



李永乐·李正元考研数学④

2004 年版

数学

复习全书

【理工类】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

国 家 行 政 学 院 出 版 社



李永乐·李正元考研数学④ (2004 年版)

数学复习全书

【理工类】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 (按姓氏笔画)

北	京	大	学	李正元				
清	华	大	学	李永乐				
北	京	大	学	刘西垣				
北	京	大	学	范培华				
中	国	人	民	大	学	袁荫棠		
武	汉	空	军	雷	达	学	院	徐宝庆
东	北	财	经	大	学	龚兆仁		
天	津	财	经	学	院	鹿立江		

策划 高联

国家行政学院出版社

·北 京·

京新登字 323 号

图书在版编目(CIP)数据

2000 年全国硕士研究生入学考试数学复习全书:理工类/李正元等主编.

—北京:国家行政学院出版社,1999.4

ISBN 7-80140-053-4

I .20… II .李… III .高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 IV .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09620 号

数学复习全书(2004 年版)

[理工类]

李正元 李永乐 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码:100089

发行部电话:68920615

新华书店经销

北京市朝阳区印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 开本 36 印张 945 千字

2003 年 3 月北京第 5 版 2003 年 3 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-80140-053-4/O·1 定价:48.00 元

第一版前言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学,达到硕士学习阶段应具备的数学能力,提高考研应试水平,以合格的数学成绩任国家挑选,作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神,深入研究了近年来考研命题的特点及动态,并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验,编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典 400 题》。在编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成:

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及考点,让考生弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述,并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析,指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误,同时给出了相应的注意事项,以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型归纳及解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类,归纳总结了各种题型的解题方法,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的自测题,并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识,复习数学必须作题。为了让考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典 400 题》一书中,以供考生选用。

特别需要强调的是,在 '98 北大百年校庆之际,我们北大数学系 63 届校友聚会于北大燕园,畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作,并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历,对各类院校的考生有广泛的接触与了解,深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习,在大家的一致建议下,由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典 400 题》,期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友,也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编者

1999 年 4 月于北大燕园

第二版前言

本书是在作者多年考研数学辅导经验和阅卷经历的基础上编纂而成，去年5月正式出版。出版后，受到报考硕士研究生的考生和社会上读者的普遍欢迎。从反馈的信息中获悉，本书除考生用作应试复习参考书外，工科类在读大学生也将其作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对该书进行一次全面修正，以便及时反映当前研究生最新考试题型信息，使之与最新考试大纲吻合，更好地适应和满足读者考试复习辅导的需要。

2001年版在2000年数学复习全书版的基础上主要作了如下修改：(1)录入了2000年考研数学典型考题并进行延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向；(2)调换并增加了若干典型例题和习题；(3)将高等数学中第六章(几个重要定理及其应用)分解为两章(即微分学中的基本定理及其应用、多元函数积分学中的基本公式及其应用)，并作了更加详细地讲解和说明，帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透；(4)补充了一些典型题型，特别是补充了颇具代表性的综合题题型，以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题；(5)在原书的基础上又归纳总结了一些常用结论，并加以证明和举例说明，使考生灵活应用，举一反三。

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成，线性代数部分由清华大学李永乐修改完成，概率统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编者

2000年3月于北大燕园

第三版前言

本书2002年版在2001年版的基础上重点作了如下修改：(1)参编了2001年考研数学典型考题并进行延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向；(2)调换并增加了若干典型例题和习题，并修改了部分题的解法，使之更简捷；(3)高等数学部分重点修改了“第三章 一元函数积分及其计算”，补充了一些扩展性内容(如：原函数的存在性与不存在性等)，并删去有关近似计算的内容；线性代数部分重点修改了“第四章 线性方程组”及“第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量”；概率统计部分重新编写了“第二章 随机变量的概率分布及数字特征”，等等。作者对这些重点内容作了更加详细地讲解和说明，帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透；(4)补充了一些典型题型和简捷的解题方法，特别是补充了颇具代表性的综合题题型，以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题，如：高等数学部分增加了“有关泰勒公式中值 θ 的性质的命题”等新题型及“积分不等式的证明”等解答新方法；线性代数部分增加了“有关基础解系的证明”等新题型及“行列式的计算、用特征值与特征向量反求矩阵 A 、线性相关与无关的证明”等新方法；概率统计部分增加了“随机变量数字特征的计算”等新题型及“随机变量数字特征的计算”等新方法。

