工　程　数　学

矢量分析

杨　曙　编

国防工业出版社

工 程 数 学

矢 量 分 析

杨 曙 编

国防工业出版社

内容简介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”七个分册之一。本分册介绍在研究流体力学、电动力学以及其它自然科学中所需要的矢量运算方面的基础知识。包括数量场的梯度、矢量场的散度和旋度以及与之有关的一些内容。书中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

工程数学

矢量分析

杨曙 编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32　印张 3 3/4　77千字

1982年7月第一版　1984年9月第二次印刷　印数：22,001—32,000册

统一书号：15034·2311　　定价：0.40元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材之一。全套教材共分七册出版：矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计。

本册介绍在研究流体力学、电动力学以及其它自然科学中所需要的矢量运算方面的基础知识。包括数量场的梯度、矢量场的散度和旋度以及与之有关的一些内容。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍，附录内容供读者参考。各章附有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册矢量分析由西北工业大学杨曙编写，北京航空学院李恒沛主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　　录

第一章　矢性函数的微分和积分 ………………………………2
§1.1　矢性函数的概念………………………………………2
§1.2　矢函数的极限与连续…………………………………5
§1.3　矢性函数的导数与微分………………………………8
§1.4　导数矢量在两个方向的分解 ……………………………14
§1.5　$\boldsymbol{r}'(s)$的几何意义 ……………………………………16
§1.6　矢函数的积分 …………………………………………19
习题一……………………………………………………21
第二章　梯度、散度和旋度………………………………23
§2.1　数量场和矢量场 ………………………………………23
§2.2　方向导数 ………………………………………………27
§2.3　数量场的梯度 …………………………………………32
§2.4　梯度的运算法则 ………………………………………35
§2.5　矢量场通过曲面的通量 ………………………………41
§2.6　矢量场的散度 …………………………………………44
§2.7　矢量场沿着闭曲线的环量 ……………………………49
§2.8　矢量场的旋度 …………………………………………51
习题二……………………………………………………61
第三章　管式场和有势场…………………………………63
§3.1　管式场 …………………………………………………63
§3.2　连续性方程 ……………………………………………64
§3.3　有势场 …………………………………………………66
§3.4　势函数的计算 …………………………………………69
§3.5　格林公式 ………………………………………………73

习题三……………………………………………………………………76
第四章　关于梯度、散度和旋度的计算公式………………77
§4.1　基本公式 ……………………………………………………77
§4.2　一次微分运算公式的证明 ……………………………78
§4.3　二次微分运算公式的证明 ……………………………85
习题四……………………………………………………………………87
第五章　正交曲线坐标……………………………………………89
§5.1　正交曲线坐标的概念 ……………………………………89
§5.2　梯度、散度、旋度、Δψ在正交曲线坐标系下的表示式……94
习题五 ……………………………………………………………………104
附录1　司托克斯公式 ……………………………………………105
附录2　三矢矢积 ……………………………………………………110
习题答案 ………………………………………………………………112

矢 量 分 析

第一章　矢性函数的微分和积分

本章所讨论的内容是后面各章的基础，同时也是研究许多自然科学时常用的一种工具。矢性函数的微分和积分的概念，从实质上讲，和我们过去学过的函数的微分和积分的概念是一样的。因此，在学习本章内容时，只要与函数的微分和积分中对应的内容紧密地联系起来，就不会遇到什么困难。

§1.1　矢性函数的概念

我们知道，数量分两类：一是常量，一是变量。同样，对矢量而言，也有两类：其一为常矢量，其二为变矢量。对于常矢量，我们都是熟悉的。例如，等速直线运动中的速度矢量就是一个常矢量。所谓**变矢量**是指在所讨论的问题中，矢量大小或方向是变化的，或者矢量大小和方向都是变化的。例如，在变力作功问题中的所谓变力就是一个变矢量。又如，当质点沿着曲线运动时，其速度矢量也是一个变矢量。

今后，我们用粗体字母表示矢量。

（一）矢性函数的定义

在变矢量概念的基础上，我们来给出矢性函数的定义。

定义 1.1　设有一变矢量 $\boldsymbol{a}$ 和一数性变量 t（它不一定表示时间），如果 t 在区间 $(t_1,\ t_2)$ 内每取定一值时，矢量 $\boldsymbol{a}$ 总有一确定的值（即确定的大小和方向）和它对应，这时

我们就说**矢量 $\boldsymbol{a}$ 是数性变量 t 的函数**，并且记为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$$

