

高等数学简明教程

1589

高等学校教学用书



高等数学简明教程

C. II. 維諾格拉陀夫著

尚民譯

(修訂本)

高等教育出版社

本书是根据苏俄教育部教科书出版社(Учпедгиз) 1949年出版的維諾格拉陀夫(С. П. Виноградов)著、庫圖佐夫(Б. В. Кутузов)改編“高等数学簡明教程”(Краткий курс высшей математики)第九版譯出的。本书(譯本)的第一版是在1952年出版的,本版又作了較大的修訂。原书經苏俄教育部审定为师范專科学学校适用教科书。

本书的内容共分两个部分,第一部分講述解析几何;第二部分講述数学分析及微分方程的一般知識。

高等数学簡明教程

С. П. 維諾格拉陀夫著

尚 民 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內大街第7号

(北京市书刊出版业营业登记证出字第054号)

外文印刷厂印装 新华书店发行

统一书号 13010·534 开本 550×1100 1/32 印张 11 3/16

字数 304,000 印数 21,001—26,000 定价(6) 1.10

1959年6月第1版 1960年2月北京第4次印刷

第九版序

C. И. 維諾格拉陀夫所著“解析几何与微积分学簡明教程”的这一版，是根据师范学院的教学大綱修訂的。书中删去了教学大綱中不包含的材料(重积分、插值法以及許多次要問題)。

数学解析的緒論部分作了彻底的修訂，因为以前各版对于这一部分的叙述已經相当陈旧。这种修訂是根据教学大綱的特点进行的。在其他部分也删去了一些内容陈旧的概念(如方程的无尽根、欧几里得几何中的无穷远元素等等)。

有几章及个别几节只好重新写过。

增加了不少新图，好多原有的图更換了。这本教科书，現在用“高等数学簡明教程”的书名出版，是为了符合教学計劃中所規定的这门課的名称。

Б. 庫图佐夫

1945年7月25日

目 录

第九版序	iii
------------	-----

第一篇 解 析 几 何

第一章 直线上的解析几何	1
--------------------	---

§ 1. 直线上点的坐标(1) § 2. 两点间的距离(1) § 3. 线段的定比分割(4)

第二章 平面上点的坐标·两点的距离·线段的定比分割	46
---------------------------------	----

§ 4. 平面上点的直角坐标(6) § 5. 两点间的距离(7) § 6. 线段的定比分割(9) § 7. 质心(11) § 8. 三角形的面积(13) § 9. 平面上点的斜角坐标(14) § 10. 极坐标(14) § 11. 射影(15)

第三章 直线方程·直线的基本问题·一次函数	17
-----------------------------	----

§ 12. 直线的斜率和截距(17) § 13. 带斜率的直线方程(20) § 14. 直线方程的法线式(24) § 15. 直线方程的截距式(27) § 16. 直线的一般方程的特别情况(28) § 17. 已知其方程的直线作图法(29) § 18. 问题 1. 两直线的交角(29) § 19. 问题 2. 通过一定点的直线的方程(31) § 20. 问题 3. 通过二定点的直线的方程(32) § 21. 问题 4. 已知其方程的二直线的交点(33) § 22. 问题 5. 点与直线的距离(34) § 23. 一次函数(36) 第三章习题(36)

第四章 圆周·抛物线·椭圆·双曲线	37
-------------------------	----

§ 24. 圆周及其方程(37) § 25. 圆周与直线的交点(39) § 26. 抛物线及其方程(40) § 27. 抛物线的形状(40) § 28. 抛物线与直线的交点(42) § 29. 椭圆及其方程(43) § 30. 椭圆的形状(45) § 31. 椭圆的轴和顶点(45) § 32. 椭圆和圆的关系(46) § 33. 椭圆与直线的交点(47) § 34. 椭圆的中心(48) § 35. 椭圆的离心率及其准线(48) § 36. 双曲线及其方程(51) § 37. 双曲线的形状(52) § 38. 双曲线与直线的交点(54) § 39. 双曲线的渐近线(54) § 40. 双曲线的渐近线的作图法(55) § 41. 双曲线上的点与渐近线的距离(56) § 42. 双曲线的中心(57) § 43. 双曲线的离心率及准线(58) § 44. 椭圆、双曲线及抛物线的共同性质(59)