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成，线性代数部分由清华大学李永乐修改完成，概率统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编者

2001年3月于北大燕园

第四版前言

本书 2003 年版在 2002 年版的基础上重点作了如下修改：(1) 改编了 2002 年考研数学典型考题并进行了延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向；(2) 调换并增加了若干典型例题和习题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷、更易掌握；(3) 高等数学部分重点修改了“第九章 无穷级数”，为了突出考纲重点，将“求幂级数的收敛域或收敛区间”、“幂级数的求和”及“求函数的幂级数展开式”单独分离出来进行举例讲解，另外，为了更好地体现大纲精神，删掉了少量内容，并补充了一些解题方法，如：在微分方程应用题求解部分，补充了利用变化率满足的条件列方程等方法，等等；(4) 线性代数部分重点修改了“第二章 矩阵及其运算”，单独归纳了“关于伴随矩阵的命题”这一题型的解法与技巧，以及“第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量”，单独归纳了“有关实对称矩阵的命题”这一题型的解题方法与技巧。另外，在第一章中，补充并归纳了“抽象行列式的计算”这一题型的解题方法与技巧，等等；(5) 概率统计部分重点修改了“第三章 二维随机变量的概率分布及其数字特征”，对其中的常考题型补充了较为典型的例题及其较简捷的解题方法，等等。

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成，线性代数部分由清华大学李永乐修改完成，概率统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编 者

2002 年 3 月于北大燕园

第五版前言

本书 2004 年版是在 2003 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性。

改编了 2003 年考研数学较典型的考题并进行延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向。

高等数学部分：按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了大幅度调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，泰勒公式及其应用，数学建模等；同时删去考试大纲删去的内容，如：两曲线的交角，包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组。这样有利于考生把握重点，弄懂大纲要求的基本概念、公式及定理，并对这些概念、公式及定理的应用进行剖析和延伸，使考生在考试中应对自如；提高应试水平。

线性代数部分：增加了若干道典型试题，并进行了讲解和延拓，同时对大纲新增加的“实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角矩阵”这一内容加强了例题的讲解和习题的训练。

概率论与数理统计部分：与高等数学部分一样也进行了大幅度调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点内容和大纲新增加的考试内容（如：几何型概率等）从多角度命制典型试题进行讲解，以提高考生综合分析能力，从而取得好成绩。

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成，线性代数部分由清华大学李永乐修改完成，概率论与数理统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编 者

2003 年 2 月于北大燕园

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续与求极限的方法

方法	1
内容概要与重难点提示	1
考核知识要点讲解	1
一、函数	1
二、极限的概念与性质	3
三、极限的存在与不存在问题	4
四、无穷小及其阶	6
五、函数的连续性及其判断	8
六、求极限的方法	9
常考题型归纳及解题方法与技巧	15
题型(一) 求反函数	15
题型(二) 求复合函数	16
题型(三) 利用函数概念求函数表达式	16
题型(四) 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限	17
题型(五) 求 $0 \cdot \infty$ 或 $\infty - \infty$ 型的极限	18
题型(六) 求指数型(1^∞ , 0^0 , ∞^0)的极限	19
题型(七) 求含变限积分的不定式的极限	19
题型(八) 由极限值确定函数式中的参数	20
题型(九) 利用夹逼法求极限	21
题型(十) 求 n 项和数列的极限	21
题型(十一) 求 n 项积数列的极限	22
题型(十二) 求递归数列的极限	23
题型(十三) 利用函数极限求数列极限	24
题型(十四) 无穷小的比较与无穷小的阶的确定	25
题型(十五) 讨论函数的连续性与间断点的类型	26
题型(十六) 极限的证明题	26
题型训练及参考答案	27
第二章 一元函数的导数与微分概念及其计算	29

内容概要与重难点提示	29
考核知识要点讲解	29
一、一元函数的导数与微分	29
二、按定义求导适用的情形	33
三、基本初等函数导数表与导数四则运算法则	34
四、复合函数的微分法则	35
五、由复合函数求导法则导出的微分法则	35
六、分段函数求导法	37
七、高阶导数及 n 阶导数的求法	39
八、一元函数微分学的简单应用	41
常考题型归纳及解题方法与技巧	42
题型(一) 有关一元函数的导数与微分概念的命题	42
题型(二) 一元函数可导函数与不可导函数乘积的可导性的讨论	43
题型(三) 求各类一元函数的导数与微分	44
题型(四) 变限积分的求导	49
题型(五) 一元函数求导与求微分的综合题	50
题型(六) 求一元函数的 n 阶导数	51
题型(七) 一元分段函数的可导性与导函数的连续性等命题的讨论	51
题型(八) 一元函数导数概念的应用	53
题型训练及参考答案	54
第三章 一元函数积分概念、计算及应用	56
内容概要与重难点提示	56
考核知识要点讲解	56
一、一元函数积分的概念、性质与基本定理	56
二、积分法则	62
三、各类函数的积分法	70
四、广义积分	73
五、积分学应用的基本方法——微元分析法	74

