

● 高等工科院校用

数学分析 应用数学的 基本理论与习题

山东教育出版社

高等工科院校用

数学分析 应用数学的 基本理论与习题

[苏] A.V.叶菲莫夫 B.P.吉米多维奇著
程子元 张威勇 王贻俊 译
杜锡录 赵杰 校

山东教育出版社

1988·年济南

数学分析 应用数学的基本理论与习题
〔苏〕A.V.叶菲莫夫 B.P.吉米多维奇著
程子元 张威勇 王贻俊 译
杜锡录 赵杰 校

*
山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂德州厂印刷

*
850×1168毫米32开本 40.5印张 903千字
1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷
印数1—2,520

ISBN7—5328—0214—0/0·7

定价 9.20 元

出版说明

五十年代，我国曾翻译并出版苏联著名数学家B.P. 吉米多维奇编著的《数学分析习题集》一书，这部习题集曾在我国数学界广为流传并享有盛名。但吉米多维奇教授与苏联另一位著名数学家A.V. 叶菲莫夫教授合编的《数学分析 应用数学的基本理论与习题》一书却鲜为人知，现在，我们奉献到读者面前的，正是这部著作。

本书的读者对象主要是工科院校大学生。书中的内容基本上包括了工科大学生所应该掌握的全部数学知识，与我国现行高等工科院校高等数学与应用数学教学大纲的内容和要求相吻合。该书自问世以来已先后用二十种文字出版，本中文版是根据1984年英文版本翻译的。

对于高等工科院校各专业的大学生来说，打下良好的数学基础，具备一定水平的分析问题的能力和较高水平的运算技能至关重要。本书基本理论系统性强；例题丰富，分析透彻并富启发性；习题多样新颖，注意由浅入深和联系实际。书中的这些特点对于读者达到上述目的都是十分有益的。

全书由程子元、张威勇、王贻俊三人合译，具体分工是：程子元第一、二、三、四、八章，张威勇第五、六、七、十一、十二章，王贻俊第九、十、十三章。

译稿承杜锡录、赵杰二同志审校，在此谨致谢意。

译者

1987年5月

目 录

第一章 分析基础	I
§ 1.1 实数、集合、逻辑符号	1
§ 1.2 实变量函数	15
§ 1.3 实数序列的极限	27
§ 1.4 函数的极限、连续性	31
§ 1.5 复数	50
答案	68
第二章 向量代数与解析几何	93
§ 2.1 向量代数	93
§ 2.2 空间直线与平面	120
§ 2.3 平面曲线	140
§ 2.4 空间曲面与曲线	169
答案	185
第三章 行列式与矩阵、线性方程组	207
§ 3.1 行列式	207
§ 3.2 矩阵	222
§ 3.3 算术向量空间、矩阵的秩	233
§ 3.4 线性方程组	245
§ 3.5 线性代数的若干计算题	263
答案	273
第四章 线性代数初步	285
§ 4.1 线性向量空间和内积空间	285
§ 4.2 线性变换	303

§ 4.3	双线性型与二次型	323
	答案	336
第五章	一元函数微分学	354
§ 5.1	导数	354
§ 5.2	微分	386
§ 5.3	可微函数定理、泰勒公式	390
§ 5.4	函数性质的研究与作图	406
§ 5.5	实变量的向量函数与复函数	423
§ 5.6	一元函数的数值方法	443
	答案	465
第六章	一元函数积分学	503
§ 6.1	不定积分的基本计算方法	503
§ 6.2	基本初等函数的积分法	521
§ 6.3	积分法杂题	542
§ 6.4	定积分及其算法	545
§ 6.5	广义积分	560
§ 6.6	定积分的几何应用	567
§ 6.7	定积分在力学及物理上的应用	587
§ 6.8	一元函数的数值积分	598
	答案	605
第七章	多元函数微分学	635
§ 7.1	基本概念	635
§ 7.2	复合函数和隐函数微分法	654
§ 7.3	偏导数的应用	676
§ 7.4	近似数及其计算	698
	答案	704

