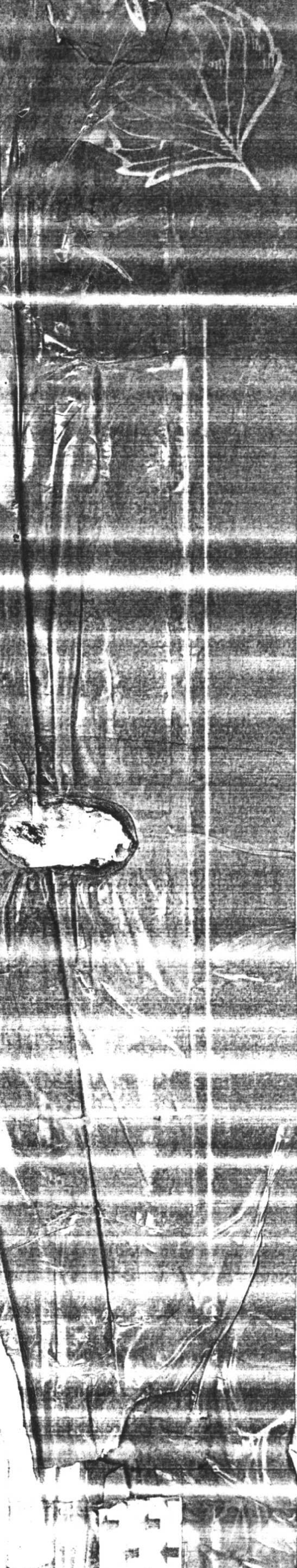
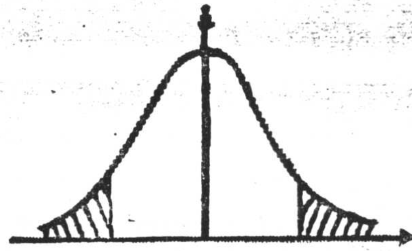
林业院校 系列教材之一

录

概率论

黄用廉 编





北京林业大学

一九八六年

目　录

前　　言

概率论是研究随机现象的数量特征和统计规律性，揭示偶然性与必然之间联系的一门有特色的数学分支，它与客观实际有着密切而广泛的联系。

随机现象，一般说来可以理解为：当人们观察某一现象或在一定条件下作某种试验时，所得的结果是多个可能情形中的一个，但在一次试验之前，我们不能准确地预言它的结果。所谓“统计规律性”是指一次试验而言，看不出有什么规律，但“大数次”地重复这个试验，其结果又遵循某些规律。概率论就是要计算某种结果发生的“可能性大小”这是现代管理定量分析中常用的数学方法。

从根本上说，概率论和统计学是交织密切联系着的，没有对概率意义的理解，就无从讨论统计学，只有有了概率的有关知识，才能解释统计的有关结论。在讨论、阐述统计内容或方法时，我们将会明确看到，很多统计程序无不涉及抽样的理论。例如为了确定某批种子的发芽率，通常采用的方法是从这批种子中抽出一部分种子作为样本来检验，并用样本的发芽率来估计整批种子的发芽率。类似此种课题的研究正构成了数理统计中关于估计与检验的两类内容。读者一定会问：用样本资料或数据去估计或检验所研究对象的全体是否可行？是否可靠？确实，样本总是受随机变动影响的，不同的抽样可能得到不同的结果，所以我们就很有必要来研究、讨论各种结果出现的“可能性大小”以为我们根据样本情况推断整批种子情况提供必要的理论依据，而这种研究、讨论正是概率论的任务，只有利用概率论，才能从数字上表述清楚在所得结论中不可避免的不确定性。

鉴于数理统计的最突出的特点，是它与大量的实际问题有极密切的联系，它的许多基本概念都有十分明确的实际背景和实际意义，它的许多基本方法都能用来解决实际问题，它的重要概念、方法和理论的提出和发展都直接依赖于实际问题和实际应用。因此，学习概率论的有关知识务必注意与数理统计的联系，借助于直观的基础概念来展开讨论，不过于强调或把精力集中于数学上的严谨性，以避免把概率论等同于一般纯粹数学的倾向。当然一些必要的理论包括一些论证必须具备，但更多的精力与时间应着重于基本概念和问题的条件、思路的清楚，善于分析和解决问题，明确统计思想和实际意义，真正把概率统计的学习与专业知识，应用研究以及实际应用经常地、有机地联系结合起来。

编写本教材的过程中得到符伍儒先生的鼓励、支持与关心，采用了符伍儒先生主编的原教材的部分例题；并由付建仁同志编写了习题；付建仁、王元生同志绘制了图；北京林业大学印刷厂的同志给予大力的支持与帮助，对此表示衷心的感谢。

本教材力求做到科学性、系统性、逻辑性并能便于自学，附录部分也是供读者参阅。但由于编者水平所限，缺点与不足之处一定不少，恳请同志们批评指正。本人发自内心的深表感激。

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机试验与样本空间

对于一个试验，如果可以预先知道它的所有可能结果，而且试验可以在相同条件下重复地进行，但在每次试验中事先不能准确地预言它会出现哪一种结果，那么称此试验为随机试验，简称试验，记作E。