第五章 几种轨迹	60
----------------	----

§ 45. 关于直线及圆周的几种轨迹(60) § 46. 一点关于圆周的幂(63) § 47. 二圆的等幂轴(65) § 48. 歧点蔓叶线(66)

第六章 坐标变换·二阶曲线概論.....67

- § 49. 坐标变换(67) § 50. 抛物线方程 $y = ax^2 + bx + c$ (69) § 51. 关于渐近线的等轴双曲线方程(70) § 52. 曲线的阶(72) § 53. 二阶曲线与直线的交点(73) § 54. $D \neq 0$ 时曲线方程的变换(74) § 55. $D = 0$ 时曲线方程的变换(78)

第七章 空间点的坐标·两点间的距离·线段的定比分割·射线的方向余弦.....81

- § 56. 空间点的坐标(81) § 57. 两点间的距离(82) § 58. 线段的定比分割(83) § 59. 空间中的投影(84) 60. 直线与三个直角坐标轴的交角的关系(85)

第八章 平面方程及其各种形式·平面問題.....86

- § 61. 平面方程的法线式(86) § 62. 平面方程的截距式(88) § 63. 平面方程的特殊情况(89) § 64. 二平面的交角(90) § 65. 三平面的相交(92) § 66. 三点所给定的平面方程(92) § 67. 点与平面的距离(93) 第八章习题(94)

第九章 空间的直线及其方程·直线及平面的問題.....95

- § 68. 空间的直线方程(95) § 69. 通过二已知点的直线方程(96) § 70. 二直线的交角(98) § 71. 直线与平面的交角(99) § 72. 直线与平面的相交(100) § 73. 空间二直线的交点(101) 第九章习题(101)

第十章 二阶曲面簡論.....103

- § 74. 曲面的阶(103) § 75. 二阶曲面(103) § 76. 二阶曲面方程的各种形式(103) § 77. 椭圆面(105) § 78. 旋轉椭圆面(107) § 79. 球面(107) § 80. 椭圆面的圆截痕(108) 81. 单叶双曲面(109) § 82. 单叶旋轉双曲面(110) § 83. 单叶双曲面的圆截痕(110) § 84. 单叶双曲面的直纹母线(111) § 85. 双叶双曲面(112) § 86. 双叶旋轉双曲面(113) § 87. 椭圆抛物面(114) § 88. 旋轉抛物面(115) § 89. 双曲抛物面(115) § 90. 抛物面的直纹母线(116) § 91. 二阶锥面(116) § 92. 双曲面的渐近锥面(117) 93. 二阶柱面(118)

第二篇 数 学 解 析

第十一章 函数.....120

- § 94. 数集(120) § 95. 区间、节、点的邻域(121) § 96. 一元函数(123) § 97. 函数的解析给定法·函数的存在域(126) § 98. 函数的几何表示(128) § 99. 关于函数的给定(131) § 100. 单调函数与非单调函数(131) § 101. 有界函数与无界函数(133)

第十二章 极限.....134

- § 102. 数集的极限点(134) § 103. 函数的极限(135) § 104. 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限值(141) § 105. 序列·序列的极限(143) § 106. 无穷小函数

(146) § 107. 关于无穷小函数的定理(148) § 108. 和与差的极限(150) § 109. 积的极限(151) § 110. 商的极限(151) § 111. 单调序列的极限(152) § 112. 计算极限的例题(152) 第十二章习题(159)

第十三章 連續性160

§ 113. 函数在一点上、在区间上、在节上的連續性(160) § 114. 在节上連續的函数的最大值、最小值及中間值定理(162) § 115. 連續函数的和、积及商的連續性(165) § 116. 函数的連續性的各种不同形式的定义(167)

