微积分

上册

〔美〕迈克尔·斯皮瓦克 著

严敦正 张毓贤 译

常心怡 校

人民教育出版社

微 积 分

上 册

[美] 迈克尔·斯皮瓦克 著
严敦正 张毓贤 译
常心怡 校

人 民 教 育 出 版 社

出版说明

本书根据美国 W. A. Benjamin, Inc. 出版的 M. Spivak 著《Calculus》1967 年版译出.

中译本分上, 下两册出版, 上册主要内容为基础知识、导数和积分, 下册主要内容为无穷序列、无穷级数和作为结束语的实数理论初步.

本书概念严密, 叙述清楚, 并配有大量习题. 习题中部分题解编入每章习题后的"选题解答", 其余全部题解编入《〈微积分〉补充题解》, 另册出版.

本书可作为理工科高等院校微积分课程的教学参考书.

微 积 分

上 册

[美] 迈克尔·斯皮瓦克 著

严敦正 张毓贤 译

常心怡 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖北省孝感地区印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.75 字数 350,000

1980 年 11 月第 1 版 1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,000

书号 13012·0537 定价 1.30 元

译 者 说 明

本书共二十九章，译本分上、下两册出版，上、下两册分别由陕西师范大学常心怡同志与西安公路学院杨慰祖同志校阅. 与本书配套译出的还有《<微积分>补充题解》，它包括了书中“选题解答”尚未列入的全部题解. 在译校过程中发现书中的问题或错误，已经说明或改正，重要的还加了译注，但限于水平及时间，错漏仍在所难免，尚希读者指正.

在翻译过程中得到西安外国语学院高万钧、吴雪薇，陕西师范大学马家骏以及西安公路学院张永和、邵廷燮和詹寿文等同志的帮助，谨在此致谢。

译　者

1979年7月

于西安公路学院

序　　言

我谓世人皆负欠，
这是对其职业说。
凡人均欲有所成，
效益来自其所作。
故当努力于提高，
以对事业有所助，
增光添彩乃其责。

弗朗西斯·培根

我编此书的主导思想是：微积分不仅是数学的门扉，而且是首次真正登进了数学的厅堂．由于分析的基础为近代数学思想的发展提供了基地，因而在微积分中应加强而不是回避逻辑的观念．除了要教会学生从直观上理解分析的漂亮概念之外，当然，同样重要的，还要使学生明白：严密性并不妨碍直观的理解，它本身也非目的，而是一种用来系统地叙述和思考数学问题的自然方法．

上述目的反映出的数学观点，在某种意义上说，始终是本书所维护的．不论各个单独章节写得多么好，上述目的只有在总体上写成功后才能体现出来．所以，只列出所包含的论题或提出教学法实践和其他改革等等，都是没有多大价值的．甚至连经常粗略地看一下微积分新书的人，看了本书之后，也许都能说出比广告上所介绍的更多的东西；而对微积分的某些方面特别熟悉的教师，将会知道查阅哪些部分，看看本书是否满足他的需要．

但有几个特点需要明确说明. 在本书的二十九章中，有两章(带*号的)是选学内容. 第五部分的三章是为想要检查自己学习实数结构情况的学生而写的. 此外，第三章和第十一章的附录也是选学内容.

因为本书的目的是将微积分作为一种思想的发展,而不是“论题”的汇集,所以其余各章的次序就不宜变了. 还由于大多数有趣的微积分概念要到第三部分才开始遇到,因此,必须指出,第一、二部分所需的时间，也许可比按篇幅所要求的时间短些——虽然全书要讲一学年，但这并不意味着各章都要按一样快慢的速度来进行. 在第二和第三部分之间,有一个自然的分界线,所以，下面的办法是可行的：即很简略地讲一下第二部分，以便更快地过渡到微分和积分部分. 等以后有时间，再回头详细讲第二部分. 这样安排与大多数微积分课本的传统体系相一致，但我觉得这对那些以前已学过一点微积分的学生，以及对有相当基础的聪敏的学生来说,只会降低本书的价值.