而区间（t_1，t_2）称为函数的**定义域**。

例如，设一物体受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，沿着 x 轴从 x_1 运动到 x_2，显然，这变力 $\boldsymbol{F}$ 和物体运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 都是坐标 x 的函数，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x)$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x)$，而区间（$x_1$，$x_2$）就是它们的定义域。

在矢量分析中，我们常将上面的函数称为**矢性函数**或**矢函数**，而把 $y=f(x)$ 那种类型的函数称为**数性函数**或**数函数**。

（二）曲线的参数方程

矢性函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 可在直角坐标系中三个坐标轴上进行分解，显然，三个分量（或坐标）都是 t 的数性函数，用 $a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$ 依次表示 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)&=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}\end{aligned}$$

起点在坐标原点，终点为M的矢量$\overrightarrow{OM}$叫做点 M 的**矢径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示：

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\}$$

当终点M的坐标 x、y、z 都是 t 的函数时，则用 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示：

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$$

显然，当 t 在（t_1，t_2）内变动时，M点的轨迹一般是一条曲线（图 1-1）。

方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t_1<t<t_2$$

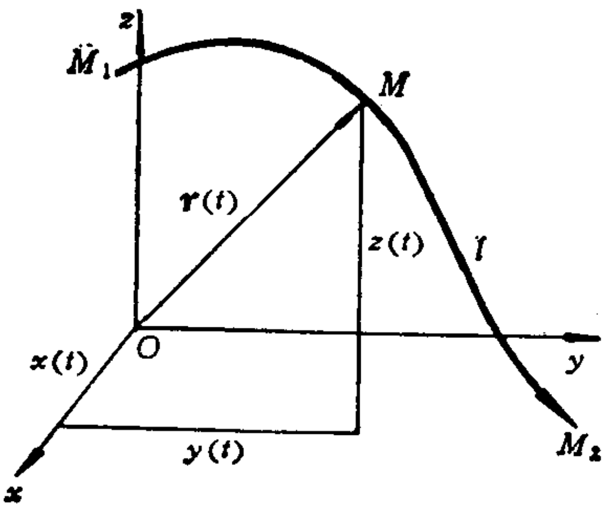

图 1-1

称为曲线 l 的**参数方程**。例如在 xOy 平面上，圆

$$x^2+y^2=a^2$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=a(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}),\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

或

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ b\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

双曲线的右支

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\qquad(x\geqslant a)$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\operatorname{ch}u,\ b\operatorname{sh}u\},\quad -\infty<u<+\infty$$

抛物线

$$y^2=2px\ (p>0)$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\left\{\frac{u^2}{2p},\quad u\right\},\quad -\infty<u<+\infty$$

值得注意的是：任何曲线的参数方程都不是唯一的。

（三）曲线的方向

对于曲线的参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t_1<t<t_2,$$

若当 t 从 t_1 变到 t_2 时，$\boldsymbol{r}(t)$ 的终点描绘出从 M_1 到 M_2 的曲线（图 1-1），则从 M_1 沿着曲线到 M_2 的方向称为该**曲线的正向**。规定了正向的曲线叫做**有向曲线**。例如参数方程

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\quad b\sin\theta\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi$$

所表示的椭圆曲线，其正向为逆时针方向。

§1.2　矢函数的极限与连续

和讨论数性函数时一样，在讨论矢性函数的微分和积分之前，我们先来建立矢函数的极限与连续的概念。

（一）矢函数的极限

定义 1.2　设矢性函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 t_0 的某一邻域内有定义（但在 t_0 处可以无定义），又 $\boldsymbol{b}$ 为一常矢量。若对于每一个任意给定的正数 ε，必有一个正数 δ 存在，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{b}|<\varepsilon$$

成立，这时我们说，当 t 趋于 t_0 时，函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 以 $\boldsymbol{b}$ 为其**极限**。用符号表示，就是

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{b}\qquad(1.2.1)$$

将 $\boldsymbol{a}(t)$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在直角坐标系下分解：

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$

$$\boldsymbol{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$$

这样容易看出式（1.2.1）成立的**充要条件**是

$$\lim_{t\to t_0} a_x(t)=b_x,\quad \lim_{t\to t_0} a_y(t)=b_y$$

$$\lim_{t\to t_0} a_z(t)=b_z$$

事实上，根据定义，式（1.2.1）和

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{b}|=0$$

等价，而这式又可写成

$$\lim_{t\to t_0} \sqrt{[a_x(t)-b_x]^2+[a_y(t)-b_y]^2+[a_z(t)-b_z]^2}=0$$

亦即

$$\lim_{t\to t_0} a_x(t)=b_x,\quad \lim_{t\to t_0} a_y(t)=b_y$$

$$\lim_{t\to t_0} a_z(t)=b_z$$

这个充要条件告诉我们，对矢函数之极限的讨论可以转化为对数性函数（即该矢函数的三个分量）之极限的讨论。

（二）极限的运算法则

设 $f(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限都存在，于是有

$$\lim_{t\to t_0} f(t)\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0} f(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