第八章 重积分	724
§ 8.1 二重积分	724
§ 8.2 三重积分	749
§ 8.3 广义重积分	761
§ 8.4 含参变量积分的计算	765
答案	775
第九章 微分方程	788
§ 9.1 一阶微分方程	788
§ 9.2 高阶微分方程	825
§ 9.3 微分方程组	864
§ 9.4 稳定性理论基础	892
§ 9.5 常微分方程的数值解法	904
答案	918
第十章 矢量分析	943
§ 10.1 数量场和向量场·梯度	943
§ 10.2 线积分与面积分	948
§ 10.3 数量场与向量场各种特征间的关系	965
§ 10.4 特殊类型的向量场	975
§ 10.5 曲线坐标在向量分析中的应用	983
答案	991
第十一章 复变函数论	1000
§ 11.1 初等函数	1000
§ 11.2 解析函数、柯西——黎曼条件	1008
§ 11.3 保角映射	1016
§ 11.4 复变函数的积分	1033
答案	1042

第十二章	级数及其应用	1062
§ 12.1	数项级数	1062
§ 12.2	函数项级数	1082
§ 12.3	幂级数	1090
§ 12.4	幂级数的应用	1108
§ 12.5	罗伦级数	1125
§ 12.6	留数及其应用	1135
§ 12.7	傅立叶级数与傅立叶积分	1149
	答案	1167
第十三章	运算微积	1203
§ 13.1	拉普拉斯变换	1203
§ 13.2	反演公式、展开定理	1219
§ 13.3	运算微积用于解微分方程	1226
§ 13.4	脉冲函数	1242
§ 13.5	应用运算微积解积分方程和积分——微分方程，广义积分及级数和的计算	1246
§ 13.6	离散拉普拉斯变换及其应用	1255
	答案	1270

第一章 分析基础

§ 1.1 实数、集合、逻辑符号

1. 实数的概念

众所周知, 每个非负实数 x 都可表示为十进制无限小数

$$[x] . x_1 x_2 \cdots, \quad (1)$$

其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, 并称为数 x 的整数部分, 对于任何 $n \in \mathbf{N}, x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

应当特别指出的是, 设 n_0 为某个自然数, 对于所有的 $n \geq n_0, x_n = 9$ 的这样小数是不予考虑的, 因有下面的等式:

$$[x] . 999 \cdots = [x] + 1,$$

$$[x] . x_1 x_2 \cdots x_{n_0-1} 999 \cdots = [x] . x_1 x_2 \cdots (x_{n_0-1} + 1) .$$

$(n_0 > 1, x_{n_0-1} \neq 9)$.

一个实数 x 是有理数, 即能表示为 m 与 n 之比的形式 $\frac{m}{n}$,

$m, n \in \mathbf{Z}$, 当且仅当小数(1)是循环的, 否则, 数 x 便是无理数.

实数 x 的绝对值或模被定义为非负数

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

假定读者对实数进行比较及其算术运算法则已经知晓.

1.1 证明数

$$0.1010010001\cdots\underbrace{10\cdots0}_n1\cdots$$

是无理数。用不足或过剩的有限序列（有限小数）近似表示该数，试写出其前三项。

1.2 用适当的有理分式形式表示下列各数：

$$(a) 1.\dot{(2)}; \quad (b) 3.00\dot{(3)}; \quad (c) 0.\dot{1}1\dot{0}(25).$$

(译注：以上分别表示循环小数 $1.\dot{2}$ ； $3.00\dot{3}$ ； $0.\dot{1}1\dot{0}25$)

1.3 证明 $\lg 5$ 是无理数。

不妨假设 $\lg 5$ 是有理数，即

$$\text{令 } \lg 5 = \frac{m}{n}; \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

那末

$$\begin{aligned} 10^{\frac{m}{n}} &= 5, \\ 10^m &= 5^n, \\ 2^m \cdot 5^m &= 5^n. \end{aligned}$$

但最后这个等式是不可能的，因为数 2 是左端的因子，不是右端的因子，这与所有的整数用素数因子之乘积形式表示的唯一性相矛盾。因此原假设是错误的，故 $\lg 5$ 是无理数。

在题1.4~1.9中，证明所给的数是无理数：

$$1.4 \quad \sqrt{3} \quad 1.5 \quad \sqrt[n]{p}, \quad p \text{ 是素数}, n > 1.$$

$$1.6 \quad 2 + \sqrt{3}. \quad 1.7 \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

$$1.8 \quad \log_3 p, \quad p \text{ 是素数}.$$

$$1.9 \quad \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \text{ 若已知 } \pi \text{ 是无理数}.$$

在题1.10~1.13中，比较所给数的大小。

1.10 $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ 和 $\sqrt{3} - 2$.