第十四章 函数的导数·函数的微分法168

§ 117. 函数的导数(168) § 118. 导数的几何意义(169) § 119. 有导数的函数的連續性(170) § 120. 定理 1. 常数的导数(171) § 121. 定理 2. 和的导数(171) § 122. 定理 3. 积的导数(172) § 123. 定理 4. 分式的导数(173) § 124. 定理 5. 函数的函数的导数(174) § 125. 幂的导数(175) § 126. $\sin x$ 的导数(176) § 127. $\cos x$ 的导数(178) § 128. $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的导数(178) § 129. 恒等式的微分法(179) § 130. 反三角函数(180) § 131. $\arcsin x$ 的导数(180) § 132. $\arccos x$ 的导数(180) § 133. $\operatorname{arctg} x$ 的导数(181) § 134. $\operatorname{arccotg} x$ 的导数(182) § 135. 指数函数(182) § 136. 函数 a^x 的性质(184) § 137. 对数(185) § 138. 指数函数的导数(186) § 139. 对数的导数(188) § 140. 对数微分法(188) 第十四章习题(190)

第十五章 微分·函数的增大与减小·高阶导数与高阶微分·

一阶导数与二阶导数在函数研究中的应用193

§ 141. 微分(193) § 142. 高阶导数与高阶微分(194) § 143. 洛尔定理(196) § 144. 拉格朗日定理(196) § 145. 函数的增大和减小(198) § 146. 函数的极大值与极小值(199) § 147. 例题(203) § 148. 二阶导数的几何意义·曲线的凹性和凸性·拐点(204) § 149. 函数研究的一些例题(206) 第十五章习题(208)

第十六章 偏导数与偏微分·全微分·复合函数及隐函数的微分法210

§ 150. 偏导数与偏微分·全微分(210) § 151. 复合函数的微分法(211) § 152. 隐函数的微分法(213) § 153. 高阶偏导数(214) 第十六章习题(214)

第十七章 积分学的任务·不定积分与定积分·积分的几何意义·积分作为和的极限·基本积分·代换积分法与分部积分法215

§ 154. 积分学的任务·不定积分(215) § 155. 定积分作为和的极限(217) § 156. 把积分作为和的极限来计算的例子(223) § 157. 函数的积分法或求积分(224) § 158. 基本积分表(225) § 159. 代换积分法(226) § 160. 分部积分

法(228) 第十七章习题(230)

第十八章 有理函数的若干性质·有理函数的积分法……………232

§ 161. 整有理函数的积分法(232) § 162. 整有理函数的若干性质(232) § 163. 有理分式分解为分母分式(234) § 164. 有理分式的积分法(240) 第十八章习题(243)

第十九章 无理函数与超越函数的积分法的最简单情形……………244

§ 165. 无理代数函数的积分法(244) § 166. (A)型积分(245) § 167. (B)型积分(245) § 168. (C)型积分(246) § 169. 超越函数的积分法(248) 第十九章习题(252)

第二十章 定积分·定积分的性质·积分概念的推广·定积分的近似计算·梯形公式·辛普松公式……………253

§ 170. 定积分的性质(253) § 171. 对数的定义与性质(256) § 172. 积分概念的推广(257) § 173. 计算定积分的例题(259) § 174. 温里斯(Wallis)公式(259) § 175. 定积分的近似计算·梯形公式(260) § 176. 辛普松(Simpson)公式(261) 第二十章习题(263)

第二十一章 级数论·无穷级数的收敛性与发散性·收敛性的判别法·各项为一元函数的级数·幂级数·马克劳林级数与泰勒级数·函数展成级数……………264

§ 177. 收敛级数与发散级数(264) § 178. 收敛性的必要判别法(267) § 179. 关于比较法的预备定理(268) § 180. 同号级数收敛性的判别法(270) § 181. 交错级数收敛性的判别法(271) § 182. 绝对收敛级数(273) § 183. 绝对收敛级数的性质(274) § 184. 复数项级数(276) § 185. 级数的运算(277) § 186. 幂级数(278) § 187. 幂级数的均匀收敛(280) § 188. 幂级数所确定的函数的连续性(281) § 189. 幂级数所确定的函数的导数(281) § 190. 幂级数所确定的函数的积分(285) § 191. 函数展成级数(285) § 192. 马克劳林公式的另一结论(288) § 193. $e^x, \sin x, \cos x$ 的级数展开式(290) § 194. 利用级数计算 $\sin x$ 与 $\cos x$ (292) § 195. 指数函数与三角函数的关系(293) § 196. 对数的级数展开式(293) § 197. 对数的计算(295) § 198. $(1+x)^m$ 的级数展开式(297) § 199. 几何说明(299) § 200. 泰勒(Taylor)公式(302) § 201. 一元函数的极大与极小(303) § 202. 代数方程的根的近似计算(牛顿法)(304) § 203. 用级数求积分(306) 第二十一章习题(308)