六、一元函数积分学的几何应用	75
七、一元函数积分学的物理应用	81
常考题型归纳及解题方法与技巧	82
题型(一) 有关原函数与定积分概念的命题	82
题型(二) 积分值的比较或判断积分值的符号	83
题型(三) 估计积分值	84
题型(四) 有关原函数的存在性问题	84
题型(五) 求分段函数的原函数	86
题型(六) 各类被积函数不定积分的计算	86
题型(七) 各类被积函数定积分的计算	88
题型(八) 利用若干积分技巧计算积分	90
题型(九) 求形如 $\int_a^b (f(x) \int_a^x g(y) dy) dx$ 的积分	92
题型(十) 由函数方程求积分	93
题型(十一) 广义积分的计算	94
题型(十二) 证明积分等式	95
题型(十三) 证明积分不等式	96
题型(十四) 关于变限积分的讨论	99
题型(十五) 一元函数积分学的几何应用	100
题型(十六) 一元函数积分学的物理应用	104
题型(十七) 综合题	106
题型训练及参考答案	107
第四章 微分中值定理及其应用	109
内容概要与重难点提示	109
考核知识要点讲解	109
一、连续函数的性质	109
二、微分中值定理及其应用	111
三、利用导数研究函数的变化	112
四、一元函数的最大值与最小值问题	117
五、微分中值定理的其他应用	118
常考题型归纳及解题方法与技巧	119
题型(一) 有关连续函数性质的命题	119
题型(二) 有关利用导数研究函数的变化的命题	120
题型(三) 一元函数的最值问题	125
题型(四) 与最值问题有关的综合题	127
题型(五) 讨论函数的零点	129
题型(六) 用微分中值定理证明函数或其导数存在某种特征点	137

题型(七) 用微分学的方法证明不等式	137
题型训练及参考答案	142
第五章 一元函数的泰勒公式及其应用	145
内容概要与重难点提示	145
考核知识要点讲解	145
一、带皮亚诺余项与拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式	145
二、泰勒公式的求法	146
三、一元函数泰勒公式的若干应用	148
常考题型归纳及解题方法与技巧	150
题型(一) 求泰勒公式	150
题型(二) 用泰勒公式求极限或确定无穷小的阶	151
题型(三) 用泰勒公式证明不等式或高阶导数存在某种特征点	153
题型(四) 有关泰勒公式的中值 θ 的性质	154
题型训练及参考答案	155
第六章 微分方程	156
内容概要与重难点提示	156
考核知识要点讲解	156
一、基本概念	156
二、一阶微分方程	157
三、可降阶的高阶方程	161
四、线性微分方程解的性质与结构	161
五、二阶和某些高阶常系数齐次线性方程、欧拉方程	162
六、二阶常系数非齐次线性方程	163
七、可化为求解微分方程的两类问题	164
八、应用问题	166
常考题型归纳及解题方法与技巧	166
题型(一) 变量可分离的方程与齐次方程的求解	166
题型(二) 通过简单代换化为变量可分离的方程的求解(数二不要求)	167
题型(三) 一阶线性方程与可化为一阶线性方程的求解	167
题型(四) 全微分方程的求解(数二不要求)	168
题型(五) 可降阶的高阶微分方程的求解	169
题型(六) 二阶线性常系数方程的求解	170