假设下列不等式是正确的:

$$\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2, \quad (2)$$

那末

$$\sqrt{2} + 2 < \sqrt{5} + \sqrt{3},$$

$$6 + 4\sqrt{2} < 8 + 2\sqrt{15},$$

$$2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{15},$$

$$8 < 16 + 2\sqrt{15}.$$

由于最后的不等式为真, 根据所进行的变换的等价性, 所以, 起初的不等式 (2) 也为真.

1.11 $\log \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ 与 $\log \frac{1}{3} \frac{1}{2}$.

1.12 $(\frac{1}{5})^{\lg \frac{1}{7}}$ 与 $(\frac{1}{7})^{\lg \frac{1}{5}}$.

1.13 $\log_{\log_3 2} \frac{1}{2}$ 与 1 .

在题 1.14~1.16 中, 不使用对数表, 证明指出的数值不等式:

1.14 $\log_3 10 + 4 \lg 3 > 4$.

1.15 $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} > 2$.

$$1.16 \quad \log_4 26 > \log_6 17.$$

1.17 证明实数的模具有下列性质:

$$(a) \quad |x| = \max \{ x, -x \};$$

$$(b) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ 及 } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|};$$

$$(c) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \text{ 及 } |x - y| \geq ||x| - |y||$$

(三角不等式);

$$(d) \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

解方程 (题 1.18~1.22):

$$1.18 \quad |3x - 4| = \frac{1}{2}; \quad 1.19 \quad \sqrt{x^2} + x^3 = 0;$$

$$1.20 \quad |-x^2 + 2x - 3| = 1; \quad 1.21 \quad \left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| = 1;$$

$$1.22 \quad \sqrt{(x - 2)^2} = -x + 2.$$

解不等式 (题 1.23~1.27):

$$1.23 \quad |x - 2| \geq 1; \quad 1.24 \quad |x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12.$$

$$1.25 \quad x^2 + 2\sqrt{(x + 3)^2} - 10 \leq 0;$$

$$1.26 \quad \frac{1}{|x - 1|} < 4 - x;$$

$$1.27 \quad \sqrt{(x + 1)^2} \leq -x - 1.$$

2. 集合与集的运算

具有某些特殊属性的事物的全体叫做集合, 而该事物被称为集合的元素或成员.

记号 $a \in A$ 的意义是: 事物 a 是集 A 的元素 (a 属于集 A),

如 a 不属于 A 就写成 $a \notin A$ 。在集合论里起重要作用的一个特殊集合是空集，有时也叫零集，它不包含任何元素，可用符号 ϕ 来表示空集。记号 $A \subset B$ （读作：“ A 含于 B ”，或等价地“ B 包含 A ”），其意义是： A 里的每个元素也是 B 里的一个元素，这种情况称 A 为 B 的子集。如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称集 A 与集 B 相等（写成 $A = B$ ）。

定义（描述）集合有两种基本方法：

(a) 集 A 用直接列举出它的所有元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的方式来定义，即写成形式

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}.$$

(b) 集 A 被定义为属于某个基本集 T 的那些且仅那些元素的全体，而集 T 具有共同性质 α ，在这种情况下，我们用简洁的记号表示为

$$A = \{ x \in T \mid \alpha(x) \},$$

其中 $\alpha(x)$ 的意义是：元素 x 具有性质 α 。

例1. 用列举元素法描述集合

$$A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ 且 } x \geq 0 \}.$$

解： A 是方程 $(x-3)(x^2-1) = 0$ 的所有非负整数根的集合，因此 $A = \{ 1, 3 \}$ 。

集 A 与 B 的并，定义为集合

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}.$$

集 A 与 B 的交，定义为集合

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}.$$

集 A 与 B 之差，定义为这样的集合

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B \}.$$

特别地，如果 A 是某个普通集 T 的子集，那末差集 $T \setminus A$ 用

符号 \overline{A} 记之, 并且叫做集 A (相对于 T) 的余集.

1.28 判别下面两种记法中哪种正确:

(a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ 或 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

(b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ 或 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

在题1.29~1.34中, 用列举元素法描述下列集合:

1.29 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

1.30 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ 且 } x > 0\}$.

1.31 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$.

1.32 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{1}{4} \leq 2^x < 5\}$.

1.33 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \log \frac{1}{2} \frac{1}{x} < 2\}$.

1.34 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos^2 2x = 1 \text{ 且 } 0 < x \leq 2\pi\}$.

在题1.35~1.42中, 在坐标平面上表示指定的集合.

1.35 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.

1.36 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

1.37 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.

1.38 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > \sqrt{2x + 1} \text{ 且 } 2x + 1 \geq 0\}$.

1.39 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$.