第二十二章 微积分学在几何上的若干应用……………310

§ 204. 平面曲线的切线与法线(310) § 205. 切线长与法线长·次切距与次法距(311) § 206. 曲线的弧长(311) § 207. 曲线的曲率(313) § 208. 曲率圆(314)

§ 209. 漸屈綫(315) § 210. 旋輪綫(316) § 211. 求面积(319) § 212. 体积的計算(求体积法)(320) § 213. 旋轉体的体积(321) 第二十二章习题(322)

第二十三章 微分方程 323

§ 214. 定义(323) § 215. 通过消去常数项来組成常微分方程(324) § 216. 微分方程的积分(326) § 217. 可分离变量的一阶微分方程(327) § 218. 綫性微分方程(329) § 219. 方向場(332) § 220. 二阶微分方程(333) § 221. 形如 $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 的微分方程(333) § 222. 形如 $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ 的微分方程(335)

§ 223. 形如 $f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ 的微分方程(337) § 224. 形如 $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

与 $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ 的微分方程(338) § 225. 二阶綫性微分方程(341)

§ 226. 常系数二阶齐次綫性微分方程(343) § 227. 常系数二阶非齐次綫性微分方程(346) § 228. 关于常系数高阶綫性微分方程的說明(352)

希腊字母 354

第一篇 解析几何

第一章 直线上的解析几何

§1. 直线上点的坐标 为了确定直线上点的位置, 我們在此直线上取任意一点 O , 把它叫做原点(图 1)。如果已知直线上点 P 与原点 O 的距离, 即线段 OP 的长, 以及此线段的方向, 那末, 点 P 就完全确定了。线段的长是以某一长度单位来度量该线段所得的结果, 线段的方向可用+号和-号来区分, 例如, 約定点 O 向右截取的线段为正, 向左截取的线段为负, 这样表示前者长的数就应冠以+号, 表示后者长的数就应冠以-号。

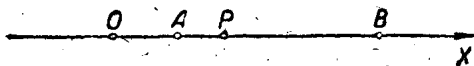


图 1.

+号可以省略, 通常就是这样做的。

做了这样的約定之后, 对于直线上的每一个点, 就有一个唯一的数与之对应, 这个数叫做该点的横坐标或坐标, 通常以字母 x 表示。

逆命题也是成立的: 每一实数都有直线上唯一的一点与之对应。

这样一来, 就在直线上的点与实数之間建立了一一对应。

横坐标为 x 的点 P , 可用 $P(x)$ 表示。

在解析几何中, 当說到已知一点, 这就意味着该点的坐标已知。

点 O 的坐标为 0 , 叫做起算点或坐标原点; 有向直线 Ox 叫做坐标轴。

§2. 两点間的距离 設在一直线上建立了一个坐标系, 即选定了:

1. 坐标原点; 2) 正向; 3) 度量单位。再設在这个坐标系里点 $A(x_1)$ 和

$B(x_2)$ 为已知的。现在来求距离 AB 。

如果 A 和 B 两点的位置如图 2 所示, 则

$$AB = x_2 - x_1.$$

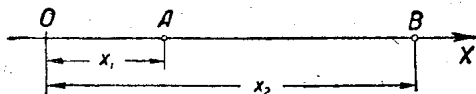


图 2.

如果 $0 < x_2 < x_1$ (图 3), 则

$$AB = x_1 - x_2.$$

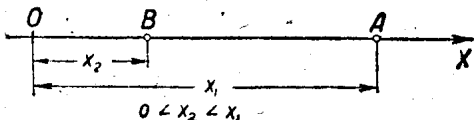


图 3.