我们就是通过研究具有上述特性的试验来进一步研究随机现象的。

例1—1　一个口袋中装有红、白、黑三种颜色的球，从口袋中随机任取一只，观察其颜色。

在概率论中常会遇到“从n个球中随机地抽取一球”之类的说法，其真实的含意应是n个球中的每一个球被取到的“机会均等”或“一视同仁”，任何形式的偏见或主观愿望不能也不应该起作用。在林业调查设计工作中经常采用抽样调查方法，即抽取样本进行分析研究，其目的是通过样本来推断总体的规律性。在整个进行过程中，就需要充分贯彻随机原则。此话说起来容易，但要切实做到也并非易事，首先也是重要的一点是从决策者到实际调查工作者都需要自始自终坚持实事求是的科学态度，决不弄虚作假，也不强加主观意愿和偏见，以求准确、客观地反映实际情况，其次当可在具体抽样方法予以体现。譬如，上面的问题中，n个球的大小一样，轻重一样，质量一样就颜色不同，抽取者并不能凭直觉一接触到球就感到将出现某种颜色的球，那么可以把n个球放在袋中摇几下，然后任取一只即可，如果n个球或n个球中有某几个球大小、轻重甚至质量根本不一样，则用以上方法就不尽合理了，此时可将n个球标上号码，再另制一套号签其数目与球数相等，然后将号签混合并均匀地搅拌，再由抽取者任意抽出一个号签，这样“随机性”，“一视同仁”相对来说似得到一定的保证。

例1—2　投掷一枚分币观察正面（国徽朝上），反面出现的情况（分币是匀称的，放在手心上，用一定的动作往上抛，分币自由、平整地落在具有弹性的桌面上，并称上述这些条件为条件组s）又投掷两次分币观察其正、反面出现的情况。前者简单，有只有两种可能结果，“正面”或“反面”，后者似较复杂些，但能也只能是以下四种可能结果：“正、正”，“正、反”，“反、正”，“反、反”中的一种。显然，两者都是满足随机试验特性的随机现象。

例1—3　设有一小片油松，白皮松混交林共978株，其中油松617株，白皮松361株，林木胸径最小者为7.8cm，最大者为29.3cm，随机地由该小片林地上抽取一株林木进行观察，可以是“所观察的林木为油松”，“所观察的林木为白皮松”，所观察的林木的胸径大于20cm”等多种可能结果。

通常，在一个随机试验中，它的每一个可能出现的结果（最基本的不能再分）称为这个

随机试验的基本事件或样本点，记作ω。

而将随机试验中基本事件的全体或样本点所组成的集合称为该随机试验的样本空间。记作Ω。

显然Ω中的样本点（或元素）就是E中的基本事件，而且是由试验的内容所确定的，有的简单，有的比较复杂。在例1.1中，如令

$\omega_1=$“红球”，$\omega_2=$“白球”，$\omega_3=$“黑球”则

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

如设袋中有若干球，又将球自1到n编号，E为在袋中任取一球观察其号码，令

$\omega_1=$“号码为1的球”

$\omega_2=$“号码为2的球”

⋮

$\omega_n=$“号码为n的球”

则

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\cdots\cdots\omega_n\}$$

又如在例1—2中，前者的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$$

其中 $\omega_1=$“正面”，$\omega_2=$“反面”。

而后者的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

其中$\omega_1=$“正、正”，$\omega_2=$“正、反”，$\omega_3=$“反、正”，$\omega_4=$“反、反”且记号“、正反”表示第一次为正，第二次为反。

例1—4 袋中有五个球（三白、二黑），从中随机地取两个，为清楚起见，可把五个球编号如下：

白球为1，2，3号，黑球为4，5号

则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$$

其中 $\omega_1=$“1、2”，$\omega_2=$“1、3”，$\omega_3=$“1、4”，

$\omega_4=$“1、5”，$\omega_5=$“2、3”，$\omega_6=$“2、4”，

$\omega_7=$“2、5”，$\omega_8=$“3、4”，$\omega_9=$“3、5”，

$\omega_{10}=$“4、5”。

即由十个基本事件所组成的样本空间，除此以外不可能有别的什么结果，而且进行一次抽取能只能是上述十个事件中的一个出现。从直观上请再注意到：发生“全白”，“一白一黑”，“全黑”的“可能性大小”不尽一样，平均来说出现“一白一黑”的结果要比出现“全白”或“全黑”的可能性要大，而发生“全白”的可能性也要比“全黑”稍大些。

§1.2 随机事件、必然事件、不可能事件

如果在随机试验中，就一次试验而言可能出现，也可能不出现而在“大数次”重复试验中具有某种规律性的事情称为该随机试验的随机事件，简称事件。一般用A，B，C，D……表示，以

