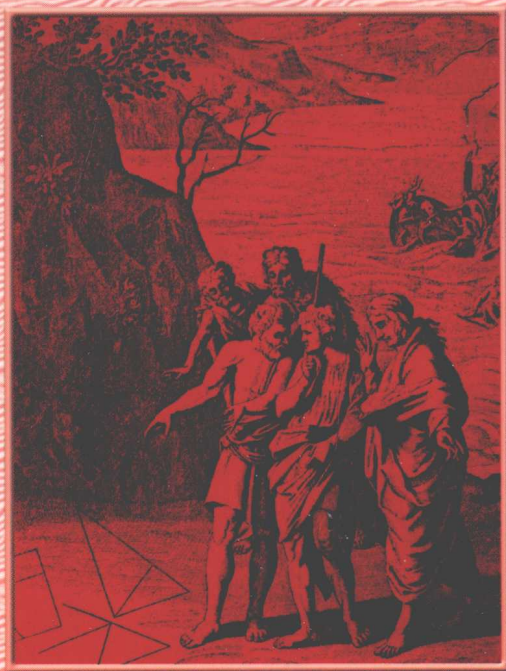


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

格点和面积

闵嗣鹤 著



◎ 面积的近似计算

◎ 格点多边形的面积公式

◎ 重叠原则

◎ 用有理数逼近无理数

◎ 数的几何中的基本定理



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013043285

0156
55



闵嗣鹤 著

格点和面积

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

- ◎ 面积的近似计算
- ◎ 格点多边形的面积公式
- ◎ 重叠原则
- ◎ 用有理数逼近无理数
- ◎ 数的几何中的基本定理



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1650874

0156
55

内 容 简 介

一张方格纸,上面画着纵横两组平行线,相邻平行线之间的距离都相等,这样两组平行线的交点,就是所谓格点.怎样用格点的个数去计算平面上有限区域的面积,或者反过来,在平面上已知面积的一个有限区域内至少有多少格点,这就是本书所要讨论的问题.本书就是这样围绕着格点和面积这个主题,讲述了数学上一些有用的问题.

本书适合初、高中师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

格点和面积/闵嗣鹤著.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.7

ISBN 978-7-5603-3631-2

I. ①格… II. ①闵… III. ①格点问题②面积
IV. ①O123.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 149412 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 6 字数 65 千字
版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3631-2
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	即将出版		
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009—01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论	2011—03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
数论入门	2011—03	38.00	99
数论开篇	2012—07	28.00	194
解析数论引论	2011—03	48.00	100
基础数论	2011—03	28.00	101
超越数	2011—03	18.00	109
三角和方法	2011—03	18.00	112
谈谈不定方程	2011—05	28.00	119
整数论	2011—05	38.00	120
初等数论 100 例	2011—05	18.00	122
初等数论经典例题	2012—07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012—01	138.00	144,145
算术探索	2011—12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012—01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012—01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012—01	28.00	158
组合数学浅谈	2012—03	28.00	159
同余理论	2012—05	38.00	163
丢番图方程引论	2012—03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	即将出版		
历届美国数学奥林匹克试题集	即将出版		
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012—07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	即将出版	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009—05	118.00	46, 47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012—07	48.00	190
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
绝对值方程一折边与组合图形的解析研究	2012—07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134, 135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-08	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-08	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	即将出版		202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-07	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	即将出版		
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	即将出版		
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	即将出版		
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	即将出版	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编号
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编: 150006

联系电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn



北航

C1650874

◎

目

录

- 第1章 什么是格点 //1
- 第2章 我们的中心问题 //3
- 第3章 面积的近似计算 //5
- 第4章 格点多边形的面积公式 //9
- 第5章 格点多边形面积公式的
证明 //14
- 第6章 另外一个问题的提出 //21
- 第7章 重叠原则 //25
- 第8章 有理数和无理数 //27
- 第9章 用有理数逼近无理数 //30
- 第10章 小数部分 $\{k\alpha\}$ 的分布 //36
- 第11章 另一种重叠原则 //39
- 第12章 数的几何中的基本定理 //41
- 习题解法与提示 //46
- 附录 作者小传 //55
- 编辑手记 //76



什么是格点

第1章

平常我们用的方格纸,都画着纵横两组平行线,相邻平行线之间的距离总是相等的.方格纸上两组直线的交点,就是所谓格点.

如果取一个格点做原点 O ,如图1,取通过这个格点的横向和纵向两直线分别做横坐标轴 Ox 和纵坐标轴 Oy ,并取原来方格纸上相邻平行线之间的距离做单位长,那么,我们就建立了一个坐标系.这时,前面所说的格点,显然就是纵横两坐标都是整数的那些点.如图1中的 O, P, Q, M, N 都是格点.由于这个缘故,我们又把格点叫做整点.

格点和面积

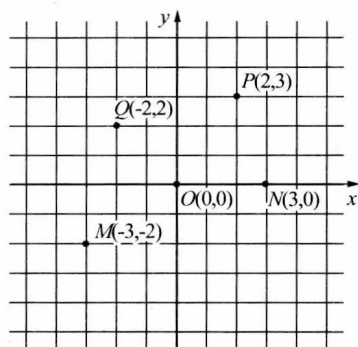


图 1



我们的中心问题

第 2 章

在这本小册子里所要讨论的问题,都是围绕着格点和面积这个主题的.

在一个平面上,格点有无穷多,但是两个不同格点的距离至少是 1,因此,我们说平面上的一个个格点是孤立的或离散的. 在平面上一个有限的区域内(例如某一个圆内),格点的个数总是一个整数. 格点的个数如果要增加或减少,增加或减少的至少是 1 个,不会有不到 1 个的零数. 和这相反,平面上一个区域的面积,常常随着区域边界的微小变动而连续地改变,比如可以改变 0.1 个单位,或更小如改变 0.01 个单位,以至 0.001 个单位,

格点和面积

0.000 1 个单位 …… 因此,我们可以说面积是一种连续的量.

在数学里面,我们有两个很基本的问题,那就是:第一,怎样用连续的量去概括离散的量;第二,怎样用离散的量去逼近连续的量. 这两个问题其实是一个问题的两个方面. 不过,第一个问题着重在利用连续的量去研究或估计离散的量. 这是古老的物理和数学上的问题. 著名的圆内格点问题就属于这一类型. 这问题是:知道了以原点做中心的圆的面积,要估计圆内格点的个数(参看习题一第2题). 近年来,由于电子计算机的长足发展,对于许多离散的量都有了计算的办法,因此,又产生了大量的用离散的量去逼近连续的量的问题. 一个简单的例子就是:怎样用一个区域内的格点数去逼近区域的面积,这也就是本书所要讨论的一个问题.



面积的近似计算

第3章

当我们测量田地、园林、湖沼、岛屿等的面积时,需要种种简便方法来计算面积的近似值.最常用的有所谓平行线法、方格法和三角法.这里顺次简单介绍如下:

(一) 平行线法 如图2,我们用 $n+1$ 条直线把所求面积分成 n 条,相邻平行线之间的距离都是 d . 为简单起见,我们假定平行线中第1条和第 $n+1$ 条跟所求面积的边界或者相切于一点,或者有一段重合,而其他每一条直线跟面积的边界恰好交于两点. 我们依次用 $l_0, l_1, \dots, l_{k-1}, l_k, \dots, l_{n-1}$, l_n 表示各平行线和面积相交的一段的长度(可能是0). 考虑在第 k 条直线