中华 学生科学探索丛书

数学
——新天地

上

主编／纪容起

SHUXUEXINTIANDI

内蒙古人民出版社

数 学 新 天 地

（上）

纪荣起　张平　主编

内蒙古人民出版社

目　　录

数学的历史

数学具有悠久的历史，是人们在生产劳动过程巾，逐渐积累起来的关于现实世界中数量关系与空间形式的经验，经过不断条理化、系统化而形成的知识体系。

人类在远古时代，由于生活和劳动上的需要，学会了简单的计数；并逐渐从实物计数发展到抽象的数字计数。原始社会末期人们已经能够进行一些数字的简单四则运算。由于丈量土地和天文观测的需要，也有了一些基本的几何概念。但比较公认的看法是，数学作为一门有系统的、独立的和理性的学科来说，在公元前600年~前300年之间的古希腊学者登场之前，是不存在的。在中国，大约于公元1世纪成书的《九章算术》是中国古代数学体系形成的标

志。《九章算术》共收246个数学问题，分为9章。在这部著作中，系统论述了分数运算，这在世界数学史上创下最早的纪录。其中著名的“盈不足”算法被广为称颂。在几何方面，论述了面积、体积的计算。在代数方面，讨论了一次方程、二次方程的解法，引入了负数概念；开平方、开立方的数值解法更有先进的意义。作为一部世界科学名著，《九章算术》在隋唐时期已传入朝鲜、日本。现在，已被译成日、俄、德、法等多种文字。在西方，古希腊数学家欧几里得所著的《几何原本》是几何学方面一部划时代的著作，是最早用公理方法建立起来的演绎数学体系的典范。《几何原本》在问世之后的2000多年里，一直是学习几何的经典教材。中国最早的译本是1607年利玛窦和徐光启合译出版的。汉译“几何”这个名词就由此开始沿用至今。中国中学现行的《平面几何》《立体几何》教材基本上仍采用《几何原本》的体系。

数学从一开始研究的就是现实世界中的数与形的问题，因此，数与形在数学发展过程中起到了核心作用，难以分割。例如勾股测量提出了开平方的要求，而开平方、开立方又基于几何图形的考虑。17世纪笛卡尔、费马创立的解析几何使数与形的统一更

臻完善。由此,也为随后产生的微积分学奠定了基础。18 世纪之后,数学以空前的规模迅速发展,微分几何、微分方程、拓扑学、概率论、运筹学等学科如雨后春笋般不断建立起来。20 世纪,数学发展的影响已经远远超出了自身的范围,力学、天文、物理、化学、生物学等学科不断与数学发生联系,科学的数学化已成为发展的潮流。同时,数学也从各学科中吸取营养,涌现了一批新的理论与分支,并不断发展壮大。

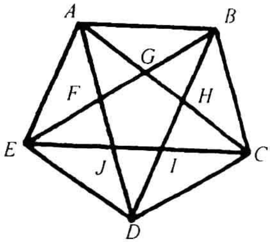
20 世纪以来,数学除了自身得到巨大发展外,已经深入到科学、技术和社会生活的各个方面,数学的重要性越来越受到广泛的关注,特别是计算机技术的发展,逐渐形成了“高技术本质上是‘种数学技术”的观点。数学科学的重要性已经被世界各国所认识到。面对这样一种形势,著名美籍华裔数学家陈省身教授展望 21 世纪的数学认为:数学是中国人民擅长的学科,中国完全有能力在 21 世纪前期成为数学大国、数学强国,数学应该率先赶超国际先进水下。

神奇的黄金分割的发现

“黄金”象征着贵重，黄金分割有着广泛的应用。毕达哥拉斯学派对五星图怀有特别的敬意，他们把五星图作为学派的章。传说，他们有条“帮规”，凡毕氏学派成员都要佩带五星图的纪念章，人们推测，可能是因为他们掌握了正五边形和五星图的作图方法引以自豪。