上提到的例题都是属于这类随机事件，还有像“记录某地一昼夜的最高温度(℃)和最低温度(℃)”，“某地区的年降雨量”，“同令、同树种的胸径与树高”，“植树造林成活的株数”，“一定条件下落叶松种子的发芽率”，“一批灯泡中任意取一只，测试它的寿命”，“单位时间里某电话交换台收到的呼唤次数”，“打靶射击时，弹着点离开靶心的距离”以及“明年“三八”国际妇女节北京地区是下雨吗？”凡此种种都是有其不确定的一面即在一次试验中是否发生，我们虽然不能预先得知，是无规律的，但在一定条件下的反复试验中也就是对大量性质相同的随机现象是可以发现其中规律的，正如恩格斯所说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”（《马克思恩格斯选集》第四卷，243页）这种单独一次的不确定性和累积结果的统计规律性常常出现于客观现实中，出现于自然现象，生产实践，科学研究以至于社会，经济，日常生活的各个领域中。科学研究的任务就在于要从看起来是错综复杂的偶然性中去揭露出潜在的必然性即在大量随机现象中去发现事物的客观规律性。明显的事实是我们所关心的也决不是一次或个别的现象，而正是立足于寻求、探索、研究长期和大量试验结果中变化发展的趋势和稳定的情况，以便从中找出规律性的东西，并且能够用数量表示出来，总之，随机事件是可以认识的。

在具体问题中，我们感兴趣的是试验可能出现的结果，如前所述这些结果谓之试验的基本事件或样本点，其全体构成样本空间。如果我们把Ω也作为一个事件，由于在每次试验中一定会发生Ω中的某个或若干个基本事件，所以Ω必然发生，常把Ω作为必然事件或称随机试验中必然会发生的事情为必然事件，又称随机试验中必定不会发生的事情为不可能事件，记作φ。分析来看必然事件与不可能事件可以说是一种确定性现象，而且它们之间也有着紧密的联系，如果在一定条件下某个事情是必然事件，那么在同样条件下这个事情的反面就必然是不可能事件，反过来也是一样的。但为了讨论问题的方便起见，可将必然事件和不可能事件都视为随机事件，它们都是随机事件的特例。从人类的大量实践活动证实，所遇到的事件，一般都是随机事件。

§1.3 事件间的关系及运算规律

客观实际中随机现象是经常、普遍发生的。它可以是不同属性的，如投掷硬币出现的是“正面”还是“反面”，统计初生婴儿是“男孩”还是“女孩”。也可以是数量性的，如“植树造林成活的株数”，“种子的发芽率”“某小片林地的病腐木株数”；可以是单一性的，如工厂检验产品的质量观察其结果是“合格”还是“不合格”，掷一颗骰子可以是“1点”，“2点”，“3点”，“4点”，“5点”，“6点”中的任一点；也可以是多重的，如产品检验除观察其结果是否合格外，还同时观察其合格或不合格时的重量、尺寸等；实际问题中还可以经常看到一个样本空间中包含多个随机事件，有的简单有的则比较复杂，如掷一颗骰子既可以是上面所说的出现六个点中的一个点这种不可再分的基本事件，也可以是出现诸如“偶数点”或“奇数点”这种由基本事件复合而成的事件。概率论的重要研究课题之一，正是想从基本事件发生的“可能性大小”来推算出复合事件发生的“可能性大小”或者需要我们同时考察几个在相同条件组S下的事件以及它们之间的联系，因此如何把复杂事件分解成若干比较简单的事件，从而进一步分析事件间的关系定会有助于我们进一步认识

事件的本质，并能简化计算过程。

〈1〉事件的包含与相等

定义 设有事件A与B，如果"A发生必导致B发生"则称事件B包含事件A或A为B的特款，记作$A\subset B$或$B\supset A$。

例1—5 一个口袋中有十个完全相同的球，并标以号码1，2，……10，从中随机抽取一球，如令

i＝"取得球的标号为i"

A＝"球的标号为4"，

B＝"球的标号为偶数"

则

$\Omega=\{1，2，3\cdots10\}$且发生A意味着发生B即A是B的特款或B包含A，所以有$B\supset A$或$A\subset B$。

关于A与B之间的包含关系，如结合集合论并辅之以几何图形的说明，更显直观。可设Ω为一个正方形，圆A与圆B分别表示事件A与事件B，则$A\subset B$或$B\supset A$如图1—1所示。显然，"A发生导致B发生"意味着A中的每一个样本点必属于B"即A中的点全在B中，而A，B是Ω的两个子集。

定义 如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B相等，记作$A=B$。

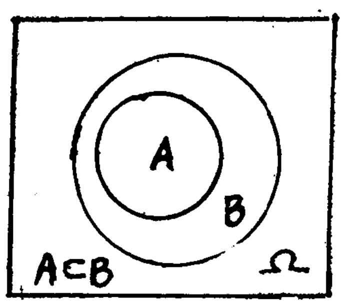


图1—1

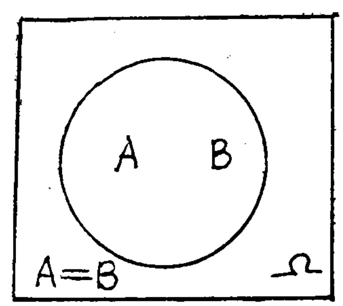


图1—2

例1—6 从某一批零件中连取两件，如令

A＝"至少抽到1件次品"

B＝"抽到了次品"