题型 (七) 特殊的变系数二阶线性方程的求解	170	微分概念的问题	212
题型 (八) 已知特解求通解	171	题型 (二) 求二元 (三元) 各类函数的偏导数与全微分	213
题型 (九) 含变限积分方程的求解	172	题型 (三) 变量替换下方程式的变形	217
题型 (十) 由自变量增量与因变量增量间的关系给出的一阶方程	172	题型 (四) 求二元、三元函数的梯度与方向导数	218
题型 (十一) 综合题与证明题	173	题型 (五) 多元函数的最值问题	219
题型 (十二) 有关微分方程应用题的求解	173	题型 (六) 多元函数微分学的几何应用	220
题型训练及参考答案	177	题型 (七) 有关多元函数的综合题	222
第七章 向量代数和空间解析几何	179	题型训练及参考答案	223
内容概要与重难点提示	179	第九章 多元函数积分的概念、计算及其应用	225
考核知识要点讲解	179	内容概要与重难点提示	225
一、空间直角坐标系	179	考核知识要点讲解	225
二、向量的概念	179	一、多元函数积分的概念与性质	225
三、向量的运算	180	二、在直角坐标系中化多元函数的积分为定积分	229
四、平面方程、直线方程	183	三、重积分的变量替换	235
五、平面、直线之间相互关系	184	四、如何应用多元函数积分的计算公式及简化计算	240
六、常用二次曲面的方程及其图形	186	五、多元函数积分学的几何应用	248
七、空间曲线在坐标平面上的投影	187	六、多元函数积分学的物理应用	250
常考题型归纳及解题方法与技巧	187	常考题型归纳及解题方法与技巧	253
题型 (一) 向量的运算	187	题型 (一) 积分值的比较与估计	253
题型 (二) 求平面方程	189	题型 (二) 有关多元函数积分的概念与性质的命题	254
题型 (三) 求空间的直线方程	190	题型 (三) 对称性的应用	256
题型 (四) 求点、直线、平面间的关系	191	题型 (四) 交换积分顺序与计算累次积分	260
题型 (五) 求投影方程	192	题型 (五) 两种坐标系中累次积分的转换	262
题型 (六) 求曲面方程	193	题型 (六) 二重积分的计算	263
题型训练及参考答案	194	题型 (七) 三重积分的计算	266
第八章 多元函数微分学	195	题型 (八) 曲线积分的计算	270
内容概要与重难点提示	195	题型 (九) 曲面积分的计算	272
考核知识要点讲解	195	题型 (十) 多元函数积分学的几何应用	273
一、多元函数的概念、极限与连续性	195	题型 (十一) 多元函数积分学的物理应用	276
二、多元函数的偏导数、方向导数与全微分	197	题型 (十二) 证明题与综合题	279
三、多元函数微分法则	201	题型训练及参考答案	283
四、复合函数求导法的应用——隐函数微分法	203	第十章 多元函数积分学中的基本公式及其应用	285
五、复合函数求导法则的其他应用	205	内容概要与重难点提示	285
六、方向导数的计算	206		
七、多元函数极值充分判别法	206		
八、多元函数的最大值与最小值问题	207		
九、多元函数微分学的几何应用	210		
常考题型归纳及解题方法与技巧	212		
题型 (一) 有关多元函数偏导数与全			

考核知识要点讲解	285
一、多元函数积分学中的基本公式	
——格林公式, 高斯公式与斯托克	
斯公式	285
二、向量场的通量与散度, 环流量与旋	
度	287
三、格林公式, 高斯公式与斯托克斯公	
式的一个应用	
——简化多元函数积分的计算	288
四、用线积分表示平面区域的面积, 用面	
积分表示空间区域的体积	292
五、平面上曲线积分与路径无关问题及微	
分式的原函数问题	292
常考题型归纳及解题方法与技巧	296
题型(一) 格林公式、高斯公式与斯托克	
斯公式在计算多元函数积分中	
的应用	296
题型(二) 平面上第二类曲线积分与路径	
无关问题与原函数的求法	300
题型(三) 散度与旋度的计算	304
题型(四) 综合题	305
题型训练及参考答案	307
第十一章 无穷级数	309
内容概要与重难点提示	309
考核知识要点讲解	309
一、常数项级数的概念与基本性质	309
二、正项级数敛散性的判定	310
三、交错级数的敛散性判别法	312
四、绝对收敛与条件收敛	312
五、函数项级数的收敛域与和函数	313
六、幂级数的收敛域	313
七、幂级数的运算与和函数的性质	315
八、幂级数的求和与函数的幂级数展开	316
九、傅里叶级数	317
常考题型归纳及解题方法与技巧	320
题型(一) 常数项级数敛散性的判定	320
题型(二) 求一般函数项级数的收敛域	
.....	325
题型(三) 求幂级数的收敛域或收敛区间	
.....	326
题型(四) 幂级数的求和	327
题型(五) 求函数的幂级数展开式	328
题型(六) 常数项级数求和	330
题型(七) 有关傅里叶级数的命题	332
题型(八) 证明题与综合题	334