选择习题时考虑到了这些特殊的读者. 总共约有625题. 其中有易有难;但容易的又不过分简单,难的也比较有趣. 容易的习题,可以用来发挥解题的基本技巧，和检验一下理解概念的程度. 着重计算的习题,用小写罗马字编号,并且一般都有许多例题；而与其他习题相联的习题，则用小写英文字母编号. 虽然对于一些比较难的习题,已用*号和**号标出,但因判别难度的标准不一,而所作的提示(特别是对那些较难的习题)又是如此之多,因此,这些标号并不是十分可靠的. 有许多习题，若不参看提示，是很难做的，以致也许连最优秀的学生都不得不只选那些特别有兴趣的来做;从难度较小的习题中,也容易选出一部分，能使学生劳而有功而不致泄气. “选题解答”部分包括了各类习题中选出的大约一半的题解，这些可用来检查解题的能力. 另外一本《<微积分>补充题

解》包括了这些习题的其余小题的题解，还包括了所有其他习题的题解．最后，书末附有经常要参考的“建议读物”目录；还附有符号索引．

借此机会向下列各位致谢．珍妮·布尔格林夫人作出了很大的成绩，她把我断续写成的手稿打印出来．理查德·塞凯先生帮助我收集了一些习题的历史资料．理查德·威尔斯先生提供书末所附的选题解答．我特别感谢我的朋友迈克尔·弗里曼，杰伊·戈德曼，安东尼·菲利普斯和罗伯特·韦尔斯，他们仔细地看了原稿，并毫不客气地提出了批评意见．不用说，本书所有的不足，不能由他们来负责，这只能怪我有时拒绝了能让本书为更多学生所用的建议．**W. A.** 本杰明公司的编辑和职员总想增加社会对本书的需求，设法使更多读者赏识此书．我对他们表示谢意．

1965～1966学年，布兰迪斯大学新生学习荣誉数学课程，用了本书的原稿．他们居然勇敢地，忍受了原稿常有的不足之处．本校的数学课程，约有一半是代数和拓扑学，另一半为微积分．而微积分即用本书的原稿作为教科书．原稿获得了令人欣慰的成功，我向大家说明一下这情况是责无旁贷的．不妨说这个班级不至于群起反对本书，但是，从我的立场来说，他们有权要求书更完美些，从而使他们能吸取大量的数学知识．我满心希望其他学生也能以同样良好的目的和热情使用本书．

迈克尔·斯皮瓦克

1967年2月

威尔森，马萨诸塞

目　录

第一部分　引　　言

认识到自己的无知，是迈向有知的一大步.

本杰明·狄斯雷利

第一章　数的基本性质

本章的标题简单地表达了阅读本书所需要的数学知识. 其实，这样简短的一章只是解释一下“数的基本性质”，所有这些性质——加法和乘法，减法和除法，方程和不等式的解法，因式分解以及其他的代数运算——都是我们早已熟悉的. 但是本章不是一次复习. 尽管这些问题是熟悉的，但我们即将进行的概括的研究，也许象是相当新奇的；其目的不是要对旧材料进行一次广泛复习，而是要将这些知识归纳成一些简明的数的性质. 甚至有些性质好象是过于明显因而无需提及，但是意想不到会有这么多不同而且重要的事实，原来都是我们所要强调的那些性质的推论.

在本章我们将要研究的十二个性质中，头九个是关于加法和乘法的基本运算. 目前我们只考虑加法，这种运算是对数偶进行的——对于任何两个已知数 a 和 b（当然，它们可能是相同的两个数），它们的和 $a+b$ 是存在的. 把加法看作可以同时对几个（至少三个）数来进行的运算，并把 n 个数 a_1，…，a_n 的和 $a_1+\cdots+a_n$ 当作一个基本概念，这样做好象是合理的. 不过，只考虑数偶的加法，并将其他的和用这种和来定义，这样做更为方便. 对于三个数 a, b 及 c 的和，可以用两种不同的方式来求. 可以先将 b 与 c 相加，得 $b+c$，然后将 a 加上该数，得 $a+(b+c)$；或先将 a 与 b 相加，然后将它们的和 $a+b$ 加上 c，得 $(a+b)+c$. 当然，所得到的这两个复合和是相等的，这个事实就是我们要列出的第一个性质：

(P1) 设 a, b 和 c 是任意数，则

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

这个性质清楚地说明：三个数的和的单独概念是多余的. 我们简

单地用 $a+b+c$ 表示数 $a+(b+c)=(a+b)+c$. 四个数的加法要求同样的考虑，虽然稍微复杂些. 将符号 $a+b+c+d$ 定义为

$$(1)\ ((a+b)+c)+d,$$

$$\text{或}(2)\ (a+(b+c))+d,$$

$$\text{或}(3)\ a+((b+c)+d),$$

$$\text{或}(4)\ a+(b+(c+d)),$$

$$\text{或}(5)\ (a+b)+(c+d).$$

这个定义是确定的，因为这些数全部相等. 幸亏，这些无需分别列出，因为它是已经列出的性质 P 1 的必然结果. 例如，由 P 1 知

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

由此立即可知(1)和(2)是相等的. (2)和(3)的相等是 P 1 的直接推论，虽然初看时可能不易看出（必须将 $b+c$ 看成为 P 1 中的 b，d 看成为 c）. 等式(3)=(4)=(5)的证法也是简单的.

可能容易想到，应用 P 1 也足以证明：用可能有的十四种方式把五个数相加，其结果均相等，但若不具体列出这十四种形式的和，我们可能没有那么容易想出该怎样合理地安排这个证明. 以上步骤是可行的，但当考虑六个、七个或数目更多的数的集合时，我们宁可不用它. 对于任意有限个数 $a_1, \cdots, a_n$ 的集合，用这种方法证明其所有可能的和之相等，是完全不适当的. 虽然这种相等的事实可以认为是当然的，但若不怕麻烦想要证明它(这值得麻烦一次)，在第 23 题中已经略述了一个合理的途径. 今后，我们通常将不言而喻地根据这一题的结论，干脆不管圆括弧的排列，将和写成

$$a_1+\cdots+a_n.$$

下面提出数 0 的一个很重要的性质：

(P 2) 设 a 为任意数，则

$$a+0=0+a=a.$$

在我们所列的第三个性质中，0 也起重要作用：

（P 3）对于每一个数 a，都有一个数 $-a$ 使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

性质 P 2 应当还提出一个数 0 的特性，可以宽慰的是，我们已经能够证明这个特性．事实上，对于任意一数 a，设有一数 x 满足

$$a+x=a,$$

则 $x=0$（从而对于所有的数 a，这等式也成立）．证明这个断言的方法没有别的，只要从上列方程的两边减去 a，即在两边加上 $-a$ 即可．如下列详细的证明所示，为了证明这一运算是正确的，所有三个性质 P 1—P 3 都要用到．

设 $$a+x=a,$$

则 $$(-a)+(a+x)=(-a)+a=0;$$

因此 $$((-a)+a)+x=0;$$

因此 $$0+x=0;$$

因此 $$x=0.$$

正如我们刚才所暗示的，将减法看成是由加法引伸出来的一种运算，是比较方便的．我们将 $a-b$ 看成是 $a+(-b)$ 的缩写式．这样，应用类似于刚才解方程 $a+x=a$ 时所用的一系列步骤（每一步均根据 P 1，P 2 或 P 3 得到），便能求出某些简单方程的解．例如：设

$$x+3=5,$$

则 $$(x+3)+(-3)=5+(-3);$$

因此 $$x+(3+(-3))=5-3=2;$$

因此 $$x+0=2;$$

因此 $$x=2.$$

当然，只有在你认识到这样费劲的解法总可以被替代之前，才会对这种解法感兴趣．实际上，为解一个方程而如此详细地列出所依据的性质 P 1，P 2 和 P 3（或我们将要列出的进一步的性质中的任

一个)来，往往只会浪费时间.

加法的性质只有一个尚须提出. 当考虑 a、b 和 c 三数的和时，只提到两种和: $(a+b)+c$ 和 $a+(b+c)$. 实际上，若改变 a、b 和 c 的顺序，便可得到另外几种排列. 它们的和都是相等的，这是根据

(P 4) 设 a 和 b 是任意的数，则

$$a+b=b+a.$$

P 4 着重指出，虽然数偶的加法运算似与两数的顺序有关，但实际上不是这样. 不是所有的运算都有这种性质，记住这一事实是有用的. 例如，减法就没有这种性质: 通常 $a-b\neq b-a$. 我们顺便问一下，只有当什么时候才能使 $a-b=b-a$? 有趣的是，我们发现，如果只应用性质 P 1—P 4，我们将无法处理这个问题. 由代数的最基本的运算知，只有当 $a=b$ 时才有 $a-b=b-a$. 然而，这个事实不可能由性质 P 1—P 4 导出，仔细地用初等代数检查一下，看哪一(或几)步不能由 P 1—P 4 推得，这样做是有益的. 当提出另外一些性质之后，我们的确能详细指出每一步的根据. 不过，说来也奇怪，这个关键的性质却包含乘法.

乘法的基本性质幸亏和加法的基本性质相类似，只要稍加解释即可. 其意义和推论均应清楚. (和初等代数中一样，a 和 b 的乘积将用 $a\cdot b$ 表示，或简单地用 ab 表示.)

(P 5) 设 a, b 和 c 为任意数，则

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

(P 6) 设 a 为任意数，则

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

并且 $$1\neq 0.$$

(提出 $1\neq 0$ 这个断言，好象是一件奇怪的事，但我们必须把它提出来，因为无法在已列举的其他性质的基础上证明它——如果只有

一个数 0 时，这些性质都成立.）

(P 7) 对于每一个数 $a\neq0$，必有一数 a^{-1} 使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1.$$

(P 8) 设 a 和 b 为任意数，则

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

值得强调的一个细节是在 P 7 中出现的 $a\neq0$ 这个条件. 这个条件是十分必要的，因为对于所有的数 b，$0\cdot b=0$，所以没有一个数 0^{-1} 能满足 $0\cdot0^{-1}=1$. 对于除法来说，这个限制有重要的影响. 正如减法用加法来定义一样，除法也可用乘法来定义：符号 a/b 意味着 $a\cdot b^{-1}$. 因为 0^{-1} 没有意义，所以 $a/0$ 也没有意义——除以 0 总是不定的.

性质 P 7 有两个重要的推论. 设 $a\cdot b=a\cdot c$，则未必 $b=c$；因为若 $a=0$，则不论 b 和 c 等于多少，$a\cdot b$ 和 $a\cdot c$ 都等于 0. 但若 $a\neq0$，则 $b=c$；这可由 P 7 推导如下：

设 $\quad a\cdot b=a\cdot c$ 以及 $a\neq0$，

则 $\quad a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot(a\cdot c)$；

因此 $\quad (a^{-1}\cdot a)\cdot b=(a^{-1}\cdot a)\cdot c$；

因此 $\quad 1\cdot b=1\cdot c$；

因此 $\quad b=c.$

设 $a\cdot b=0$，则或者 $a=0$ 或者 $b=0$，这也是 P 7 的一个推论. 实际上，

若 $\quad a\cdot b=0$ 且 $a\neq0$，

则 $\quad a^{-1}(a\cdot b)=0$；

因此 $\quad (a^{-1}\cdot a)\cdot b=0$；

因此 $\quad 1\cdot b=0$；

因此 $\quad b=0.$

（可能出现 a 和 b 都等于零. 当我们说“或者 $a=0$ 或者 $b=0$”时

并不排除这个可能性. 在数学中“或者”二字总是具有“是这一个或是另一个, 或两者都是”的意思.)

P 7 的第二个推论通常用来解方程. 例如, 设一个数 x 满足

$$(x-1)(x-2)=0.$$

那么, 或者 $x-1=0$, 或者 $x-2=0$; 由此得 $x=1$ 或 $x=2$.

根据迄今所列出的八个性质, 我们所能证明的内容还很少. 提出下一个性质(这个性质包含加法和乘法的运算)之后, 将会迅速地改变这种情况.

