。在正浮力作用下的射流,就叫作正浮力射流;若射流的密度比周围环境流体密度大,则浮力的方向竖直向下,叫作负浮力,相应的射流就叫作负浮力射流;若射流的密度恰好与周围环境流体密度相等,则没有浮力而仅有初始动量,即所谓的动量射流或叫纯射流。应当指出,离源点足够远后的浮射流终究会变成羽流。若密度随深度是线性增加或随高度是线性减小,则称为线性分层环境。对于射入分层环境的正浮力射流,在起初的一段与射入均质环境的正浮力射流相近,也存在初始段、主体段。由于卷吸作用使密度较大的环境流体进入射流,射流内的密度沿程逐渐增加,浮力将逐渐减小。达到某一高度处,射流轴线上的流体密度与该高度处环境流体密度相等,则浮力为零。由于惯性作用,浮力射流继续向上运动,其密度将大于相应高度上的环境流体的密度,形成负浮力。在惯性和负浮力共同作用下,浮力射流上升到一极限高度,而后将转向下方并向两侧扩展。

旋动射流是自由射流加旋转的一种复合流动,与普通射流的区别在于有一切向速度(旋转速度),使喷嘴内的流体旋转起来以使从喷嘴出射的流体有一个切向速度分量,除了在无旋动射流中存在的轴向、径向速度分量外,旋转速度(切向速度)的存在导致径向、轴向压力梯度。在旋动非常强的情况下,轴向逆压梯度足以形成轴向反向流。旋动射流的扩展比普通射流宽,其轴线速度的衰减亦比普通射流快。因此,旋动射流的卷吸和掺混作用是较强的,在许多工业、工程技术领域有着重要的应用前景。

在实际应用中,除了常见的平面和轴对称射流之外,还会遇到从方形、矩形、椭圆形及三角形等喷嘴出射的三维自由射流和三维壁面射流问题。

按射流股数来划分,有单股、双股乃至多股射流。双股射流按其流动特性可分为两个区,即会聚区、联合区。对于多股冲击射流,除了单股冲击射流的基本流动区域外,还存在上喷形成区和上喷流区,由相邻两股或多股壁面射流相互碰撞所形成。

当液体射流的速度较大或存在速度间断时会发生掺气现象,即把周围空气卷吸到射流中形成气液两相流。如自然界中乳白色的天然瀑布就是典型的射流掺气现象;水利工程中挑、跌流水舌掺气及其在水垫塘中的扩散运动、水跃和强迫掺气设施中壁面射流的掺气等;环境工程中使污染水体复氧的堰流水舌掺气;冶金工业中浇铸的高温金属熔液掺气;化工中使气体溶解在液体中的搅拌射流。此外,在食品、医药、化妆品等工业中亦常会遇到射流的掺气问题。

射流的传热、传质亦是工程技术中关注的问题。已有研究资料表明,射流的浓度、温度扩散比动量扩散快。

在以下各章中,本书将对上述各类射流问题进行较为系统的论述,主要思路

为:从层流射流到紊动射流;从自由射流到冲击射流;从单股射流到双股射流;从等密度射流到变密度射流;从无旋动射流到旋动射流;从射流的动量传递到射流的传质、传热;从平面射流、轴对称射流到三维射流以及壁面射流、射流掺气;从实验研究到理论分析及数值模拟等。既叙述经典理论,又论述最新研究成果。

## 第二章 层流射流

### 2.1 基本方程

本节简单回顾一下黏性流体运动的基本方程和层流边界层的基本方程。

#### 2.1.1 黏性流体运动的基本方程

##### 1. 连续性方程

连续性方程是质量守恒原理在流体力学中的表述,其张量形式可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

式中,  $\rho$  为流体密度,  $u$  为流速, 下标遵守爱因斯坦求和约定。

对于不可压缩流体, 即  $\rho = \text{const}$ , 上式可简化为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

##### 2. 运动方程

运动方程是牛顿第二定律在流体运动中的表现形式, 亦称为动量方程或纳维埃-斯托克斯(Navier-Stokes)方程, 通常简称为 N-S 方程, 其张量形式可写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.3)$$

式中,  $f$  为质量力;  $p$  为压力;  $\mu, \mu'$  分别为流体的动力黏性系数和体积变形黏性系数;  $\nu$  为流体的运动黏性系数。对于不可压缩流体, 则有

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.4)$$

#### 2.1.2 层流边界层基本方程

利用边界层特征, 由 N-S 方程可导出层流边界层方程。直角坐标系中二维不可压缩流体的层流边界层基本方程可写作

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

上式亦称之为普朗特(Prandtl)边界层方程,是由普朗特(1904)首先提出的。

柱坐标系中层流边界层的基本方程可表示成

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (2.8)$$

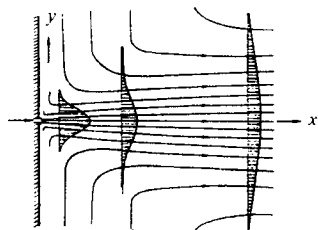
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.10)$$

柱坐标形式的层流边界层方程可用于研究轴对称层流边界层问题,如圆形层流射流等。

## 2.2 平面层流射流

从狭缝中射出的流体,可看作平面层流射流(plane laminar jet),亦叫作二维层流射流。最早研究这个问题的学者,首推施里赫廷(Schlichting 1933)和 Bickley(1939),他们分别从理论上推导出平面层流射流的速度分布和流量。Andrade 和 Tsien(1937)则对平面层流射流做了量测,并证实了施里赫廷、Bickley 的理论分析。若定义射流雷诺数为  $Re = ub/\nu$ , 其中  $b$  为射流宽度,实测结果表明,当  $Re \leq 30$  时,射流为层流运动。



现考察层流射流。从狭缝中射出一股射流如图 2.1 平面层流射流流动图案

图 2.1 所示,射流边界的摩擦作用带动周围静止流体一起运动。今将坐标原点放在狭缝口,把射流轴线作为  $x$  轴,射流扩展方向作为  $y$  轴。由于作用于射流上的周围流体的压力不变,因此沿  $x$  方向的压力梯度为零。这样,射流的动量通量将保持守恒,若以  $J$  表示动量通量,则

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \text{const} \quad (2.11)$$

假定速度剖面  $u(x, y)$  存在相似性,并可表示成  $u = u(y/b)$ , 其中射流宽度  $b \sim x^q$ 。另外,设流函数为

$$\Psi = x^p f\left(\frac{y}{b}\right) = x^p f\left(\frac{y}{x^q}\right)$$

式中,  $p, q$  可由沿  $x$  方向的动量通量守恒条件及边界层方程给出

$$2p - q = 0 \quad (2.12)$$

$$2p - 2q - 1 = p - 3q \quad (2.13)$$

解得  $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ , 这样  $\Psi$  可进一步写成

$$\Psi = \nu^{1/2} x^{1/3} f(\eta) \quad (2.14)$$

$$\eta = \frac{1}{3\nu^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}} \quad (2.15)$$

因此, 射流速度分量可表示成

$$u = \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta) \quad (2.16)$$

$$v = -\frac{1}{3} \nu^{1/2} x^{-2/3} (f - 2\eta f') \quad (2.17)$$

由 2.1 节知, 普朗特边界层方程可写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

相应的边界条件为: 当  $y=0$  时,  $u=0, v=0$ ; 当  $y \rightarrow \infty$  时,  $u=U(x)$ , 其中  $U(x)$  为外流速度。

将式(2.16)和(2.17)代入式(2.19), 并考虑到压力梯度为零, 得

$$f'^2 + ff'' + f''' = 0 \quad (2.20)$$

其边界条件为: 当  $y=0$  时,  $v=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0$ ; 当  $y=\infty$  时,  $u=0$ 。于是, 当  $\eta=0$  时,  $f=0, f''=0$ ; 当  $\eta=\infty$  时,  $f'=0$ 。

对式(2.20)积分一次, 得

$$ff' + f'' = 0 \quad (2.21)$$

为便于积分, 令  $\xi = \alpha\eta, f = 2\alpha F(\xi)$ , 代入式(2.21), 得

$$F'' + 2FF' = 0 \quad (2.22)$$

其边界条件为: 当  $\xi=0$  时,  $F=0$ ; 当  $\xi=\infty$  时,  $F'=0$ 。

对式(2.22)积分一次, 得

$$F' + F^2 = 1 \quad (2.23)$$

上式为 Riccati 微分方程, 其解为

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1-F^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+F}{1-F} = \tanh^2 F \quad (2.24)$$



反解这个方程,可得

$$F = \tanh \xi = \frac{1 - \exp(-2\xi)}{1 + \exp(-2\xi)} \quad (2.25)$$

$$\frac{dF}{d\xi} = 1 - \tanh^2 \xi \quad (2.26)$$

将上述关系代入式(2.16),得

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (2.27)$$

将式(2.27)代入动量通量守恒关系式(2.11),有

$$J = \frac{4}{3} \rho \alpha^3 \nu^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh^2 \xi)^2 d\xi = \frac{16}{9} \rho \alpha^3 \nu^{1/2} \quad (2.28)$$

令  $K = J/\rho$ , 由  $K$  及式(2.28)可解得

$$\alpha = 0.8255 \left( \frac{K}{\sqrt{\nu}} \right)^{1/3} \quad (2.29)$$

将  $\alpha$  代入式(2.27),得

$$u = 0.4543 \left( \frac{K^2}{\nu x} \right)^{1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \quad (2.30)$$

射流横向速度可表示为

$$v = 0.5503 \left( \frac{K \nu}{x^2} \right)^{1/3} [2\xi(1 - \tanh^2 \xi) - \tanh \xi] \quad (2.31)$$

式中,  $\xi = 0.2752 \left( \frac{K}{\nu^2} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}}$ 。

平面射流的单宽流量(单位宽度体积流量)可表示为

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} u dy = 3.3019 (K \nu x)^{1/3} \quad (2.32)$$

上式表明,射流流量沿程增加,并随射流动量的增加而增大。

### 2.3 圆形层流射流

若一股流体是从小圆孔中射出,并且其流动状态为层流,则称之为圆形层流射流(circular laminar jet)。施里赫廷(Schlichting 1933)较早地研究了这个问题。为方便计,我们把  $x$  轴放在射流轴线上,并以  $r$  表示径向距离。轴向速度和径向速度分别以  $u$  和  $v$  表示。同样假定射流中的压力是不变的,则沿  $x$  方向的动量通量必然保持守恒,即

$$J = 2\pi\rho \int_0^{\infty} u^2 r dr = \text{const} \quad (2.33)$$