∵ $A\subset B$且$B\supset A$

∴ $A=B$

由此可见，所谓"$A=B$"是指事件A与B中任一事件的发生必导致另一事件的发生或者说A，B中含有相同的样本点，它们总是同时发生或同时不发生，而实际上A，B是同一个事件。如图1—2所示。

〈2〉事件的和

例1—7 甲、乙两射手，各向一目标射击一次，如令

A＝"甲射中而乙未射中"

B＝"甲未射中而乙射中"

C＝"甲、乙都射中"

D＝“甲、乙都未射中”

E＝“目标命中”

则E的实现取决于A、B、C中有一个发生即可。

定义 通常我们把“A，B中至少有一个发生”的事件称为A，B两事件的和或A，B的和事件，记作A＋B，如图1—3的阴影部分所示

显然，和事件A＋B表示事件A发生或事件B发生或A，B两者都发生，也表示至少属于A或B中的一个所有样本点的集合。

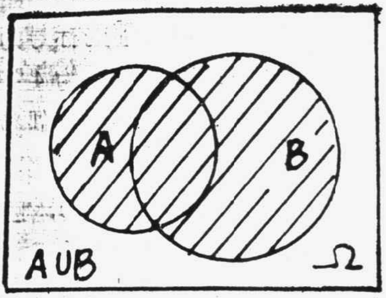


图1—3

上述事件的求和可以推广到二个以上的任意有限个以及可列个事件的情形，如例1—7中，事件E可表示为A＋B＋C，一般的

称“事件A_1，$A_2 \cdots A_n$至少有一个发生的事件为A_1，$A_2 \cdots A_n$这n个事件的和，记作$A_1+A_2+\cdots+A_n$，简记作$\sum_{i=1}^{n} A_i$

称“事件A_1，$A_2 \cdots A_n \cdots$至少有一个发生”的事件为A_1，$A_2 \cdots A_n \cdots$这可列个事件的和，记作$A_1+A_2+\cdots+A_n\cdots$，简记作$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$。

例1—8 在矩形Ω中任取一个矩形作为A，把A等分为左右两部分，取左面部分为A_1；把右面部分再等分为左右两部分，取左面部分为A_2；，把余中的右面部分再等分为两部分，取左面部分为A_3；……依次继续做下去就得到区域A_1，$A_2 \cdots A_n \cdots$如图1—4所示，现问矩形Ω内任投一点，如令

A_i＝“所投点落在区域A_i中”

A＝“所投点落在区域A中”

则显然有

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

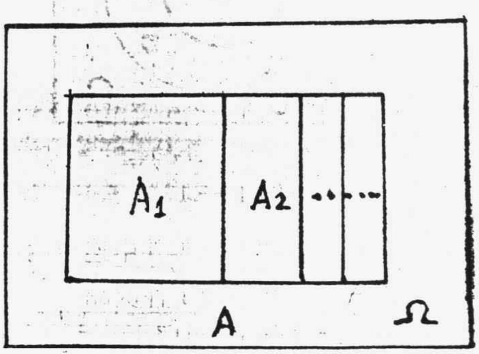


图1—4

〈3〉事件的积

例1—9 检验某一批圆柱形产品是否合格时的主要标志是视该圆柱体的:“长度”及“直径”是否合格，如令

A＝“产品合格”

B＝“产品不合格”

C＝“直径合格”

D＝“直径不合格”

E＝“长度合格”

F＝“长度不合格”

则显然有D⊂B，F⊂B，因为D的发生或F的发生必然导致B的发生，于是B可表示为D＋F，而A的实现，必须是C及E都发生。

定义 通常我们把“A，B都发生”的事件称为A，B这两个事件的积，或A，B的积事件，记作AB，如图1—5阴影部分所示。

显然，事件的积也可以推广到有限个及可列个事件的情形，一般的称“事件A_1，$A_2\cdots A_n$都发生的事件为A_1，$A_2\cdots A_n$这n个事件的积，记作A_1，$A_2\cdots A_n$，简记作$\prod_{i=1}^{n} A_i$

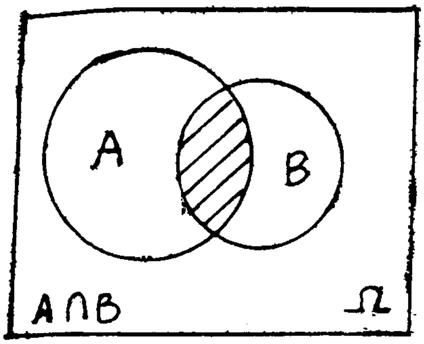


图1—5

称事件A_1，$A_2\cdots A_n\cdots$都发生”的事件为$A_1A_2\cdots A_n\cdots$这可列个事件的积，记作$A_1A_2\cdots A_n\cdots$，简记作$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$。

〈4〉**事件的差**

例1—10 甲、乙两射手，向同一目标射击，如令

A＝“甲射中”

B＝“乙射中”

C＝“甲射中而乙未射中”

D＝“甲未射中而乙射中”

