东方龙文化
—考研系列

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题名家解析

理工数学二

全国考研数学辅导专家组 组编

黄先开 曹显兵 施明存 殷先军 编写

朝華出版社

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题

名家解析

理工数学二

2006

朝華出版社

图书在版编目(CIP)数据

理工数学二/黄先开等编.—北京:朝华出版社,2005.3
(全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析)
ISBN 7-5054-1166-7

Ⅰ.理... Ⅱ.黄... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第009582号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析:理工数学二

编　　著　黄先开等

策划编辑　田　辉　谭隆全
责任编辑　韩文燕
责任印制　赵　岭
封面设计　东　方

出版发行　朝华出版社
地　　址　北京市车公庄西路35号　　　**邮政编码**　100044
电　　话　(010)68433166(总编室)
　　　　　　(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415258(发行部)
印　　刷　北京印刷一厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092毫米　1/16　　　**字　　数**　370千字
印　　张　15
版　　次　2005年3月第1版　第1次印刷
版　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-1166-7/G·0565
定　　价　22.00元

出版说明

历届考题就是最好的模拟试题。因为，**历史是一面镜子**。懂得昨天，才会明白今天；掌握了历史和现实，才能驾驭未来。

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活**的特点。首先，汇集了 1990～2005 年数学，1999～2005 年政治理论，1995～2005 年英语的历届研究生入学考试试题，包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共 6 册；其次，真正做到了逐题解析，分析详尽，解答规范，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，另外针对近几年的考题，做到先是分析——解题的基本思路、方法，然后是详解——详细、规范的答题过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有 19 年，共命制试卷 100 余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过 10 届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如：**2005** 年数学一第一大题第(3)题与 1991 年数学一第三大题第(2)题，**2005** 年数学一第一大题第(4)题与 2004 年数学一第三大题第(17)题，**2005** 年数学一第(16)题与 1990 年数学一第四大题，**2005** 年数学一第(20)题与 1996 年数学一第九大题，**2005** 年数学一第(22)题与 1991 年数学一第十一大题，**2005** 年数学二第(5)题与 2003 年数学二第一大题第(1)题，**2005** 年数学二第(8)题与 1994 年数学一第一大题第(4)题，**2005** 年数学二第(22)题与 2004 年数学四第二大题第(9)题，**2005** 年数学三、四第(4)题与 2002 年数学三第一大题第(4)题，**2005** 年数学三第(18)题与 2003 年数学三第六大题，**2005** 年数学四第(21)题与 2001 年数学一第十大题；2004 年数学一第(17)题与 1996 年数学一第四大题，2004 年数学一第(23)题与 1997 年数学一第十大题，2004 年数学一第(20)题与 2003 年数学三第九大题；2004 年数学一第(15)题与 1993 年数学一第六大题，2004 年数学一第(11)题与 1997 年数学一第八大题，2004 年数学一第(12)题与 1993 年数学一第二大题第

(5)题，2004 年数学二第(9)题与 2002 年数学二第一大题第(4)题，2004 年数学二第(22)题与 2003 年数学三第九大题，2004 年数学三、四第(18)题与 1992 年数学四、2002 年数学四第七大题，2004 年数学三第(19)题与 2002 年数学第七大题，2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三、四第九大题，2004 年数学四第(21)题与 1997 年数学三第十大题，2004 年数学一、三、四第(22)题与 2003 年数学四第十二大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在最近 2 **年**的数学考题中就有**多达** 20 **余道题**是与往届考题雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本套丛书按时间顺序成套题形式编排，目的是便于广大考生完成基础知识复习后进行模拟训练。尽管每题均有详尽规范的解答，但不希望读者轻易去查看答案和评注，而一定要自己先动手去进行演练。通过做成套的真题，一方面达到深化知识理解，提升思维水平的目的；另一方面可掌握做题节奏和调整考试心态。可能的话，相邀几个准备考研的朋友，一起在规定的三个小时之内真刀真枪地进行一番演习，刻意给自己制造一个紧张的气氛，去体会那种让人怦怦心跳的考试环境。通过对历年试题的真实模拟，把握好做题的节奏，分配好各部分的时间，从而不断提升自己的应试水平。

在每套题做完后，再回过头去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的思路和解答过程与书中的答案有什么异同，了解自己在基础知识、分析思路及求解推理过程中存在哪些不足，与前面已做过的题比较是否有了提高……等等，注意这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来后，在掌握基本概念、基本理论和基本方法上，在灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有一个质的提高。

由于时间比较仓促，难免还有不足之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

全国考研数学辅导专家组

目 次

1990 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是________.

(2) 设 $y = e^{\tan\frac{1}{x}} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$,则 $y' =$ ________.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx =$ ________.

(4) 下列两个积分的大小关系是:$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3}\,dx$ ________ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3}\,dx$.

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,则函数 $f[f(x)] =$ ________.

二、选择题(每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1} - ax - b\right) = 0$,其中 a、b 是常数,则

(A) $a = 1, b = 1$.　　(B) $a = -1, b = 1$.

(C) $a = 1, b = -1$.　　(D) $a = -1, b = -1$.

【　】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则 $d[\int f(x)dx]$ 等于

(A) $f(x)$.　　(B) $f(x)dx$.

(C) $f(x) + C$.　　(D) $f'(x)dx$.

【　】

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x) = [f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

【　】

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.　　(D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

【　】

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq 0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点. (B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点. (D) 连续点或间断点不能由此确定.

【 】

三、(每小题 5 分,满分 25 分.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求常数 a.

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a>0,b>0$).

五、(本题满分 9 分)

证明:当 $x>0$,有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

六、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

七、(本题满分 9 分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形.求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 之通解,其中 a 为实数.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题分析、详解及评注

一、填空题

(1) 曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t\end{cases}$上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是 $\underline{\quad y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}) \quad}$.

[分析] 利用参数方程求导得切线斜率.

[详解] 曲线上对应于$t=\frac{\pi}{6}$的点的直角坐标为$(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{8})$,对应于$t=\frac{\pi}{6}$点处的切线的斜率

$$k=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

因此对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 点处法线的斜率 $k'=\sqrt{3}$,

故曲线上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程为

$$y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}),\text{或 } y=\sqrt{3}x-1.$$

[评注] 本题考查参数方程求导及导数的几何意义.

(2) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}$,则 $y'=\underline{\quad -\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\tan\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}) \quad}$.

[分析] 利用复合函数求导数即可.

[详解] $y'=(e^{\tan\frac{1}{x}})'\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'$

$$=e^{\tan\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}(\frac{-1}{x^2})$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\tan\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}).$$

[评注] 本题考查复合函数求导数.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=\underline{\quad\frac{4}{15}\quad}$.

[分析] 式中含有$\sqrt{1-x}$,令 $t=\sqrt{1-x}$ 后,求积分,也可用凑微分法求积分.

[详解] 方法一:

令 $\sqrt{1-x}=t, x=1-t^2, \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=\int_1^0(1-t^2)t\cdot(-2t)\mathrm{d}t=\int_1^0 2(t^4-t^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{15}.$$

方法二：

$$\text{原式}=-\int_0^1(1-x-1)\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1[(1-x)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x}]\mathrm{d}x$$

$$=-[-\frac{2}{5}(1-x)\ |_0^1+\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\ |_0^1]=-(\frac{2}{5}-\frac{2}{3})=\frac{4}{15}.$$

［评注］　形如 $\int_a^b f(x,\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x$ 的积分，一般均先作变量代换 $\sqrt{cx+d}=t$.

(4) 下列两个积分的大小关系是：$\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x$ $\underline{\quad > \quad}$ $\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

［分析］　先比较区间上两函数的大小，再利用定积分的比较性质得答案．

［详解］　因为在区间$[-2,-1]$上，$\mathrm{e}^{-x^3}>\mathrm{e}^{x^3}$，根据定积分的性质知

$$\int_{-2}^{1}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x.$$

［评注］　本题考查定积分的比较性质．

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则函数 $f[f(x)]=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

［分析］　直接复合即可．

［详解］　$\because |f(x)|\leqslant 1, \therefore f[f(x)]=1.$

二、选择题

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，其中 a、b 是常数，则

(A) $a=1,b=1$.　　　　(B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=1,b=-1$.　　　　(D) $a=-1,b=-1$.

【　　】

［答］　应选(C)．

［分析］　求极限的反问题，由已知极限确定 a,b 的取值．

［详解］　由已知

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(a+b)x-b}{x+1}=0,$$

则必有

$$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases},$$

解得 $a=1,b=-1$.

［评注］　本题也可利用

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}(x-1+\frac{1}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}[(1-a)x+\frac{1}{x+1}-b-1]=0,$$

得 $a=1,b=-1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]$ 等于

(A) $f(x)$.　　　　(B) $f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $f(x)+C$.　　　　(D) $f'(x)\mathrm{d}x$.

【　】

[答]　应选(B).

[分析]　利用求导与积分的关系即可.

[详解]　$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=(\int f(x)\mathrm{d}x)'\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$

[评注]　一般地，$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x, \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.　　　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

【　】

[答]　应选(A).

[分析]　逐步求导得 n 阶导数的一般表达式.

[详解]　$f''(x)=(f'(x))'=2f(x)\cdot f'(x)=2[f(x)]^3=2![f(x)]^3,$

$f'''(x)=2\cdot 3[f(x)]^2\cdot f'(x)=2\cdot 3[f(x)]^4=3![f(x)]^4,$

一般地

$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}.$

[评注]　本题考查复合函数求高阶导数.

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

【　】

[答]　应选(A).

[分析]　直接按变限积分求导法求导即可.

[详解]　根据复合函数求导公式，有

$F'(x)=f(e^{-x})\cdot(-e^{-x})-f(x)\cdot 1=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$

[评注]　本题考查变限积分求导.

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0, f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点.　　　　(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.　　　　　　　　　(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【　】

[答]　应选(B).

[分析]　按定义讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

[详解]　由题设

$$F(0)=f(0)=0,$$

而　$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\neq 0=F(0),$$

即函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处存在极限,但极限值不等于该点的函数值,

所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点.

[评注]　若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A\Leftrightarrow f(x_0)=0, f'(x_0)=A$.

三、(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求常数 a.

[分析]　利用第二个重要极限求极限,再确定 a 的值.

[详解]　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

由题设 $e^{2a}=9$,得 $a=\ln 3$.

[评注]　"1^∞"型极限是考研的重要考点之一.

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

[分析]　利用隐函数求导即可.

[详解]　等式两边同时对 x 求导得

$$2y'-1=(1-y')\ln(x-y)+(x-y)\frac{1-y'}{x-y},$$

解得 $y'=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}$,

故　$dy=y'dx=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$.

[评注]　本题考查隐函数求导法.

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

[分析]　求 $f''(x)=0$ 的点,并确定其左、右两端 $f''(x)$ 的符号.

[详解]　$\because y'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, y''=2\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$.

令 $y''=0$,得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,且在 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的左、右两侧,y'' 变号,故 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)$ 是曲线的拐点.

[评注]　本题考查利用导数讨论函数的特性.

(4) 计算$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

[分析] 被积函数为两个不同类型函数的乘积,用分部积分法.

[详解] 原式$=\int \ln x \mathrm{d}(\frac{1}{1-x}) = \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}$

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C.$$

[评注] 本题考查不定积分的分部积分法.

(5) 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y + (y-\ln x)\mathrm{d}x = 0$ 满足条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}} = 1$ 的特解.

[分析] 按照线性微分方程的求解方法求解.

[详解] 将原方程化为标准式 $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$,其通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = (\frac{1}{2}\ln^2 x + C)\frac{1}{\ln x}.$$

由条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}} = 1$,代入上式得 $C = \frac{1}{2}$. 所以满足初始条件的特解为

$$y = (\frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2})\frac{1}{\ln x}.$$

[评注] 本题是求一阶微分方程解的常规题型.

四、在椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a > 0, b > 0$).

[分析] 先求出切线及与坐标轴的交点,所围图形的面积是动点(x_0, y_0)的函数,再由此确定 x_0、y_0.

[详解] 设 $P(x_0, y_0)$ 为所求点,则此点处椭圆的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

令 $x = 0$,得该切线在 y 轴上的截距 $\frac{b^2}{y_0}$.

令 $y = 0$,得该切线在 x 轴上的截距 $\frac{a^2}{x_0}$.

于是所围图形面积为

$$S = \frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0} - \frac{1}{4}\pi ab, x_0 \in (0, a).$$

设 $S_1 = x_0 y_0 = \frac{bx_0}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$,

因为 S_1 的极大值点即 S 的极小值点,为计算方便,求 S 的极小值点改求 S_1 的极大值点.

$$S'_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2-2x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}},$$

令 $S'_1=0$,解得在$(0,a)$内惟一驻点 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$,

由 S'_1 在 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 点处的左侧为正、右侧为负,知 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 为 S_1 的极大值点,即 S 的极小值点,所以当 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时,S 为最小,此时 $y_0=\frac{b}{\sqrt{2}}$,即 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 为所求点.

[评注] 本题考查由实际问题建立函数关系,并求函数的最值.

五、证明:当 $x>0$,有不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

[分析] 利用单调性证明不等式.

[详解] 设 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\quad(x>0)$,

于是有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0\quad(x>0),$$

所以 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调减少.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,所以当 $x>0$ 时,

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}>0,$$

即 $\quad\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

[评注] 利用单调性证明不等式是一种非常重要的方法,其它证明不等式的方法有中值定理、极值和最值以及凹凸性等.

六、设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

[分析] 为了便于合并,可对 $f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$ 先作倒代换:$t=\frac{1}{y}$.也可作辅助函数,先求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$ 的导数,再积分得 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

[详解] 方法一:

$$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{t=\frac{1}{y}}\int_1^x\frac{\ln y}{y(y+1)}\mathrm{d}y=\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t,$$

于是 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$

$$=\int_1^x\ln t\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t(1+t)}\right]\mathrm{d}t=\int_1^x\ln t(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2x.$$

方法二：

令 $F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$，则

$$F'(x)=f'(x)+f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})=\frac{\ln x}{1+x}-\frac{1}{x^2}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{x},$$

$\therefore\quad F(x)=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C,$

由 $F(1)=0$，知 $C=0$，

因而 $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$，即 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\ln^2 x.$

［评注］ 本题考查定积分的换元积分法和定积分的性质.

七、过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形.求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

［分析］ 先求切点，然后得切线方程，最后用旋转体的计算公式得旋转体的体积.

［详解］ 设过点(1,0)作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，切点为$(x_0,\sqrt{x_0-2})$.

由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$，且 $y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$，得切线方程

$$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0).$$

此切线过点(1,0)，即

$$0-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0),$$

得 $x_0=3$. 故斜率为

$$y'\Big|_{x=3}=\frac{1}{2},$$

切点是(3,1)，切线方程为

$$y=\frac{1}{2}(x-1).$$

于是 $V_x=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$

［评注］ 本题综合考查导数的几何应用和定积分的几何应用.

八、求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 之通解，其中 a 为实数.

［分析］ 本题的关键是注意特解 y^* 的设定形式与 a 的取值有关.

［详解］ 特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0,$$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，

故对应齐次方程的通解为

$$\overline{Y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

当 $a\neq-2$,即 a 不是特征根时,设原方程的特解为

$$y^*=Ae^{ax},$$

代入原方程,解得 $A=\dfrac{1}{(a+2)^2}$,

故特解为

$$y^*=\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax},$$

当 $a=-2$,即 a 是特征根时,设原方程的特解为

$$y^*=Ax^2e^{-2x},$$

代入原方程,解得 $A=\dfrac{1}{2}$,

故特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

综上所述,方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解为

$$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a\neq-2,\\ (C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-2x}, & a=-2.\end{cases}$$

[评注] **本题主要考查二阶线性常微分方程通解的求法.若齐次方程中含有参数,则应对参数的不同取值讨论特征根.若非齐次项中含有参数,则应对参数的不同取值讨论特解的形式.**