上述两种情况可以合并写作:

$$AB = |x_2 - x_1| \text{ ①.} \quad (1)$$

所得到的 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 两点间的距离公式 (1), 对于直线上任何两点都成立, 两点重合时也不例外。在下一情状下, 距离 AB 等于零。

现在来研究图 4 所示点的位置。显而易见

$$AB = AO + OB,$$

但 $AO = -x_1$, 因为 $x_1 < 0$, 故 $-x_1 > 0$; $OB = x_2 > 0$ 。因此

$$AB = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1,$$

此式在我们所研究的情况下与式 (1) 一致, 因为 $x_2 - x_1 > 0$ 。研究 O, A, B 三点可能有的所有相互位置, 就可以确立公式 (1) 的普遍性。这个研究, 我们把它作为习题留给读者去做: 对所遇到的每一种相互位置问题, 最好是给出点 A 和点 B 的横坐标数值, 以图解办法来说明。

应该指出的是, 公式 (1) 也可以不用绝对值符号, 而写成:

① 符号 $| |$ 是数的绝对值的符号。例如, $|-3| = 3$; $|2| = 2$; $|0| = 0$ 。

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2},$$

式中根号都取非负数值。

例如, $A(2), B(-9)$;

$$AB = \sqrt{(-9-2)^2} = \sqrt{(-11)^2} = 11.$$

总之, 要求 A 和 B 两点间的距离, 即线段 AB 的长, 只要由线段终点的坐标减去起点的坐标, 再取此差的绝对值。

如果在公式(1)中去掉绝对值符号, 那末所得差的正负号就表示线段 AB (A 是起点, B 是终点) 的方向。也就是, 如果差 $x_2 - x_1$ 为正, 那末 AB 的方向(由 A 到 B)与 x 轴的正向一致; 如果 $x_2 - x_1$ 为负, 那末 AB 的方向与 x 轴的正向相反。

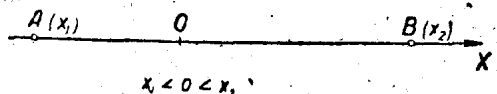


图 4.

例如(图 5), $x_2 - x_1$ 为负(因 $x_2 < x_1$), 也就是线段 AB 的方向(由起点 A 到终点 B)与 x 轴的正向相反。

研究了 x 轴上 O, A, B 三点可能有的所有相互位置之后, 就可以证明这个命题是正确的。

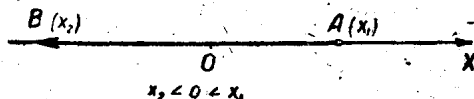


图 5.

有向线段 $\overline{AB}$ 可写作 $\overline{AB} = x_2 - x_1$, 这是考虑到了它的长度和方向。

习 题

试求 $A(a)$ 和 $B(b)$ 两点间的距离, 如果, $a=3, b=4; a=4, b=3; a=0, b=-1; a=-1, b=0; a=-2, b=-3; a=-2, b=3$. 试作图并且在考虑了差 $b-a$ 的正负号以后, 再确定 AB 的方向。

§3. 线段的定比分割 已知线段 M_1M_2 的起点及终点的坐标分别为 x_1 和 x_2 ; 试在这个线段上找出一点 M , 它以定比 λ 分此线段为两部分。这就是说(图 6): $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ 。

点 M 叫做分点, 所求的就是它的坐标 x 。

这里应该指出的是: 不论点 M_1 及 M 的位置如何, 线段 M_1M (自起点 M_1 到分点 M) 总是跟线段 MM_2 (自分点 M 到终点 M_2) 有同一方向, 因为点 M 在点 M_1 和 M_2 之间(图 6 和 7)。

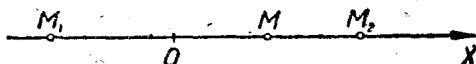


图 6.

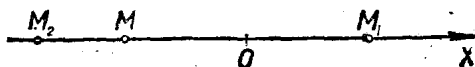


图 7.