则C的实现意味着A发生而B不发生，同样D的实现意味着B发生而A不发生。

定义 通常我们把“A发生而B不发生”的事件称为事件A与B的差，记作A－B，如图1—6阴影部分所示。

同样，把“B发生而A不发生”的事件称为事件B与A的差，记作B－A，如图1—7

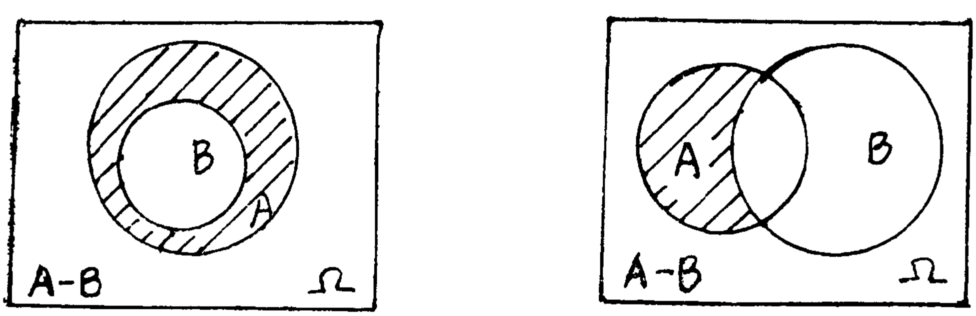


图1—6

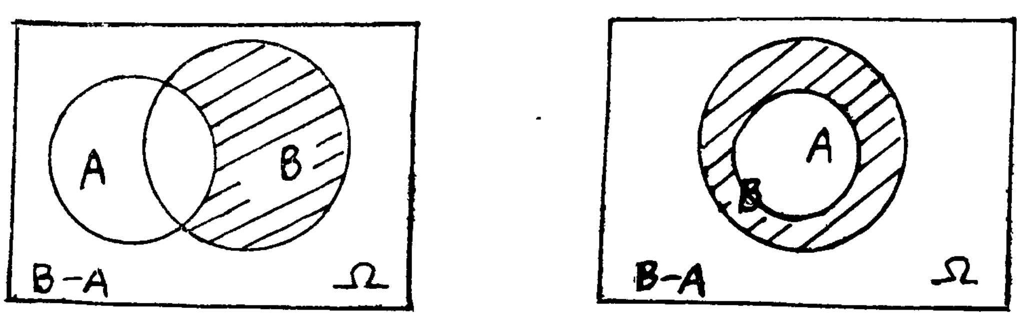


图1—7

阴影部分所示，

于是例1—10中的C，D可分别表示成$C=A-B$，$D=B-A$

例1—11 在标以号码1，2，3，4，5，6的六个号签中，随机地抽取一个号签，如令

A＝“号签的标号为偶数”

B＝“号签的标号为2”

则C＝“号签的标号为4，6”＝$A-B$

〈5〉互斥事件（或互不相容事件）

定义 如果事件A与B在同一次试验结果中不可能都发生，则称A与B这两个事件为互斥事件（或互不相容事件）一般记作$AB=\phi$，如图1—8所示。

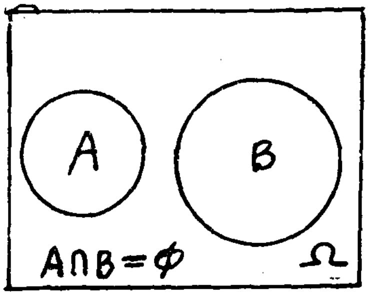


图1—8

通常，两事件是否互斥可根据试验的条件进行判断，具体情况具体分析，如在例1—3中，如令

A＝“所观察林木为白皮松”

B＝“所观察林木为油松”

则随机抽取一株，A与B显然是互斥事件，如果进而设油松与白皮松两树种的林木中都有胸径大于20cm的林木，如令

C＝“所观察林木的胸径＞20cm”

D＝“所观察林木的胸径＜15cm”

则C与D仍是互斥事件。但B与C就不是互斥事件，A与C也不是互斥事件，统称它们是相容事件（即在同一试验结果中有可能“都发生”的事件）

关于事件的和与事件的积的记法说明一下：有些教材一般把A，B为互斥时记事件的和为$A+B$，事件的积为AB；当A，B不是互斥事件时记事件的和为$A\cup B$，事件的积为$A\cap B$，本教材为书写方便及易看起见，一律把事件A与B的和记为$A+B$，把事件A与B的积记为AB。

〈6〉互斥事件的完备群（系）

两个事件的互斥性，可以推广到两个以上的事件中去，但必须注意试验条件以及满足互斥性的基本要求，如在例1．3中用符号ξ表示“所观察林木胸径”，则“$12cm\leq\xi<16cm$”，“$16cm\leq\xi<20cm$”以及“$20cm\leq\xi<24cm$”这三个事件是两两互斥的，但“$12cm\leq\xi\leq16cm$”，“$16cm\leq\xi\leq20cm$”以及“$20cm\leq\xi\leq24cm$”，这三个事件就不一定两两互斥了，除非已知该小片林地上的978株林木中，没有胸径恰好等于16cm与20cm的林木。一般的，如果A_1，$A_2\cdots A_n$这n个事件中的任何两个事件在同一次试验结果中不可能都发生（即$A_iA_j=\phi$，$i,\ j=1,\ 2\cdots n,\ i\neq j$）则称$A_1$，$A_2\cdots A_n$这n个事件两两互斥或两两互不相容。又由于试验结果中这n个事件中必定会有一个事件发生，因此通常又把两两互斥且必发生其中之一的n个事件A_1，$A_2\cdots A_n$称为互斥事件的完备群（或互斥事件的完备系），显然要满足