题型训练及参考答案	337
-----------------	-----

第二篇 线性代数

第一章 行列式	340
内容概要与重难点提示	340
考核知识要点讲解	340
一、行列式的概念、展开公式及其性质	340
二、有关行列式的几个重要公式	344
常考题型归纳及解题方法与技巧	344
题型(一) 有关行列式的概念与性质	
的命题	344
题型(二) 数字型行列式的计算	347
题型(三) 抽象行列式的计算	353
题型(四) 含参数行列式的计算	354
题型(五) 关于 $ A = 0$ 的证明	355
题型训练及参考答案	356
第二章 矩阵及其运算	359
内容概要与重难点提示	359
考核知识要点讲解	359
一、矩阵的概念及几类特殊方阵	359
二、矩阵的运算	360
三、矩阵可逆的充分必要条件	361
四、初等变换	362
五、初等矩阵	362
六、矩阵的等价	362
七、矩阵方程	363
常考题型归纳及解题方法与技巧	363
题型(一) 有关矩阵的概念及运算	363
题型(二) 求方阵的幂	365
题型(三) 求与已知矩阵可交换的矩阵	
.....	367
题型(四) 有关初等矩阵的命题	369
题型(五) 关于伴随矩阵的命题	370
题型(六) 矩阵可逆的计算与证明	371
题型(七) 求解矩阵方程	374
题型训练及参考答案	377
第三章 n 维向量与向量空间	380
内容概要与重难点提示	380
考核知识要点讲解	380
一、 n 维向量的概念与运算	380
二、线性组合与线性表出	380
三、线性相关与线性无关	381
四、线性相关性 with 线性表出的关系	382
五、向量组的秩与矩阵的秩的关系	383

六、矩阵秩的重要公式	383	题型(一) 求矩阵的特征值和特征向量	424
七、向量空间、子空与基、维数、坐标	384	题型(二) 用特征值和特征向量反求	429
八、基变换与坐标变换	384	矩阵 A	429
九、规范正交基与 Schmidt 正交化	385	题型(三) 求矩阵 A 中的参数	431
常考题型归纳及解题方法与技巧	385	题型(四) n 阶矩阵 A 能否对角化的	432
题型(一) 线性组合、线性相关的判别	385	判定	432
题型(二) 线性相关与线性无关的证明	389	题型(五) 求矩阵 A 的相似标准形	433
题型(三) 求秩与极大线性无关组	394	题型(六) 求相似时的矩阵 P	435
题型(四) 有关秩的证明	396	题型(七) 相似对角化的应用	436
题型(五) 关于 $A=0$ 的证明	397	题型(八) 有关实对称矩阵的命题	437
题型(六) 有关向量空间的判定、维数、	398	题型(九) 有关特征值与特征向量的	440
基与坐标的命题	398	证明	440
题型(七) 求过渡矩阵及坐标变换	399	题型训练及参考答案	441
题型(八) 求规范正交基	400	第六章 二次型	444
题型(九) 有关秩与直线平面的综合题	401	内容概要与重难点提示	444
题型训练及参考答案	403	考核知识要点讲解	444
第四章 线性方程组	406	一、二次型的概念及其标准形	444
内容概要与重难点提示	406	二、合同矩阵及正定矩阵	446
考核知识要点讲解	406	常考题型归纳及解题方法与技巧	447
一、线性方程组的各种表达形式	406	题型(一) 有关二次型基本概念的	447
二、基础解系的概念及其求法	406	命题	447
三、齐次方程组有非零解的判定	407	题型(二) 化二次型为标准形	449
四、非齐次线性方程组有解的判定	407	题型(三) 求解二次型标准形的逆	452
五、非齐次线性方程组解的结构	407	问题	452
六、克莱姆(Cramer)法则	408	题型(四) 判别二次型的正定性	453
常考题型归纳及解题方法与技巧	408	题型(五) 有关正定性的证明	454
题型(一) 线性方程组解的基本概念	408	题型(六) 有关正定矩阵的综合题	455
题型(二) 线性方程组的求解	411	题型训练及参考答案	456
题型(三) 含有参数的方程组解的讨论	412	第三篇 概率统计	
题型(四) 有关基础解系的证明	414	第一章 随机事件与概率	458
题型(五) 有关线性方程组的证明题	416	内容概要与重难点提示	458
题型训练及参考答案	418	考核知识要点讲解	458
第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量	421	一、随机事件的关系与运算	458
内容概要与重难点提示	421	二、随机事件的概率	460
考核知识要点讲解	421	三、条件概率与全概率公式	462
一、矩阵的特征值与特征向量的概念、	421	四、事件的独立性与伯努利公式	463
性质及求法	421	常考题型归纳及解题方法与技巧	464
二、相似矩阵的概念与性质	423	题型(一) 随机事件间的关系与运算	464
三、矩阵可相似对角化的充分必要条件	423	题型(二) 概率的概念与性质	466
及解题步骤	423	题型(三) 利用全概率公式与贝叶斯	468
常考题型归纳及解题方法与技巧	424	公式计算概率	468
		题型(四) 事件的独立性与独立重复	

试验	472
题型训练及参考答案	473
第二章 随机变量的分布及其概率	476
内容概要与重难点提示	476
考核知识要点讲解	476
一、随机变量与分布函数	476
二、离散型随机变量与连续型随机变量	477
三、几个常见分布	478
四、随机变量函数的分布的求法	481
常考题型归纳及解题方法与技巧	482
题型(一) 确定随机变量概率分布中的未知参数	482
题型(二) 确定随机变量的概率分布	484
题型(三) 求随机变量函数的分布	487
题型(四) 综合应用题	491
题型训练及参考答案	492
第三章 二维随机变量的概率分布	495
内容概要与重难点提示	495
考核知识要点讲解	495
一、二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数	495
二、二维离散型随机变量	496
三、二维连续型随机变量	497
四、两个常见的二维连续型随机变量的分布	499
五、二维随机变量的独立性	500
六、二维随机变量函数的分布的求法	501
常考题型归纳及解题方法与技巧	502
题型(一) 有关概率分布的计算	502
题型(二) 有关分布函数及密度函数的命题	505
题型(三) 求两个随机变量函数的分布	508
题型训练及参考答案	514
第四章 随机变量的数字特征	517
内容概要与重难点提示	517
考核知识要点讲解	517
一、一维随机变量的数字特征	517

二、二维随机变量的数字特征	518
常考题型归纳及解题方法与技巧	519
题型(一) 随机变量的期望与方差	519
题型(二) 两个随机变量的数字特征	522
题型(三) 综合应用题	529
题型训练及参考答案	531
第五章 大数定律和中心极限定理	533
内容概要与重难点提示	533
考核知识要点讲解	533
一、大数定律	533
二、中心极限定理	534
常考题型归纳及解题方法与技巧	535
题型(一) 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	535
题型(二) 有关中心极限定理的应用的命题	537
题型训练及参考答案	541
第六章 数理统计的基本概念	543
内容概要与重难点提示	543
考核知识要点讲解	543
一、总体、样本、样本的数字特征	543
二、统计量及抽样分布	544
常考题型归纳及解题方法与技巧	547
题型训练及参考答案	550
第七章 参数估计和假设检验	551
内容概要与重难点提示	551
考核知识要点讲解	551
一、统计估计	551
二、假设检验	554
常考题型归纳及解题方法与技巧	556
题型(一) 最大似然估计与矩估计	556
题型(二) 点估计的无偏性与有效性	558
题型(三) 正态总体期望与方差的区间估计	559
题型(四) 正态总体期望与方差的假设检验	561
题型训练及参考答案	563

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续与求极限的方法

内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得其中一个量或几个量定了, 另一个量也就被唯一确定, 前者是一元函数, 后者是多元函数.

函数这部分的重点是: 复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

2. 极限是微积分的理论基础. 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限, 如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念, 性质和极限存在的条件, 又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多, 综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则;

③ 利用变量替换与两个重要极限;

⑤ 利用洛必达法则;

⑦ 数列极限转化为函数极限;

⑨ 对递归数列先证明极限存在(常用到“单调有界数列有极限”的准则), 再利用递归关系求出极限;

⑪ 利用定积分求和式的极限;

⑫ 利用导数的定义求极限.

② 利用函数的连续性;

④ 利用等价无穷小因子替换;

⑥ 分别求左、右极限;

⑧ 利用夹逼定理;

⑩ 利用泰勒公式;

3. 无穷小就是极限为零的变量. 极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析, 或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念, 学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法, 会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限定义的, 所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性间断点类型的方法, 特别是分段函数在连接点处的连续性.

考核知识要点讲解



(一) 函数概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系. 定义域与对应规则是决定因素, 有了它们函数的值域就自然被确定.

函数不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可能没有表达式, 即使有表达式也可能在整个定义域上在自变量的不同变化范围, 对应规则用不同的式子来表示, 这就是所谓分段函数.

常量与变量, 自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量, 在另一过程中可以是变量, 一个量在某个过程中是自变量, 在另一过程中可以是因变量, 这一点既简单又重要. 例如:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在极限过程 $\Delta x \rightarrow 0$ 中 x 是常量. 求完了极限, x 可以是变量, $f'(x)$ 成为 x 的函数, 它是 $f(x)$ 的导函数. $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数中 u 是中间变量, 它在函数 f 中是自变量, 在函数 g 中是因变量.

(二) 几类常见的函数

1. 有界函数 若存在正数 M 使得 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数或 $f(x)$ 在 X 上有界. 它的几何意义是: 函数图形界于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

2. 奇函数与偶函数 设区间 X 关于原点对称 (若 $x \in X$, 则 $-x \in X$), 若 $\forall x \in X$, 有 $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数 (奇函数). 它的几何意义是: 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

3. 单调函数 设 $f(x)$ 定义在区间 X 上, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $g(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加 (单调减少). 它们统称为单调函数. $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减 (单调不减).

4. 周期函数 设 $f(x)$ 定义在 X 上, 若存在常数 $T \neq 0$, 满足: $\forall x \in X$, 有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T) = f(x)$ ($\forall x \in X$), 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 它的几何意义是: 自变量每增加或减少一固定的距离 T 后, 图形重复出现.

若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(x)$ 有无穷多个周期, nT ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 均为周期. 若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数, 称它为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称最小周期或周期.

例 1.1 设 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是 ()
(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【解法一】 由 $e^{\sin x}$ 有正下界: $e^{\sin x} \geq e^{-1}$ 及 $x \tan x$ 无界可证 $f(x)$ 无界.

因 $x \tan x$ 无界, 则 $\forall M > 0, \exists x_0 \in \text{定义域}, |x_0 \tan x_0| > Me$, 进而 $|f(x_0)| = |x_0 \tan x_0 e^{\sin x_0}| \geq Me \cdot e^{-1} = M$, 即 $f(x)$ 无界. 因此选 (B).

【解法二】(排除法) 由于 $f(-x) = (-x) \tan(-x) e^{\sin(-x)} = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$, 当 $\sin x \neq 0$ 时, $f(x)$ 不是偶函数. 由 $f(0) = f(\pi) = 0$, 知 $f(x)$ 不是单调函数. 又 $f(x)$ 也不是周期函数, 因此选 (B).

(三) 复合函数

设函数 $y = f(u)$, 定义域 $D_f = U$, 又有函数 $u = g(x)$, 定义域 $D_g = X$, 值域 $R_g = U'$. 若 $U' \subset U$, 可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$, 称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数.

若 $R_g \cap D_f = \emptyset$, 则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$;

若 $R_g \subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域为 X ;

若 $R_g \cap D_f \neq \emptyset, R_g \not\subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域包含在 X 中, 但 $\neq X$.

例 1.2 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 基本思路是弄清两个函数定义域与值域的关系.

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f(g(x))$ 时, 首先要考察: x 在什么范围内 $|g(x)| = e^x < 1, > 1$ 或 $= 0$.

$$\text{由于 } |g(x)| = e^x \begin{cases} < 1, & x < 0, \\ = 1, & x = 0, \\ > 1, & x > 0, \end{cases} \text{ 因此 } f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

例 1.3 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 $f(g(x)) = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ (因为 $g(x) \geq 0$)

注意: $\forall x$, 恒有 $f(x) \geq 0$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 则 $g(f(x)) = f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

(四) 反函数

设有 $y = f(x)$, $D_f = X$, $R_f = Y$, 若 $\forall y \in Y$, 有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 由此对应关系在 Y 上确定一个函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

★ $y = f(x)$, $x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地, 若 $y = f(x)$ 在 X 上单调, 则 $y = f(x)$ 在 X 上 $\exists$ 反函数.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有如下关系:

1° 若 $D_f = X, R_f = Y$, 则 $D_{f^{-1}} = Y, R_{f^{-1}} = X$;

2° $f(f^{-1}(y)) = y$ ($\forall y \in Y$), $f^{-1}(f(x)) = x$ ($\forall x \in D_f$);

3° $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称, 而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

【例 1.4】求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

【解】当 $x < -1$ 时, $y = 1 - 2x^2 < -1$, 则 $x = -\sqrt{\frac{1-y}{2}}$ (另一舍去);

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $y = x^3 \in [-1, 8]$. $\forall y \in [-1, 8]$, 由 $y = x^3$, 知 $x = \sqrt[3]{y}$;

当 $x > 2$ 时, $y = 12x - 16 > 8$. $\forall y > 8$, $y = 12x - 16$, 知 $x = \frac{y+16}{12}$.

因此, 反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$

(五) 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的一切函数称为初等函数.

六类基本初等函数即指:

$y = c$ (常数); $y = x^a$; $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$); $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$; $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

(六) 常见的函数形式

初等函数, 隐函数 ($x - y + e^{xy} = 0$), 由参数方程确定的函数 ($x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$), 由变限积分确定的函数

($y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$), 分段函数, 由函数项级数确定的函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 以及由极限确定的函数等等.

二、极限的概念与性质

(一) 极限的定义

【定义 1.1】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \epsilon$.

若 a_n 存在极限 (有限数), 又称 $\{a_n\}$ 收敛, 否则称 $\{a_n\}$ 发散.

【定义 1.2】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

类似可定义: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

类似可定义: $f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$, $f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$.

(二) 极限的基本性质与两个重要极限

1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

若 $a > b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$; 若 $n > N$ 时, $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

【定理 1.2】(极限的唯一性) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则 $a = b$.

【定理 1.3】(收敛数列的有界性) 设 x_n 收敛, 则 x_n 有界 (即 $\exists$ 常数 $M > 0$, $|x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$).

2. 函数极限的基本性质

【定理 1.4】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$;

若 $f(x) \geq g(x)$ ($0 < |x - x_0| < \delta$), 则 $A \geq B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$. 若 $f(x) \geq 0$ ($0 < |x - x_0| < \delta$) $\Rightarrow A \geq 0$.

【定理 1.5】(极限的唯一性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

【定理 1.6】(存在极限的函数局部有界性) 设存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即 $\exists \delta > 0, M > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$.

【注】其它的极限过程如 $x \rightarrow x_0 + 0, x \rightarrow x_0 - 0, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 等等也有类似的结论.

3. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (1.1)$$

【例 1.5】求下列极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \sin x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a}$.

【解】(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 3 + 0 = 3$;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} \stackrel{t = a^x - 1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

评注 要注意重要极限成立的条件, 不要混淆, 应熟悉等价表达式.

三、极限的存在与不存在问题

(一) 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理) 若数列 x_n 单调上升有上界, 即 $x_{n+1} \geq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leq M$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \text{ 且有 } x_n \leq a \quad (n = 1, 2, \dots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界, 即 $x_{n+1} \leq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geq m$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 且有 $x_n \geq a$ ($n = 1, 2, \dots$).

此外,还可通过数列与级数的关系讨论敛散性: x_n 的敛散性与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性相同. 因为

$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的部分和数列是 $|x_{n+1} - x_1|$.

【例 1.6】 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 试证: $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 易见 $a_n \leq a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \cdots$), 只须再证 a_n 有上界:

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

因此,利用单调有界数列必收敛定理即得结论.

(二) 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

【定理 1.9】(夹逼定理) 设 $\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

【注】 其它的极限过程也有类似的结论.

【定理 1.10】(单侧极限与双侧极限的关系) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x).$$

【例 1.7】 设 $f(x) = \begin{cases} a \frac{\sin x - x}{x^3}, & x > 0, \\ \frac{1}{x} \left(2\sin x - \int_0^x \sin t^2 dt \right), & x < 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求左、右极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$, 由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值.

$$\text{【解】 } f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a \frac{\sin x - x}{x^3} \right) \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow 0^+} a \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{a}{6},$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt \right)'}{(x)'} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x^2 = 2.$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$, 得 $-\frac{a}{6} = 2$, 即 $a = -12$. 因此, 仅当 $a = -12$ 时, 存在 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

【例 1.8】 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$ 是 (). (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) 不存在但不是 ∞

【分析】 因 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$. 故要分别考察左、右极限.

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{t = \frac{1}{x-1}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{t = \frac{1}{x-1}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t^2} = 0.$$

因此选(D).

评注 证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法是:

1° 若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限式中含有 a^x ($a > 0, a \neq 1$), 或 $\arctan x, \operatorname{arccot} x$, 一定要分别求出 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 的极限值, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 否则不存在.

2° 若 $\exists x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0), y_n \rightarrow x_0 (y_n \neq x_0)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.