由此可得

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

因为 $x - x_1$ 和 $x_2 - x$ 同号, 所以其比值为正。由此求得:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

就 x 解之, 得线段的定比分割公式:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

总之, 为了求得“分点”的坐标, 只要把“起点”的坐标加上“终点”的坐标与 λ 之积, 再以 $1 + \lambda$ 除所得之和。

字母 λ 表示线段的比值, 也可以取一切正值。

上面所研究的问题的特别情况是等分线段。这时 $\lambda = 1$, 因而线段 M_1M_2 的中点坐标 x_0 可用下列公式表示:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (3)$$

即线段中点的坐标等于线段两端点坐标之和的一半。

按题意 λ 是正数。但已得公式

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

即使在 λ 为负值时当然也可很自然地给出某一点的横坐标 x ，不过 $\lambda = -1$ 的情况要除外，因这时 $1 + \lambda = 0$ ，而以零作除数是不可以的。

例如(图 8)，设 $x_1 = -1$ ； $x_2 = 2$ ， $\lambda = -2$ ，则

$$x = \frac{-1 - 2 \times 2}{1 - 2} = 5.$$

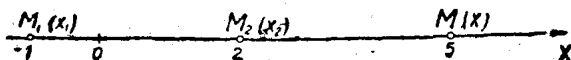


图 8.

由此可见，不遵守导出所得公式时所做的假定，也可求出完全确定的结果。

在这类情况下，在数学中宁愿给予作为结论之根据的概念以更普遍的意义，而不使公式的整个普遍性受到破坏。

我们约定：如果 M 在线段 M_1M_2 的外边(图 8)，则 M 外分线段 M_1M_2 ；如果 M 在 M_1 和 M_2 之间(图 6)，则内分。据此我们就把上述概念，即线段的定比分割，予以推广了。

如果线段的方向与 x 轴的正向一致，则此线段就定为正的，反之，就定为负的。

例如(图 8)，线段 $\overline{M_1M}$ (从起点到分点)是正的，而线段 $\overline{MM_2}$ (从分点到终点)是负的。

方向相反的两个有向线段的比值是被定为负的。在图 8 所讨论的情况下：

$$\lambda = \frac{6}{-3} = -2.$$

经过这样的推广以后，对于任何的 $\lambda \neq -1$ ，不单公式(2)依然有

效,而且上面用文字表达的命题也成立:即为了求得“分点”的坐标,只要把“起点”的坐标加上“终点”的坐标与 λ 之积,再以 $1+\lambda$ 除所得的和。

习 题

1. 把从 $A(-6)$ 到 $B(4)$ 这一线段分成五等分(求分点的坐标)。
2. 试以定比 $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\lambda = -3$ 外分前题的线段并作图。
3. 试等分从 $A(-4)$ 到 $B(8)$ 的线段,即求它的中点的坐标。

第二章 平面上点的坐标 · 两点的距离 · 线段的定比分割

§4. 平面上点的直角坐标 为了确定平面上点的位置,我们取两条交于点 O 的互相垂直的直线(图9)。在其中每条直线上都指出一个作为正的方向。

设这两个方向是 Ox 和 Oy 。不论在我们所取的这两条直线上,或分别在与它们平行的任何其他两条直线上,沿 Ox 和 Oy 方向截取的线段都定为正的,而在相反方向截取的线段则定为负的。

为了确定平面上某一点 P 对于直线 Ox 和 Oy 的位置,从点 P 分别

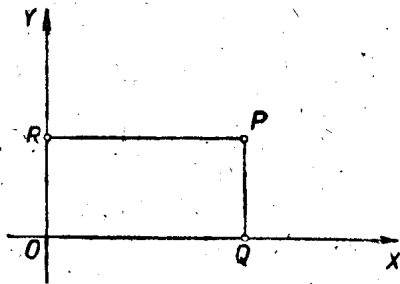


图 9.