1.40 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4 \text{ 且 } 2^{x-1} \leq y\}$.

1.41 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$.

1.42 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0\}$.

1.43 设 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\}$,

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 12 = 0\}.$$

用列举元素法描述集合 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$.

记号 $m \mid n$, 其中 $m, n \in \mathbf{Z}$, 其意义为数 m 是数 n 的因子.

描述下列集合 (题 1.44~1.47).

1.44 $\{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 8 \text{ 且 } x \neq 1\}.$

1.45 $\{x \in \mathbf{Z} \mid 8 \mid x\}.$

1.46 $\{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 12\} \cap \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 8\}.$

1.47 $\{x \in \mathbf{N} \mid 12 \mid x\} \cap \{x \in \mathbf{N} \mid 8 \mid x\}.$

1.48 证明:

(a) 等式 $A \cap B = B$ 为真, 当且仅当 $B \subset A$;

(b) 等式 $A \cup B = B$ 为真, 当且仅当 $A \subset B$.

1.49 设 $A = (-1, 2]$, $B = [1, 4)$. 求集 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, 并在数轴上把它们表示出来.

取线段 $T = [0, 1]$ 作为一个全集, 求下列集合的余集, 并在数轴上表示出来 (题 1.50~1.53):

1.50 $\{0, 1\}$. 1.51 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. 1.52 $(0, \frac{1}{2}]$

1.53 $\{\frac{1}{4}\} \cup [\frac{3}{4}, 1)$

1.54 证明作余运算具有自反性, 即

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

并证明与包含关系 \subset 和运算 \cup 及 \cap 有关的下列对偶法则:

如果 $A \subset B$, 那末 $\overline{A} \supset \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 以及 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.55 证明 \cup 和 \cap 运算的分配律:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

根据题1.51和1.55所得的结果, 证明下列等式 (题1.56~1.59) .

$$1.56 \quad \overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}.$$

解: 由于 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, 等式左端可表示为:

$$\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(A \setminus B) \cup (A \cap B)} = \overline{A}$$

$$1.57 \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}. \quad 1.58 \quad \overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B.$$

$$1.59 \quad A \cap (\overline{A \setminus B}) = A \cap B.$$

运算 \cup 与 \cap 可以很自然地推广到对任意集类 (有限或无限) 的情形.

例如, 设有一集族 $A_n, n \in N$, 这族集的并集, 用符号 $\bigcup_{n \in N} A_n$ 表示, 并且把它定义为它里面的所有元素, 都至少是属于集 A_n 之一的. 交集 $\bigcap_{n \in N} A_n$ 是由所有 A_n 的公共元素构成的集合.

在题1.60~1.62中, 对已知集族 $A_n, n \in N$, 求 $\bigcup_{n \in N} A_n$ 和 $\bigcap_{n \in N} A_n$.

$$1.60 \quad A_n = \{x \in \mathbf{Z} \mid -n \leq x \leq n\}.$$

$$1.61 \quad A_n = \{3n-2, 3n-1\}.$$

$$1.62 \quad A_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}.$$

1.63 设集合 A 是已知圆的内接三角形的边上所有点组成的集合, 描述所有这样集合的并集与交集, 如果

- (a) 任意三角形;
- (b) 等边三角形;
- (c) 直角三角形.

如果集合 X 的元素与所有自然数构成的集 N 中的元素之间,能建立起一一对应关系,就说该集是可数的.

例2.阐明所有整数集 Z 是可数的.

解:我们来建立这个集合的元素与自然数之间的一一对应,例如,按下列方式将集 Z 有序化:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …,

然后把上述序列中的每个整数与它在这个序列里的序数相对应.】

在题1.64~1.66中,证明所给集合是可数的.

1.64 $\{n \in N \mid n = 2k, k \in N\}$.

1.65 $\{n \in N \mid n = k^2, k \in N\}$.

1.66 $\{n \in N \mid n = 2^k, k \in N\}$.

1.67 证明:如果集 X 是可数的,且 $A \subset X$ 是它的无穷子集,那末集 A 也是可数的.

利用所得结果,证明集

$$\{n \in Z \mid n = k^2 - k + 1, k \in N\}$$

也是可数的.

1.68 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是可数集,证明它们的并集 $\bigcup_{n \in N} X_n$ 是可数集.

设 $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,l}, \dots\}$,那末集 $\bigcup_{n \in N} X_n$ 能列成如下的表:

$x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,l}, \dots,$

$x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,l}, \dots,$

.....

$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,l}, \dots,$