（a）$A_iA_j=\phi$，$i,\ j=1,\ 2\cdots n,\ i\neq j$

（b）$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

〈7〉**等可能完备群**

如果试验时，存在某种匀称性，对称法，对等性的条件，使得若干随机事件中每一个事件发生的可能性相等，则称这些事件为等可能事件（或等概事件）。如在例1.4样本空间有十个基本事件组成，每一个基本事件CO$_i$（$i=1$，$2\cdots10$）发生的机会相同（等可能性）但在任一次抽取中ω_i（$i=1$，$2\cdots10$）至少有一个发生（完全性），也至多有一个会发生（互斥性）这样的等可能性，完全性，互斥性构成了ω_1，$\omega_2\cdots\omega_{10}$这十个基本事件组在这个问题中的等可能互斥完备群简说成等可能完备群。

定义　称具有以下三条性质的事件组A_1，$A_2\cdots A_n$为一个等可能完备群或等概基本事件组

（a）等可能性：A_1，$A_2\cdots A_n$发生的机会均等。

（b）完全性：除了A_1，$A_2\cdots A_n$这n个事件外，再没有别的什么结果，且在任一次试验中总有其中一个事件要发生。

（C）互斥性：A_1，$A_2\cdots A_n$这n个事件两两互斥，且在任一次试验中至多有一个发生。

其中任一事件A_i（$i=1$，$2\cdots n$）称为基本事件。

〈8〉**对立事件（或逆事件）**

定义　设A是一个事件，则我们把"非A"或"A不发生"这样的事件称为A的对立事件或A的逆事件，记作$\overline{A}$，如图1—9阴影部分所示。显然，对于A与$\overline{A}$满足

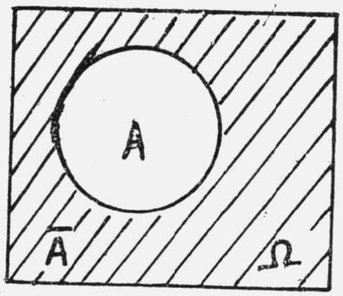


图1—9

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ A\overline{A}=\phi\\(b)\ A+\overline{A}=\Omega\end{array}\right\}\text{互逆律}$$

$$(c)\ \overline{\overline{A}}=A\ \text{（两次求逆律）}$$

这是因为在一次试验中，A和$\overline{A}$不会都发生即A和$\overline{A}$是互斥的，所以满足（a）；又A，$\overline{A}$至少有一个发生即A和$\overline{A}$构成了互斥事件的完备群所以满足（b），至于（c）则由上述对立事件的定义直接推知，同时说明A和$\overline{A}$是互为对立的即$\overline{A}$是A的对立事件而A也是$\overline{A}$的对立事件，哲学上谓之"否定之否定"。

有一点提醒一下，那就是对立事件一定是互斥事件，但反之则不然，这只需举出下面一例说明即可。

例1—12　设一个口袋中含有编号分别为1，2…n的n个球（n＞2的正整数），任取一球，如令

A＝"取得1号球"

B＝"取得偶数号球"

则A与B是互斥事件是无疑的，但$\overline{A}$＝"取得的球的号数为2，3…n中的一个数"，显然它并不是B。

引进了对立事件的定义后，差事件可化为积事件，如$A-B=A\overline{B}$，$B-A=B\overline{A}$。

〈9〉**事件的运算规律**

事件的求和、求积运算满足结合律、交换律及分配律，兹分别列出于下：

(a) $A+B=B+A$ (加法交换律)

(b) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (加法结合律)

(c) $AB=BA$ (乘法交换律)

(d) $(AB)C=A(BC)$ (乘法结合律)

(e) $A(B+C)=AB+AC$ (第一分配律)

(f) $A+BC=(A+B)(A+C)$ (第二分配律)

显然，前五个正是数的加法和乘法的运算规律，而最后一个只对事件运算成立，对集合的运算也成立，但对数的运算却不成立。还有在事件运算中若$A\subset B$，则$A+B=B$，$AB=A$称为吸收律，特殊有

$$A+\Omega=\Omega,\qquad A+\phi=A,\qquad A\Omega=A,$$

$A\phi=\phi$及$A+A=A$，$AA=A$（后两个称为重迭律）这些和数的运算完全不同。

利用事件间的关系及运算规律，能通过一些事件表示出另一些事件，还可以对事件的算式进行化简。

例1—13 设A，B，C是Ω中的三个随机事件，则

事件“A，B，C都发生”可表示为：ABC；

“A，B，C都不发生”可表示为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

“A，B，C不都发生”可表示为：$\overline{ABC}$；

“仅A发生”可表示为：$A\bar{B}\bar{C}$或换一种说法“A发生而B与C都不发生”也可表示为：$A\bar{B}\bar{C}$或$A-B-C$或$A-(B+C)$