我们来证明第三式，其余各式留给读者自证。

设

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}$$
$$\boldsymbol{b}(t)=\{b_x(t),\ b_y(t),\ b_z(t)\}$$

于是

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t)$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]&=\lim_{t\to t_0}[a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t)]\\&=\lim_{t\to t_0}a_x(t)\lim_{t\to t_0}b_x(t)+\lim_{t\to t_0}a_y(t)\lim_{t\to t_0}b_y(t)+\lim_{t\to t_0}a_z(t)\lim_{t\to t_0}b_z(t)\\&=\{\lim_{t\to t_0}a_x(t),\ \lim_{t\to t_0}a_y(t),\ \lim_{t\to t_0}a_z(t)\}\cdot\{\lim_{t\to t_0}b_x(t),\ \lim_{t\to t_0}b_y(t),\ \lim_{t\to t_0}b_z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\{a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\}\cdot\lim_{t\to t_0}\{b_x(t),\ b_y(t),\ b_z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)。\end{aligned}$$

（三）矢性函数连续的定义

定义 1.3 设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 $(t_1,\ t_2)$ 中有定义，又 $t_1<t_0<t_2$，若

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t_0)$$

则称矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在 t_0 **连续**。

不难看出：矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在 t_0 连续的**充要条件**是它的分量 $a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$都在 t_0 连续。

在 (t_1, t_2) 上每一点都连续的矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$，称为在该区间上是连续的。由上面的充要条件可知：一矢性函数在某一区间上是否连续的问题，可以转化为去讨论它的三个分量（数性函数）在该区间上是否连续的问题。

今后所遇到的矢函数，我们假定都是连续的。

§1.3 矢性函数的导数与微分

下面，我们来建立矢函数的导数与微分的概念，以及求导数和求微分的运算法则。这些概念和运算法则跟数性函数中对应的概念和运算法则并无区别。

（一）导数的定义

定义 1.4 设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在 (t_1, t_2) 上连续，并设 t_0 和 $t_0+\Delta t$ 都在这区间内。如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在 t_0 是**可导的**，这个极限值称为 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 t_0 的**导数**，用$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{a}'(t_0)$表示，即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)_{t_0}=\boldsymbol{a}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

因为

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{a_x(t+\Delta t)-a_x(t)}{\Delta t},\ \frac{a_y(t+\Delta t)-a_y(t)}{\Delta t},\ \frac{a_z(t+\Delta t)-a_z(t)}{\Delta t}\right\}$$

$$=\left\{\frac{da_x}{dt},\ \frac{da_y}{dt},\ \frac{da_z}{dt}\right\} \tag{1.3.1}$$

故知一矢函数的导数可通过它的三个分量的导数表示出来。

特别地，对于矢径函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$，我们有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left\{\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right\} \tag{1.3.1$'$}$$

由式（1.3.1）可知：导数 $\boldsymbol{a}'(t_0)$仍然是一个矢量，故又常称 $\boldsymbol{a}'(t_0)$为 $\boldsymbol{a}(t)$在 t_0 的**导数矢量**，或简称为**导矢**。

跟数性函数一样，若 $\boldsymbol{a}(t)$对于区间（t_1，t_2）内每个值 t 都是可导的，则称它在该区间上是可导的，而 $\boldsymbol{a}'(t)$称为 $\boldsymbol{a}(t)$的**导函数**。导函数的导数如若存在，记为$\boldsymbol{a}''(t)$，它就叫做 $\boldsymbol{a}(t)$的**二阶导函数**。

〔例 1〕 设 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ ct\}$，其中 a 和 c 都是常数，求$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$和$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$。

解

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left\{\frac{d(a\cos t)}{dt},\ \frac{d(a\sin t)}{dt},\ \frac{d(ct)}{dt}\right\}$$

$$=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ c\}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\left\{\frac{d(-a\sin t)}{dt},\ \frac{d(a\cos t)}{dt},\ \frac{dc}{dt}\right\}$$

$$=\{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\}$$

$$=-a\{\cos t,\ \sin t,\ 0\}$$

（二）导矢的几何意义

由假设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在区间（t_1，t_2）上连续，可知对于该区间内每一个 t 值有一个确定的矢量 $\boldsymbol{a}(t)$。现将它们的始点放到一起，于是当 t 从 t_1 变到 t_2 时，其终点就描绘出一条有向的连续曲线 l（图 1-2）。设 M_0 是曲线上对应于参数值 t_0 的一点，M是曲线上对应于 $t_0+\Delta t$ 的一点，于是