(P 9) 设 a, b 和 c 是任意数, 则

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

(注意, 根据 P 8, 等式 $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ 也是成立的.) 作为应用 P 9 之一例, 我们现在来求什么时候 $a-b=b-a$:

设 $$a-b=b-a,$$

则 $$(a-b)+b=(b-a)+b=b+(b-a);$$

因此 $$a=b+b-a;$$

因此 $$a+a=(b+b-a)+a=b+b.$$

从而 $$a\cdot(1+1)=b\cdot(1+1),$$

所以 $$a=b.$$

P 9 的另一个应用是用来证明断言 $a\cdot 0=0$, 这个断言我们早已提出, 甚至在第 6 页的证明中已经用到它(你能找到在什么地方吗?). 纵然第一次提出这个事实时没有加以证明, 我们也没有把它作为一个基本性质列出. 只用 P 1—P 8 不可能证明这个事实, 因为数 0 只在关于加法的 P 2 和 P 3 中出现, 而上述的断言却涉及乘法. 应用 P 9 就容易证明它, 虽然可能不是显然的. 我们有

$$\begin{aligned} a\cdot 0+a\cdot 0&=a\cdot(0+0)\\ &=a\cdot 0; \end{aligned}$$

正如我们曾经提到的，由上式(两边加上$-(a\cdot 0)$)立即可得$a\cdot 0=0$.

P 9的一系列进一步的推论，可以帮助解释一个稍难理解的法则：即两个负数的乘积是正数．首先，我们证明$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$这个比较容易接受的断言．为了证明它，我们注意到

$$\begin{aligned}(-a)\cdot b+a\cdot b&=[(-a)+a]\cdot b\\&=0\cdot b\\&=0.\end{aligned}$$

由此(两边加上$-(a\cdot b)$)即得$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$．现在注意到

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b)+[-(a\cdot b)]&=(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot b\\&=(-a)\cdot[(-b)+b]\\&=(-a)\cdot 0\\&=0.\end{aligned}$$

于是，两边加上$(a\cdot b)$即得

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

因此，两个负数的乘积是正数的事实是P 1—P 9的推论．换言之，如果我们要P 1至P 9成为正确的，则必然得出上述关于两负数之积的法则.

迄今所研究的P 9的各种推论，虽然有趣并且重要，但是却都没有真正地揭示出P 9的意义，因为我们毕竟可以将这些性质分别列出．实际上，P 9几乎是所有代数运算的依据．例如，虽然我们已经指出如何解下列方程

$$(x-1)(x-2)=0,$$

但是我们很少遇到这种形式的方程．我们多半遇到如下的方程

$$x^2-3x+2=0.$$

"因子分解"$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，实际上是三次应用P 9:

$$
\begin{aligned}
(x-1)\cdot(x-2) &= x\cdot(x-2)+(-1)\cdot(x-2)\\
&= x\cdot x+x\cdot(-2)+(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-2)\\
&= x^2+x[(-2)+(-1)]+2\\
&= x^2-3x+2.
\end{aligned}
$$

说明P 9重要性的最后一个事实是：我们每次将阿拉伯数码相乘时，实际上都用到这个性质．例如，下列计算

$$
\begin{array}{r}
13\\
\times 24\\
\hline
52\\
26\\
\hline
312
\end{array}
$$

是下列方程的简明的排列：

$$
\begin{aligned}
13\cdot 24 &= 13\cdot(2\cdot 10+4)\\
&= 13\cdot 2\cdot 10+13\cdot 4\\
&= 26\cdot 10+52.
\end{aligned}
$$

(注意，在竖式计算中将26向左移，相当于写 $26\cdot 10$)乘法 $13\cdot 4=52$ 也是应用P 9：

$$
\begin{aligned}
13\cdot 4 &= (1\cdot 10+3)\cdot 4\\
&= 1\cdot 10\cdot 4+3\cdot 4\\
&= 4\cdot 10+12\\
&= 4\cdot 10+1\cdot 10+2\\
&= (4+1)\cdot 10+2\\
&= 5\cdot 10+2\\
&= 52.
\end{aligned}
$$

性质P 1—P 9都有描述性的名称，这些名称虽然都无需记住，但是有了名称往往便于引用．我们将借此机会把性质P 1—P 9列在一起，并指出其常用名称．

(P 1)(加法结合律)　　$a+(b+c)=(a+b)+c.$