“A与B都发生而C不发生”可表示为：$AB\bar{C}$或$AB-C$或$AB-ABC$

“A，B，C中至少有一个发生”可表示为：$A+B+C$或$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C$。$+ABC$

“A，B，C中至少有二个发生”可表示为：$AB+AC+BC$. $+ABC$

“A，B，C中恰有一个发生”可表示为：$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$

“A，B，C中恰有二个发生”可表示为：$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$。

“A不发生，而B，C中至少有一个发生”可表示为：$\bar{A}(B+C)$。

例1—14 化简

(1) $(A+B)(A+\bar{B})$

(2) $(AB)(\bar{A}\bar{B})$

解 (1) $(A+B)(A+\bar{B})$

$=(A+B)A+(A+B)\bar{B}$

$=AA+BA+A\bar{B}+B\bar{B}$ (第一分配律)

$=A+BA+A\bar{B}+\phi$ (重迭律、互逆律)

$=A+BA+A\bar{B}$ (吸收律)

$=A$ (吸收律)

(2) $(AB)(A\overline{B})$ (乘法交换律、结合律)

$= (AA)(B\overline{B}) = A\phi = \phi$ (重迭律、互逆律)

§1.4 概率的定义及性质

概率统计的研究对象是随机现象。这种现象既不能用因果"关系"加以严格控制和准确预测，也不能用一些简单的物理定律加以概括，而必须从大量观察中综合分析研究并找出规律性。

概率 作为机会和可能性的一种计量，确实是进一步研究随机现象的重要概念之一，因为研究随机现象不仅要知道它可能发生那些事件，更重要的是研究并能得出各种事件发生的"可能性大小"，以利于我们认识问题，找出事件的内在统计规律进而解决问题。

对于事件发生的"可能性大小"要想确切的推断，得出精确结论看来是有困难的只能大概地进行比较，事实上"绝对的""百分之百"之类的结论反而是不科学的。在观察一个随机试验的各种事件的过程中，一般说来总会发现有些事件发生的可能性彼此大致相同，有些事发件生的可能性大些（显然必然事件最大），有些事件发生的可能性小些（显然不可能事件最小而等于零），而我们要求的是有一个刻划事件发生可能性大小的数量指标。在数学用语中，概率这个词的意义是用定义建立起来的，它应该是事件本身所固有的一种客观度量而与任何形式的主观愿望是不相容的。在概率论发展史上，尽管人们针对不同的问题从不同的角度给了定义概率和计算概率的各种方法，但遗憾的是所定义的事件的概率都有一定的局限性与不足之处，而作为一种计算事件的概率的方法则是毋庸置疑的。为使读者对概率的概念特别是其结论有一个正确的理解，请先看下例。

例1—15 设有一大批种子的发芽率为0.80，那么从此批种子中随机抽取100粒，一定有30粒是发芽的，此种结论是否有问题？为什么？

回答上述问题，有的说"对"，有的说"不对"，尤为重要的是各自都要说出理由。因此需要分析一下：首先100粒种子是从一大批种子中随机抽取的，那就存在这样的可能，100粒全为发芽，100粒中有99粒发芽，100粒中有98粒发芽……100粒中有1粒发芽，100粒全不发芽共101种情况，能且只能出现其中的一种情况，故说100粒中一定有80粒发芽是对的回答显然过于确定，错就错在"一定"两字上，这种回答实质上是对事件发生的"可能性大小"沿用了确定性的数学方法，排斥了其它100种情况，所以是错误的。类似地在上面讨论中我们经常提到的投掷匀称的硬币为例，由于硬币两面是对称的，所以发生"正面"与"反面"的可能性都一样，人们有理由认为发生"正面"或发生"反面"的"可能性大小"都是1/2但是如投掷100次是否恰好发生"正面"50次，发生"反面"也是50次呢？显然这就不一定。又如高考录取率为1/10，采用统考、推荐择优录取的办法，那么是否每个考生所在的学校或单位都有1/10的学生或报考人员被录取进入大学呢？过去十年的实践乃至于今后的情况都将表明并非如此。

但是如果把上述问题中的"一定"改为"可能"或"平均"这样的说法是否对呢？由于随机抽取100粒可能有80粒发芽这个结论是101种可能情况之一，所以改为"可能"显然是对

的，但这种回答不能令人满意。如用"平均"两字代替"一定"，就较恰当了"平均"两字平时见得很多，用得也不少。不过在这里用"平均"两字还应该进一步分析，（在概率论中对"平均"有它的严格定义，这在第四章讨论随机变量的数字特征中引进关于随机变量的数学期望时就会确切地易于理解）也就是说，如果我们的回答是在发芽率为0.80的一大批种子中随机抽取100粒，平均地有80粒发芽，其确切含意应该是：假定我们抽取n次，每次抽100粒，相应地得到一个发芽粒数，设第i次抽得的发芽粒数为m_i，$i=1, 2\cdots n$，将这n次所得的发芽粒数总加起来，再除以n，即$(m_1+m_2+\cdots+m_n)/n$，便得到这n次中平均每次抽到的发芽粒数，n很大时，则$m_1+m_2+\cdots+m_n/n$应与80相近。