向直线 Ox 及 Oy 作垂线 PQ 和 PR 。线段 PR 是从直线 Oy 到点 P 的距离,线段 PQ 是从直线 Ox 到点 P 的距离。用一个确定的长度单位度量这两个线段,并注意线段正负号的条件,就可以得到对应于点 P 的一

个数偶。这一数偶叫做点 P 的坐标。表示点 P 与直线 Oy 的距离 RP 的数叫做横坐标，表示点 P 与直线 Ox 的距离 QP 的数叫做点 P 的纵坐标。点的横坐标通常以 x 表示，而纵坐标以 y 表示。直线 Ox 和 Oy 叫做坐标轴： Ox 叫做 x 轴或横坐标轴， Oy 叫做 y 轴或纵坐标轴。

Ox 轴上点 Q 的坐标就是点 P 的横坐标， Oy 轴上点 R 的坐标就是点 P 的纵坐标。

坐标为 $x=a$ 和 $y=b$ 的点 P 以记号 $P(a, b)$ 表示。

反之，对于每一实数偶，均有平面上唯一的一个点与之对应。如果已知数偶是 (a, b) ，那末对应于它的点，就是这样两条直线的交点：其中一条直线平行于 y 轴，它与 y 轴的距离为 a ，另一条直线平行于 x 轴，它与 x 轴的距离为 b 。

这样一来，平面上的点与（实）数偶之间就建立起了——对应的关系。

x 轴上点的纵坐标等于零； y 轴上点的横坐标等于零。坐标原点，即点 O ，它的纵坐标和横坐标都等于零。

我们说：已知一点，就是已知它的坐标；求一点就是求它的坐标。

习 题

1. 试作出下列各点： $(2, 3)$ ； $(-2, 3)$ ； $(-2, -3)$ ； $(2, -3)$ 。
2. 试作出下列各点： $(0, -1)$ ； $(-1, 0)$ 。
3. 试作出下列各点： $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ ； $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ ； $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ ； $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ 。

§5. 两点间的距离 设已知两点： $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 。试求它们之间的距离。点 M_1 和 M_2 间的距离以线段 M_1M_2 表示（图10）。为了确定这一距离，我们从已知两点分别向横坐标轴作垂线 M_1P_1 和 M_2P_2 ，又作 x 轴的平行线的 M_1Q ， Q 是它与直线 M_2P_2 的交点。经过这样的作图得到直角三角形 M_1QM_2 ，由此直角三角形求得：

$$M_1 M_2^2 = M_1 Q^2 + Q M_2^2.$$

因为根据解析几何的规则, 不论点 M_1 和 M_2 在平面上的相互位置如何(例如, 图 10 和 11), 在直线上下列关系都成立:

$$\overline{M_1 Q} = \overline{P_1 P_2} = x_2 - x_1; \quad \overline{Q M_2} = \overline{Q_1 Q_2} = y_2 - y_1,$$

由此得:

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4)$$

这是两点间的用其坐标来表示的距离公式。

这是一般公式, 即它对于平面上任何两点都成立。

我们指出, 以上所解决的问题的若干特殊情况。

我们来计算一点与坐标原点的距离。

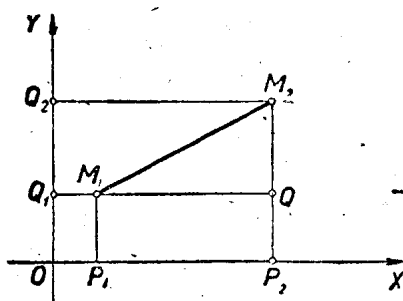


图 10.

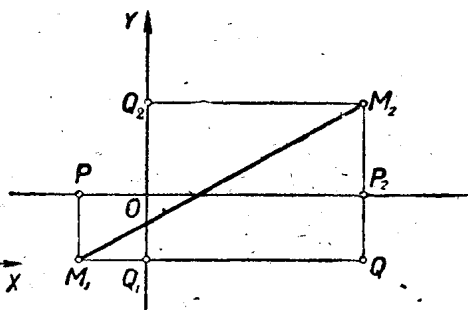


图 11.

以 x 和 y 表示已知点 M 的坐标, 因为原点 O 的坐标为零, 所以由公式(4)可得:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

如果点 M_1 和 M_2 在同一坐标轴上, 例如, 在 Ox 轴上, 则

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

习 题

1. 求下列各点间的距离: