高等数学简明教程

高等学校教学用書

高等数学簡明教程

C. П. 維諾格拉陀夫著

尙　　民　　譯

(修訂本)

高等教育出版社

本书是根据苏俄教育部教科书出版社(Учпедгиз) 1949 年出版的維諾格拉陀夫(С. П. Виноградов)著、庫图佐夫(Б. В. Кутузов)改編"高等数学簡明教程"(Краткий курс высшей математики)第九版譯出的。本书(譯本)的第一版是在 1952 年出版的，本版又作了較大的修訂。原书經苏俄教育部审定为师范專科学校适用教科书。

本书的內容共分两个部分，第一部分講述解析几何；第二部分講述数学分析及微分方程的一般知識。

高等数学簡明教程

С. П. 維諾格拉陀夫著

尙　　民　　譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

外文印刷厂印裝　新华书店发行

統一书号 13010·594 开本 850×1168 $1/_{32}$ 印張 11 $5/_{16}$

字数 304,000 印数 21901—26900 定价(6)¥1.10

1959年6月第1版 1960年2月北京第4次印刷

第九版序

С. П. 維諾格拉陀夫所著“解析几何与微积分学簡明教程”的这一版，是根据师范学院的数学大綱修訂的。书中删去了数学大綱中不包含的材料(重积分、插值法以及許多次要問題)。

数学解析的緒論部分作了彻底的修訂，因为以前各版对于这一部分的叙述已經相当陈旧。这种修訂是根据教学大綱的特点进行的。在其他部分也删去了一些內容陈旧的概念(如方程的无尽根、欧几里得几何中的无穷远元素等等)。

有几章及个别几节只好重新写过。

增加了不少新图，好多原有的图更换了。这本教科书，現在用“高等数学簡明教程”的书名出版，是为了符合教学計划中所規定的这門課的名称。

В. 庫图佐夫

1945 年 7 月 25 日

目　录

第一篇　解　析　几　何

第一篇　解析几何

第一章　直綫上的解析几何

§1. 直綫上点的坐标　为了确定直綫上点的位置，我們在此直綫上取任意一点O，把它叫做原点(图1)。如果已知直綫上点P与原点O的距离，即綫段OP的长，以及此綫段的方向，那末，点P就完全确定了。綫段的长是以某一长度单位来度量該綫段所得的結果，綫段的方向可用+号和−号来区分，例如，約定点O向右截取的綫段为正，向左截取的綫段为負，这样表示前者长的数就应冠以+号，表示后者长的数就应冠以−号。

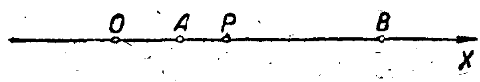

图 1.

+号可以省略，通常就是这样做的。

做了这样的約定之后，对于直綫上的每一个点，就有一个唯一的数与之对应，这个数叫做該点的横坐标或坐标，通常以字母x表示。

逆命题也是成立的：每一实数都有直綫上唯一的一点与之对应。

这样一来，就在直綫上的点与实数之間建立了一一对应。

横坐标为x的点P，可用$P(x)$表示。

在解析几何中，当說到已知一点，这就意味着該点的坐标已知。

点O的坐标为0，叫做起算点或坐标原点；有向直綫Ox叫做坐标軸。

§2. 两点間的距离　設在一直綫上建立了一个坐标系，即选定了：1)坐标原点；2)正向；3)度量单位。再設在这个坐标系里点$A(x_1)$和

$B(x_2)$为已知的。現在来求距离 AB。

如果 A 和 B 两点的位置如图 2 所示，則

$$AB = x_2 - x_1.$$

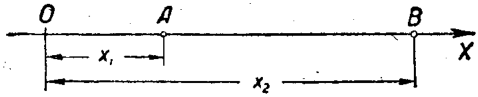

图 2.

如果 $0 < x_2 < x_1$(图 3)，則

$$AB = x_1 - x_2.$$

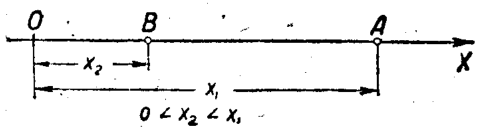

图 3.

上述两种情况可以合并写作:

$$AB = |x_2 - x_1| ^{①}. \tag{1}$$

所得到的 $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 两点間的距离公式(1)，对于直綫上任何两点都成立，两点重合时也不例外。在后一情状下，距离 AB 等于零。

現在来研究图 4 所示点的位置。显而易見

$$AB = AO + OB,$$

但 $AO = -x_1$，因为 $x_1 < 0$，故 $-x_1 > 0$; $OB = x_2 > 0$。因此

$$AB = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1,$$

此式在我們所研討的情况下与式(1)一致，因为 $x_2 - x_1 > 0$。研究 O, A, B 三点可能有的所有相互位置，就可以确立公式(1)的普遍性。这个研究，我們把它作为习題留給讀者去做: 对所遇到的每一种相互位置問題，最好是給出点 A 和点 B 的横坐标数值，以图解办法来說明。

应該指出的是，公式(1)也可以不用絕对值符号，而写成:

① 符号 $|\ |$ 是数的絕对值的符号。例如，$|-3|=3$; $|2|=2$; $|0|=0$。

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2},$$

式中根号都取非負数値。

例如，$A(2)$，$B(-9)$；

$$AB=\sqrt{(-9-2)^2}=\sqrt{(-11)^2}=11.$$

总之，要求A和B两点間的距离，即綫段 AB 的长，只要由綫段終点的坐标减去起点的坐标，再取此差的絕对値。

如果在公式(1)中去掉絕对値符号，那末所得差的正負号就表示綫段 AB（A 是起点，B 是終点）的方向。也就是，如果差 x_2-x_1 为正，那末 AB 的方向（由 A 到 B）与 x 軸的正向一致；如果x_2-x_1为負，那末AB的方向与 x 軸的正向相反。

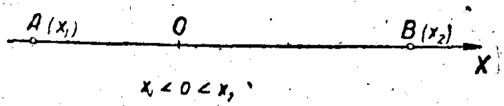

图 4.

例如（图 5），x_2-x_1 为負（因 $x_2<x_1$），也就是綫段 AB 的方向（由起点 A 到終点 B）与 x 軸的正向相反。

研究了 x 軸上 O, A, B 三点可能有的所有相互位置之后，就可以証明这个命题是正确的。

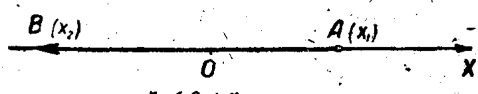

图 5.

有向綫段 $\overline{AB}$ 可写作 $\overline{AB}=x_2-x_1$，这是考虑到了它的长度和方向。

习 題

試求$A(a)$和$B(b)$两点間的距离，如果，$a=3, b=4$；$a=4, b=3$；$a=0, b=-1$；$a=-1, b=0$；$a=-2$，$b=-3$；$a=-2$，$b=3$。試作图并且在考虑了差 $b-a$ 的正負号以后，再确定 AB 的方向。

§3. **綫段的定比分割** 已知綫段 M_1M_2 的起点及終点的坐标分别为 x_1 和 x_2；試在这个綫段上找出一点 M，它以定比 λ 分此綫段为两部分。这就是說(图 6)：$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$。

点 M 叫做分点，所求的就是它的坐标 x。

这里应該指出的是：不論点 M_1 及 M 的位置如何，綫段 M_1M（自起点 M_1 到分点 M）总是跟綫段 MM_2（自分点 M 到終点 M_2）有同一方向，因为点 M 在点 M_1 和 M_2 之間(图 6 和 7)。

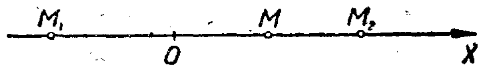

图 6.

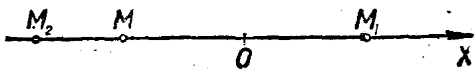

图 7.

由此可得

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

因为 $x-x_1$ 和 x_2-x 同号，所以其比值为正。由此求得：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

就 x 解之，得綫段的定比分割公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

总之，为了求得"分点"的坐标，只要把"起点"的坐标加上"終点"的坐标与 λ 之积，再以 $1+\lambda$ 除所得之和。

字母 λ 表示綫段的比值，也可以取一切正值。

上面所研究的問題的特别情况是等分綫段。这时 $\lambda=1$，因而綫段 M_1M_2 的中点坐标 x_0 可用下列公式表示：

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, \tag{3}$$

即綫段中点的坐标等于綫段两端点坐标之和的一半。

按題意 λ 是正数。但已得公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

即使在 λ 为負值时当然也可很自然地給出某一点的横坐标 x，不过 $\lambda=-1$ 的情况要除外，因这时 $1+\lambda=0$，而以零作除数是不可以的。

例如(图 8)，設 $x_1=-1$；$x_2=2$，$\lambda=-2$，則

$$x=\frac{-1-2\times 2}{1-2}=5.$$

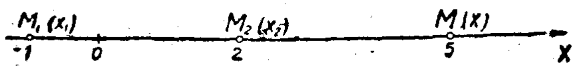

图 8.

由此可見，不遵守导出所得公式时所做的假定，也可求出完全确定的結果。

在这类情况下，在数学中宁愿給予作为結論之根据的概念以更普遍的意义，而不使公式的整个普遍性受到破坏。

我們約定：如果M在綫段 M_1M_2 的外边（图 8），則M外分綫段 M_1M_2；如果M在 M_1 和 M_2 之間(图 6)，則內分。据此我們就把上述概念，即綫段的定比分割，予以推广了。

如果綫段的方向与 x 軸的正向一致，則此綫段就定为正的，反之，就定为負的。

例如（图 8)，綫段 $\overline{M_1M}$（从起点到分点)是正的，而綫段 MM_2（从分点到終点)是負的。

方向相反的两个有向綫段的比值是被定为負的。在图 8 所討論的情况下：

$$\lambda=\frac{6}{-3}=-2.$$

經过这样的推广以后，对于任何的 $\lambda\neq-1$，不单公式(2)依然有

效，而且上面用文字表达的命题也成立：即为了求得“分点”的坐标，只要把“起点”的坐标加上“終点”的坐标与 λ 之积，再以 $1+\lambda$ 除所得的和。

习 题

1. 把从 $A(-6)$ 到 $B(4)$ 这一綫段分成五等分(求分点的坐标)。
2. 試以定比 $\lambda=-\frac{1}{2}$; $\lambda=-3$ 外分前題的綫段并作图。
3. 試等分从 $A(-4)$ 到 $B(8)$ 的綫段，即求它的中点的坐标。

第二章 平面上点的坐标·两点的距离·綫段的定比分割

§4. 平面上点的直角坐标 为了确定平面上点的位置，我們取两条交于点 O 的互相垂直的直綫(图 9)。在其中每条直綫上都指出一个作为正的方向。

设这两个方向是 Ox 和 Oy。不論在我們所取的这两条直綫上，或分别在与它們平行的任何其他两条直綫上，沿 Ox 和 Oy 方向截取的綫段都定为正的，而在相反方向截取的綫段則定为負的。

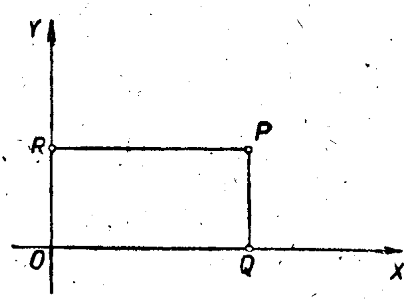

图 9.

为了确定平面上某一点 P 对于直綫 Ox 和 Oy 的位置，从点 P 分别向直綫 Ox 及 Oy 作垂綫 PQ 和 PR。綫段 RP 是从直綫 Oy 到点 P 的距离，綫段 QP 是从直綫 Ox 到点 P 的距离。用一个确定的长度单位度量这两个綫段，并注意綫段正負号的条件，就可以得到对应于点 P 的一

个数偶。这一数偶叫做点P的坐标。表示点P与直綫Oy的距离RP的数叫做横坐标,表示点P与直綫Ox的距离QP的数叫做点P的縱坐标。点的横坐标通常以x表示,而縱坐标以y表示。直綫Ox和Oy叫做坐标軸:Ox叫做x軸或横坐标軸,Oy叫做y軸或縱坐标軸。

Ox軸上点Q的坐标就是点P的横坐标,Oy軸上点R的坐标就是点P的縱坐标。

坐标为$x=a$和$y=b$的点P以記号$P(a,b)$表示。

反之,对于每一实数偶,均有平面上唯一的一个点与之对应。如果已知数偶是(a,b),那末对应于它的点,就是这样两条直綫的交点:其中一条直綫平行于y軸,它与y軸的距离为a,另一条直綫平行于x軸,它与x軸的距离为b。

这样一来,平面上的点与(实)数偶之間就建立起了一一对应的关系。

x軸上点的縱坐标等于零;y軸上点的横坐标等于零。坐标原点,即点O,它的縱坐标和横坐标都等于零。

我們說:已知一点,就是已知它的坐标;求一点就是求它的坐标。

习 題

1. 試作出下列各点:$(2,3)$;$(-2,3)$;$(-2,-3)$;$(2,-3)$。

2. 試作出下列各点:$(0,-1)$;$(-1,0)$。

3. 試作出下列各点:$\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;$\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

§5. 两点間的距离 設已知两点:$M_1(x_1,y_1)$和$M_2(x_2,y_2)$。試求它們之間的距离。点M_1和M_2間的距离以綫段M_1M_2表示(图10)。为了确定这一距离,我們从已知两点分别向横坐标軸作垂綫M_1P_1和M_2P_2,又作x軸的平行綫的M_1Q,Q是它与直綫M_2P_2的交点。經过这样的作图得到直角三角形M_1QM_2,由此直角三角形求得:

$$M_1M_2^2 = M_1Q^2 + QM_2^2.$$

因为根据解析几何的規則，不論点 M_1 和 M_2 在平面上的相互位置如何(例如，图 10 和 11)，在直綫上下列关系都成立：

$$\overline{M_1Q} = \overline{P_1P_2} = x_2 - x_1;\ \overline{QM_2} = \overline{Q_1Q_2} = y_2 - y_1,$$

由此得：

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}. \qquad (4)$$

这是两点間的用其坐标来表示的距离公式。

这是一般公式，即它对于平面上任何两点都成立。

我們指出，以上所解决的問題的若干特别情况。

我們来計算一点与坐标原点的距离。

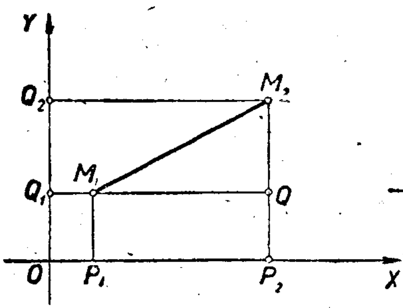

图 10.

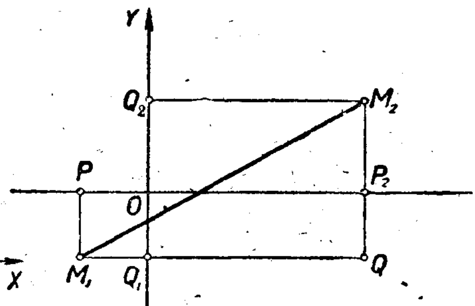

图 11.

以 x 和 y 表示已知点 M 的坐标，因为原点 O 的坐标为零，所以由公式(4)可得：

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (5)$$

如果点 M_1 和 M_2 在同一坐标軸上，例如，在 Ox 軸上，則

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2}.$$

习 題

1. 求下列各点偶的距离：