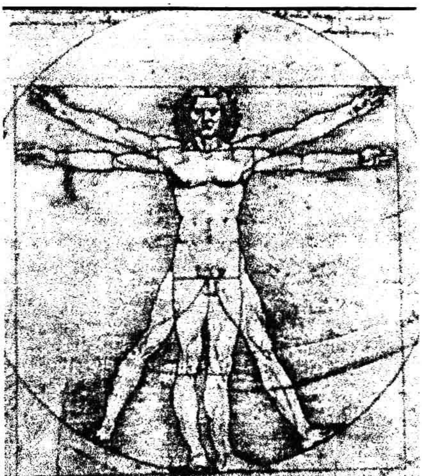
毕氏学派在研究五星图的过程中，发现了五星图的一种奥秘：在正五边形中，相邻顶点的两条对角线（也就是五星图的两条边）互相将对方分割成一长一短两部分，它们满足一种和谐的关系式：

全线段：较长的＝较长的：较短的，而且较长的一段正好等于正五边形的边长。



如图：AC 与 BE 相交于 G，互相将对方分割成一长一短两部分，我们不难看出：

等腰 △AEB ~ 等腰 △FEA



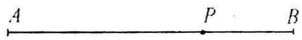
达·芬奇按黄金数画的人体比例图

∴ EB∶EA = EA∶EF

又因为 EA = EG，EF = GB

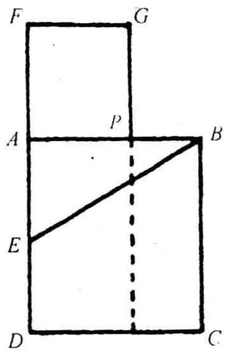
$\therefore EB:EG = EG:GB$

同理可证 $CA:CG = CG:GA$



这样,毕氏学派发现了线段的一种“奇妙分割”法,如图,在线段 AB 上取一点 P,把 AB 分成 AP、PB 两段,且满足

$AB:AP = AP:PB$



他们采用如下几何方法将线段 AB 进行这种分割:

以 AB 为一边作正方形 ABCD(如图),取 AD 的中点为 E,延长 DA 至 F,使 EF = EB。作正方形

AFGP,则点 P 即为所求的“奇妙分割”的分点(读者不难自己证明)。

数学史家推测,毕氏学派画五星图就是以这种“奇妙分割”作依据的。

大约在毕达哥拉斯之后 150 多年,古希腊数学家欧多克斯深入研究了上述“奇妙分割”。欧多克斯是柏拉图的学生,对天文、几何、医学和法律等方面都做出不少贡献。在数学方面,他最大的功劳是,创立了比例论。欧几里得《几何原本》第五卷《比例论》大部分是引用了欧多克斯的成果。欧多克斯的比例论完全排除了毕达哥拉斯的限制,把可公度线段的比与不公度线段的比都包括在内。他从比例论的角度研究毕氏学派的“奇妙分割”,并把这样分割中较短线段与较长线段之比叫做“中外比”。因为点 P 将 AB 分成两部分,其中较长部分是全线段与较短部分的比例中项。欧多克斯发现这种线段之间的中外比例关系存在于许多图形中。最有趣的是,五星图中的每一条线段,都跟比它稍长的那条线段形成“中外比”。欧多克斯避免把无理数当作数,他不用数表达比。对于线段长度、角的大小及其他的量和量的比,都避免给予数值。因此,他没有给出“中外比”的数

值。

文艺复兴时期的欧洲，由于绘画艺术的发展，促进了对“奇妙分割”的研究。当时，出现了好几位身兼几何学家的画家，著名的有帕奇欧里、丢勒、达·芬奇等人。他们把几何学上图形的定量分析用到一般的绘画艺术，从而给绘画艺术确立了科学的理论基础。

1525年丢勒制定了一种绘图的比例法则，其间揭示了中外比在绘画中的重要地位。丢勒认为，在所有矩形中，短边与长边满足中外比的矩形最美观。因为这样的矩形，“以短边为边，在这个矩形中分出一个正方形后，余下的矩形与原来的矩形相似，仍是一个服从中外比的矩形”，这使人们产生一种“和谐”的感觉。帕奇欧里首先把“中外比”称为“神圣比例”。并在1509年出版的《神圣比例》一书中论述了它，中外比被披上了神秘的外衣。后来达·芬奇把欣赏的重点转到使线段构成中外比的分割，而不是中外比本身，提出了“黄金分割”这一名称。

黄金分割中的分点叫做“黄金分割点”。“中外比”又叫“黄金比”，从古希腊直到现在都有人认为这种比例在造型艺术中有美学价值。如工艺美术或日

用品的长和宽的设计中常用这比例，舞台上的报幕员站在舞台宽度的黄金分割点的位置时最美观、最佳；古代的不少建筑物，其高与宽的比也是黄金比。在中世纪，黄金比被作为美的信条而统治着当时欧洲的建筑和艺术。

自从无理数被确认后，人们有可能给出黄金比的数值。

设 $AB = l, AP = a$ 则 $PB = l - a$

$$\because \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}, \therefore \frac{l}{a} = \frac{a}{l - a}$$

$$\therefore a^3 + al - l^2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} l \text{（考虑到 } a < l\text{）}$$

可见黄金比 $\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$。人们把这个数 $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ 叫做“黄金数”。前面我们已经看到黄金数与斐波那契数有关，它还与优选法有关。优选法中普遍常用的方法是 0.618 法，所谓 0.618 就是黄金 $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ 的近似值，因此，0.618 法也称为黄金分割法。

现代医学研究还表明，黄金比对人们自我保健有重要作用：人生存的最佳气温约 23℃，它恰巧是正

常体温(37℃)的0.618倍;吃饭最好只吃六、七成饱;摄人的饮食最好是“六分粗,四分精”;运动与静养的比例关系最好是“四分动,六分静”。

解析几何的发明

在数学史上有三大发明是值得大讲特讲的，一是解析几何的发明；二是微积分的发明；三是群论的发明。解析几何的发明标志着数学已从常量数学时期进入变量数学时期。

笛卡尔，1596 年 3 月 31 日生于法国的一个小城，从小喜爱科学。8 岁时进入一所教会学校，在那里他认识了一些好朋友，经常在一起谈天说地，试图探索世界的奥秘。其中有一位就是梅森(后来，也是有名的数学家)。毕业后，进入普瓦界大学读法律，20 岁时大学毕业去巴黎当律师。当时有种风气，有志之士，不是致力于宗教就是献身于军事。也许，笛卡尔不满于法国的政治状态，1617 年，他到了荷兰，投入奥伦茨的部队，当了一名士兵。

有一天笛卡尔在街上散步，被路旁一张海报所

吸引。可是他不懂荷兰文,只能从大家的议论中听出,好像是有关解数学题的挑战书,便请教旁边的中年人,巧得很,此人就是当时有名的别克曼教授。教授告诉他:“这可是一道难题啊,你有兴趣吗?”想不到,笛卡尔没有用多少时间就求得解答,别克曼大为惊奇。从此,笛卡尔开始在别克曼指导下认真研究数学。

这段时期,与其说笛卡尔是个士兵,还不如说他是一名攻读数学的研究生。他终日沉迷在深思之中,考虑哲学和数理问题。日有所思,夜有所梦,一天晚上(这时,他在慕尼黑附近的军营中)他接连做了几个梦。传说他梦见一只黑色的苍蝇疾飞着,眼前留下了苍蝇飞过的痕迹,时而是直线,时而是曲线,时而又停下来留下一个黑点。笛卡尔从梦中惊醒,他意识到直线和曲线均可由点的运动而成,笛卡尔在回忆录中写道:“第二天,我开始懂得这惊人发现的基本原理”,这就是指他得到建立解析几何的线索。

1621 年,笛卡尔终于脱离军队,返回法国。

他回到巴黎后,重遇好朋友梅森等人,参加了他们的数学集团。因为不满于法国的环境,到了 1628