高等工科院校用

数学分析 应用数学的基本理论与习题

山东教育出版社

高等工科院校用

数学分析 应用数学的基本理论与习题

〔苏〕A.V.叶菲莫夫 B.P.吉米多维奇著
程子元 张威勇 王贻俊 译
杜锡录 赵杰 校

山东教育出版社
1988年济南

数学分析 应用数学的基本理论与习题

〔苏〕A.V.叶菲莫夫 B.P.吉米多维奇著

程子元 张威勇 王贻俊 译

杜锡录 赵杰 校

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂德州厂印刷

*

850×1168毫米32开本 40.5印张 903千字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数 1—2.520

ISBN7—5328—0214—0/0·7

定价 9.20 元

出 版 说 明

五十年代，我国曾翻译并出版苏联著名数学家B.P.吉米多维奇编著的《数学分析习题集》一书，这部习题集曾在我国数学界广为流传并享有盛名。但吉米多维奇教授与苏联另一位著名数学家A.V.叶菲莫夫教授合编的《数学分析 应用数学的基本理论与习题》一书却鲜为人知，现在，我们奉献到读者面前的，正是这部著作。

本书的读者对象主要是工科院校大学生。书中的内容基本上包括了工科大学生所应该掌握的全部数学知识，与我国现行高等工科院校高等数学与应用数学教学大纲的内容和要求相吻合。该书自问世以来已先后用二十种文字出版，本中文版是根据1984年英文版本翻译的。

对于高等工科院校各专业的大学生来说，打下良好的数学基础，具备一定水平的分析问题的能力和较高水平的运算技能至关重要。本书基本理论系统性强；例题丰富，分析透彻并富启发性；习题多样新颖，注意由浅入深和联系实际。书中的这些特点对于读者达到上述目的都是十分有益的。

全书由程子元、张威勇、王贻俊三人合译，具体分工是：程子元第一、二、三、四、八章，张威勇第五、六、七、十一、十二章，王贻俊第九、十、十三章。

译稿承杜锡录、赵杰二同志审校，在此谨致谢意。

译 者

1987年5月

目　　录

第一章　分析基础

§1.1　实数、集合、逻辑符号

1.实数的概念

众所周知，每个非负实数x都可表示为十进制无限小数

$$[x].x_1x_2\cdots, \tag{1}$$

其中$[x]$是不超过x的最大整数，并称为数x的整数部分，对于任何$n\in \mathbf{N}$, $x_n\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$.

应当特别指出的是，设n_0为某个自然数，对于所有的$n\geqslant n_0$，$x_n=9$的这样小数是不予考虑的，因有下面的等式：

$$[x].999\cdots=[x]+1,$$

$$[x].x_1x_2\cdots x_{n_0-1}999\cdots=[x].x_1x_2\cdots(x_{n_0-1}+1)$$

$(n_0>1, x_{n_0-1}\neq 9)$.

一个实数x是有理数，即能表示为m与n之比的形式$\dfrac{m}{n}$，m，$n\in \mathbf{Z}$，当且仅当小数(1)是循环的，否则，数x便是无理数.

实数x的绝对值或模被定义为非负数

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

假定读者对实数进行比较及其算术运算法则已经知晓.

1.1　证明数

$$0.1010010001\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{n}1\cdots$$

是无理数．用不足或过剩的有限序列（有限小数）近似表示该数，试写出其前三项．

1.2　用适当的有理分式形式表示下列各数：

（a） 1.（2）；　（b） 3.00（3）；　（c） 0.110(25)．

（译注：以上分别表示循环小数$1.\dot{2}$；$3.00\dot{3}$；$0.110\dot{2}\dot{5}$）

1.3　证明lg5是无理数．

不妨假设lg5是有理数，即

令　$\lg 5 = \dfrac{m}{n}$；　$m,\ n \in \mathbf{Z}$.

那末

$$10^{\frac{m}{n}} = 5,$$

$$10^m = 5^n,$$

$$2^m \cdot 5^m = 5^n.$$

但最后这个等式是不可能的，因为数 2 是左端的因子，不是右端的因子，这与所有的整数用素数因子之乘积形式表示的唯一性相矛盾．因此原假设是错误的，故lg5是无理数．

在题1.4～1.9中，证明所给的数是无理数：

1.4　$\sqrt{3}$　　1.5　$\sqrt[n]{P}$　，p是素数，$n>1$.

1.6　$2+\sqrt{3}$.　1.7　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

1.8　$\log_3 p$，p是素数．

1.9　$\dfrac{\pi}{2}+\pi n$，$n\in\mathbf{Z}$，若已知π是无理数．

在题1.10～1.13中，比较所给数的大小．

1.10　$\sqrt{2}-\sqrt{5}$和$\sqrt{3}-2$.

假设下列不等式是正确的：

$$\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2, \qquad (2)$$

那末

$$\sqrt{2}+2<\sqrt{5}+\sqrt{3},$$

$$6+4\sqrt{2}<8+2\sqrt{15},$$

$$2\sqrt{2}<1+\sqrt{15},$$

$$8<16+2\sqrt{15}.$$

由于最后的不等式为真，根据所进行的变换的等价性，所以，起初的不等式（2）也为真.

1.11　$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$与$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$.

1.12　$\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$与$\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$.

1.13　$\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}$与1.

在题1.14～1.16中，不使用对数表，证明指出的数值不等式：

1.14　$\log_3 10+4\lg 3>4$.

1.15　$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$.

1.16 $\log_4 26 > \log_6 17$.

1.17 证明实数的模具有下列性质：

(a) $|x| = \max\{x, -x\}$；

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ 及 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$；

(c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ 及 $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$

(三角不等式)；

(d) $\sqrt{x^2} = |x|$.

解方程（题1.18～1.22）：

1.18 $|3x-4| = \frac{1}{2}$； 1.19 $\sqrt{x^2} + x^3 = 0$；

1.20 $|-x^2+2x-3| = 1$； 1.21 $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 1$；

1.22 $\sqrt{(x-2)^2} = -x+2$.

解不等式（题1.23～1.27）：

1.23 $|x-2| \geqslant 1$； 1.24 $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$.

1.25 $x^2 + 2\sqrt{(x+3)^2} - 10 \leqslant 0$；

1.26 $\frac{1}{|x-1|} < 4 - x$；

1.27 $\sqrt{(x+1)^2} \leqslant -x-1$.

2.集合与集的运算

具有某些特殊属性的事物的全体叫做集合，而该事物被称为集合的元素或成员.

记号$a \in A$的意义是：事物a是集A的元素（a属于集A），

如a不属于A就写成$a\notin A$．在集合论里起重要作用的一个特殊集合是空集，有时也叫零集，它不包含任何元素，可用符号ϕ来表示空集．记号$A\subset B$（读作："A含于B"，或等价地"B包含A"），其意义是：A里的每个元素也是B里的一个元素，这种情况称A为B的子集．如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集A与集B相等（写成$A=B$）．

定义（描述）集合有两种基本方法：

(a) 集A用直接列举出它的所有元素a_1，a_2，$\cdots a_n$的方式来定义，即写成形式

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}.$$

(b) 集A被定义为属于某个基本集T的那些且仅那些元素的全体，而集T具有共同性质α，在这种情况，我们用简洁的记号表示为

$$A=\{x\in T|\ \alpha(x)\},$$

其中$\alpha(x)$的意义是：元素x具有性质α．

例1．用列举元素法描述集合

$$A=\{x\in \mathbf{Z}\ |(x-3)(x^2-1)=0\text{且}x\geqslant 0\}.$$

解：A是方程$(x-3)(x^2-1)=0$的所有非负整数根的集合，因此$A=\{1,\ 3\}$．

集A与B的并，定义为集合

$$A\cup B=\{x|\ x\in A\text{或}x\in B\}.$$

集A与B的交，定义为集合

$$A\cap B=\{x|\ x\in A\text{且}x\in B\}.$$

集A与B之差，定义为这样的集合

$$A\setminus B=\{x|\ x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

特别地，如果A是某个普通集T的子集，那末差集$T\setminus A$用

符号$\overline{A}$记之，并且叫做集A（相对于T）的余集．

1.28 判别下面两种记法中哪种正确：

(a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$或$\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$；

(b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$或$\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$．

在题1.29～1.34中，用列举元素法描述下列集合：

1.29 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$．

1.30 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2$ 且$x > 0\}$．

1.31 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$．

1.32 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\}$．

1.33 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} < 2\}$．

1.34 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos^2 2x = 1$ 且$0 < x \leqslant 2\pi\}$．

在题1.35～1.42中，在坐标平面上表示指定的集合．

1.35 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$．

1.36 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$．

1.37 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$．

1.38 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > \sqrt{2x+1}$ 且$2x + 1 \geqslant 0\}$．

1.39 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$．

1.40 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4$ 且$2^{x-1} \leqslant y\}$．

1.41 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$．

1.42 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$．

1.43 设$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\}$，

$$B=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x^2-x+12=0\}.$$

用列举元素法描述集合$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$和$B\setminus A$.

记号$m|n$，其中m，$n\in \boldsymbol{Z}$,其意义为数m是数n的因子．描述下列集合（题1.44～1.47）．

1.44　$\{x\in \boldsymbol{N} \mid x|8$且$x\neq 1\}$.

1.45　$\{x\in \boldsymbol{Z} \mid 8|x\}$.

1.46　$\{x\in \boldsymbol{N} \mid x|12\}\cap\{x\in \boldsymbol{N} \mid x|8\}$.

1.47　$\{x\in \boldsymbol{N} \mid 12|x\}\cap\{x\in \boldsymbol{N} \mid 8|x\}$.

1.48　证明：

（a）等式$A\cap B=B$为真，当且仅当$B\subset A$；

（b）等式$A\cup B=B$为真，当且仅当$A\subset B$.

1.49　设$A=(-1, 2]$，$B=[1, 4)$．求集$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$，$B\setminus A$，并在数轴上把它们表示出来．

取线段$T=[0, 1]$作为一个全集,求下列集合的余集，并在数轴上表示出来（题1.50～1.53）：

1.50　$\{0,1\}$．1.51$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$．1.52$(0, \frac{1}{2}]$

1.53　$\{\frac{1}{4}\}\cup[\frac{3}{4}, 1)$

1.54　证明作余运算具有自反性，即

$$\overline{(\overline{A})}=A,$$

并证明与包含关系$\subset$和运算$\cup$及$\cap$有关的下列对偶法则：

如果$A\subset B$，那末$\overline{A}\supset\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　以及$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

1.55　证明$\cup$和$\cap$运算的分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

根据题1.51和1.55所得的结果，证明下列等式（题1.56～1.59）：

1.56 $\overline{A\setminus B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}$.

解：由于$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$，等式左端可表示为：

$$\overline{A\setminus B}\cap\overline{(A\cap B)}=\overline{(A\setminus B)\cup(A\cap B)}=\overline{A}$$

1.57 $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.　　1.58 $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\cup B$.

1.59 $A\cap(\overline{A\setminus B})=A\cap B$.

运算$\cup$与$\cap$可以很自然地推广到对任意集类（有限或无限）的情形。

例如，设有一集族A_n，$n\in\boldsymbol{N}$，这族集的并集，用符号$\bigcup\limits_{n\in N}A_n$表示，并且把它定义为它里面的所有元素，都至少是属于集A_n之一的。交集$\bigcap\limits_{n\in N}A_n$是由所有$A_n$的公共元素构成的集合。

在题1.60～1.62中，对已知集族A_n，$n\in\boldsymbol{N}$，求$\bigcup\limits_{n\in N}A_n$和$\bigcap\limits_{n\in N}A_n$。

1.60 $A_n=\{x\in\mathbf{Z}\mid -n\leqslant x\leqslant n\}$.

1.61 $A_n=\{3n-2,\ 3n-1\}$.

1.62 $A_n=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n}\}$.

1.63 设集合A是已知圆的内接三角形的边上所有点组成的集合，描述所有这样集合的并集与交集，如果

(a) 任意三角形；

(b) 等边三角形；

(C) 直角三角形。

如果集合X的元素与所有自然数构成的集N中的元素之间，能建立起一一对应关系，就说该集是可数的。

例2. 阐明所有整数集$\mathbf{Z}$是可数的。

解：我们来建立这个集合的元素与自然数之间的一一对应，例如，按下列方式将集$\mathbf{Z}$有序化：

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots,$$

然后把上述序列中的每个整数与它在这个序列里的序数相对应。▌

在题1.64～1.66中，证明所给集合是可数的。

1.64 $\{n\in \boldsymbol{N} \mid n=2k,\ k\in \boldsymbol{N}\}$.

1.65 $\{n\in \boldsymbol{N} \mid n=k^2,\ k\in \boldsymbol{N}\}$.

1.66 $\{n\in \boldsymbol{N} \mid n=2^K,\ k\in \boldsymbol{N}\}$.

1.67 证明：如果集X是可数的，且$A\subset X$是它的无穷子集，那末集A也是可数的。

利用所得结果，证明集

$$\{n\in \mathbf{Z} \mid n=k^2-k+1,\ k\in \boldsymbol{N}\}$$

也是可数的。

1.68 设X_1，X_2，…，X_n是可数集，证明它们的并集$\bigcup\limits_{n\in N} X_n$是可数集。

设$X_n=\{x_{n,1},\ x_{n,2},\ \cdots,\ x_{n,l},\ \cdots\}$，那末集$\bigcup\limits_{n\in N} X_n$能列成如下的表：

$$\begin{array}{l}
X_{1,1},\ X_{1,2},\ \cdots,\ X_{1,l}\cdots,\\
X_{2,1},\ X_{2,2},\ \cdots,\ X_{2,l}\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{n,1},\ X_{n,2},\ \cdots,\ X_{n,l},\cdots,
\end{array}$$