〈1〉古典概型　概率的古典定义

古典概型是概率论发展史上较早研究的一种直接计算事件的概率的方法，是法国数学家拉普拉斯(1749—1827年)总结前人的经验提出的，明确规定一个事件A的概率P（A）等于使事件A能实现情形的总数与所有可能情形的总数之比，不过需假定所有可能情形都是以相等机会发生的。因此适用于"对称性"，"匀称性"，"对等性"这种等可能的数学模型即充分利用在某些特殊情形下人类长期积累的关于研究对象的物理或几何性质具有的对称性来确定计算概率的一种方法，归纳起来它的特点有二：

（1）有限性：试验可能结果只有有限多个或者说样本空间只含有限多个基本事件。

（2）等可能性：各个试验可能结果具有等可能性或者说各基本事件发生的可能性相等。

定义　设$\omega_1, \omega_2\cdots\omega_n$构成等可能完备群（或等概基本事件组），如果事件A含有K个基本事件，则事件A的概率等于事件A的基本事件数K与基本事件总数n的比值，记作

$$P(A)=\frac{K}{n}=\frac{A\text{中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

称这种概率定义为概率的古典定义，由于$\omega_1, \omega_2\cdots\omega_k$的发生必导致A的发生，也就是说它们的发生对A的发生"有利"，因此上述定义也可以说成是：事件A的概率等于"有利"于A发生的基本事件数K与基本事件总数n比，记作

$$P(A)=\frac{K}{n}=\frac{A\text{的有利基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

易见，在古典概型中，事件A的概率是一个分数，解决这类问题在于把n和K分别求出，具体计算时，分母n一般较易求得，关键在求分子K。在许多场合下，都需用到有关排列、组合的知识，，而且要有一定的计算技巧。在利用古典概型求一个事件的概率的整个过程中，一要认清基本事件总数和有利于事件数的计算务必在同一个样本空间中进行，二要慎重判断"等可能性"，三要结合题意善于设好事件，四要对题意作全面的、具体的分析，不要"想当然"猜测答案，不要粗枝大叶，遗漏或随意增加条件，力求掌握一些最基本的计算方法。

例1—16　试根据不同的抽取方式，确定下列随机试验中的样本空间。

（1）一个包中有四个大小质地相同的四个签，分别标以1，2，3，4号码，第一次取签后放回包中再作第二次取签，记录两次取签的所有可能结果。（上述这种有放回的抽取，概率统计中谓之重复抽样抽取方式。）

（2）将（1）的取签方式改为第一次取签后，不放回包中，再从包中任取一签，记录

两次取签的所有可能结果。（上述这种没有放回的抽取，概率统计中谓之不重复抽取方式。）

（3）按（2）的取签方式改为一次从包中任取两个签，记录取球的所有可能结果。

（4）按（2）的取签方式改为从包中一个接一个地取签，直到取到一号签为止，记录取签的所有可能结果。

解：（1）先分析一下：由于第一次取签后再放回包中作第二次取签，因此两次取得的标号可以相同（即可以重复），也可以不相同

如用（1，1）表示第一次取得1号签，第二次取得1号签；（2，3）表示第一次取得2号签，第二次取得3号签，…其余可类似理解，则样本空间$\Omega_{(1)}$可表示为：

$$\Omega_{(1)}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

共计$4^2=16$个试验结果。若为n个号签也是记录两次取签结果，则为n^2。

（2）也分析一下：（2）与（1）的区别在于两次取得的签的标号不能重复，则样本空间$\Omega_{(2)}$可表示为：

$$\Omega_{(2)}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

共包括$A_4^2=4\times3=12$个试验结果，若为n个号签也是记录两次取签结果，则为$A_n^2=n(n-1)$。

（3）再分析一下：（3）与（2）的取签方式都是不重复抽样方式，但区别在于（3）取得的两个签没有先后顺序，如用“1，2”表示取得1号签和2号签（“2，1”同样是表示取得1号签和2号签。），其余如“2，3”…可作类似理解，则样本空间$\Omega_{(3)}$可表示为：

$$\Omega_{(3)}=\{“1,2”,“1,3”,“1,4”,“2,3”,“2,4”,“3,4”\}$$

共计$C_4^2=\dfrac{4\times3}{2}=6$个试验结果。若为n个号签，也是记录一次取签两个结果，则为

$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2!}$。

（4）此类试验的特点似比前几个要稍复杂些，分析起来，一是连续取得的签的标号不可能重复，每次取签包中的每一个签都可能被取到，二是只要取到1号签试验就告结束，即每一次试验最后取到的必是1号签，也为清楚又简单起见，如用（2，3，1）表示依次取得的签的标号为2，3，1，其余如（1），（2，1）……可类似地理解，则样本空间$\Omega_{(4)}$可表示为：

$$\Omega_{(4)}=\{(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),(3,4,1),(3,2,1),(4,2,1),(4,3,1),(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}$$

共包括$1+A_3^1+A_3^2+A_3^3=1+3+3\times2+3\times2\times1=16$个试验结果