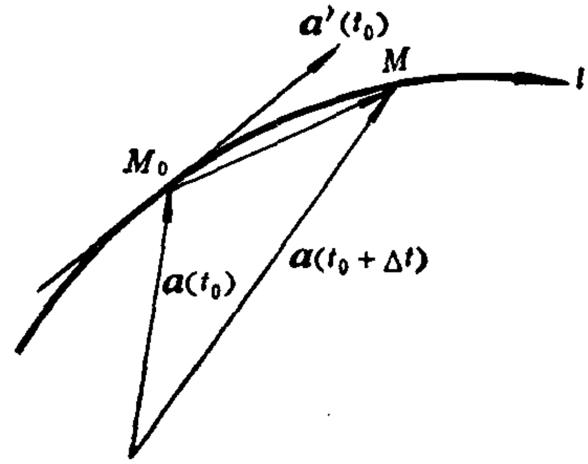

图 1-2

$\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)$为弦$\overline{M_0M}$ 上的一个矢量，用 Δt 除两端所得矢量

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

仍然位于弦$\overrightarrow{M_0M}$上，且指向曲线 l 的正向那一方。令$\Delta t\to 0$ 取极限，这矢量以曲线 l 在点 M_0 的切线为其极限位置，且指向曲线上对应于参数值 t 增加的一方，即曲线正向的那一方。因此，我们得到：导矢 $\boldsymbol{a}'(t_0)$ 位于曲线 l 在点 M_0 处的切线上，且指向曲线的正向那一方，其中 M_0 是 l 上对应于 t_0 的点（图 1-2）。

（三）$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的物理意义

设质点沿着曲线 l：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$运动，在时刻 $t=t_0$ 时，它位于点 M_0 处，而在 $t_0+\Delta t$ 时，它位于点M处（图 1-3）。于是

$\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$表示质点在$\Delta t$时间内的位移，而

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

表示在这时间间隔内质点位移的平均速度。令$\Delta t\to 0$而取极限，所得极限值$\boldsymbol{r}'(t_0)$就表示质点在点M_0处的速度，或者说表示质点在t_0时刻的速度。

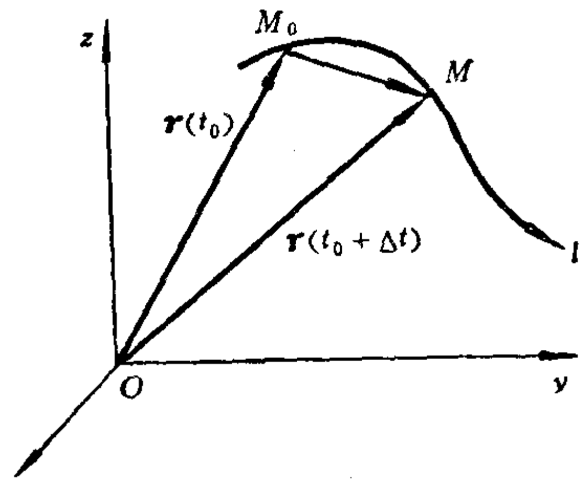

图 1-3

容易看出：矢径函数$\boldsymbol{r}(t)$对时间t的二阶导数$\boldsymbol{r}''(t)$表示加速度。

（四）微分的定义

跟数性函数一样，矢函数的微分定义如下：

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt$$

矢函数的微分也可通过它的三个分量的微分表示出来。由式（1.3.1），显然有

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt=\{da_x,\ da_y,\ da_z\} \tag{1.3.2}$$

特别地，对于矢径函数$\boldsymbol{r}(t)$〔今后，除有特别声明者外，我们总以$\boldsymbol{r}$表示矢径，用r表示它的模，即$r=|\boldsymbol{r}|$〕有

$$d\boldsymbol{r}=\{dx,\ dy,\ dz\} \tag{1.3.2$'$}$$

显然，矢函数的微分$d\boldsymbol{a}$仍然是一个矢量。

〔**例 2**〕 设$\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t,\ \cos t\}$，求$d\boldsymbol{r}$，$|d\boldsymbol{r}|$

解

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{r}&=a\{d(t-\sin t),\ d\cos t\}\\&=a\{(1-\cos t)dt,\ -\sin t\,dt\}\\&=a\{1-\cos t,\ -\sin t\}dt\end{aligned}$$