大學叢書

拓撲學

下　冊

沙愛福
施雷發　著
江澤涵　譯

商務印書館發行

大學叢書

拓撲學

下册

沙愛福
施雷發 著

江澤涵 譯

商務印書館發行

中華民國三十八年七月初版

(5 5 5 7 3)

大學叢書 拓撲學 二冊

Lehrbuch der Topologie

每部基價伍拾伍元

印刷地點外另加運費

原著者 H. Seifert W. Threlfall

譯述者 江澤涵

發行人 陳懋解 上海河南中路

印刷所 商務印書館印刷廠

發行所 各地 商務印書館

勘誤表

頁	行	誤	正
3	3,4,-3,-4,-8	週	周
4	4	週	周
6	10	…*bereiche*),	…*bereich*),
12	-7	…曲面。但是…	…曲面。[3] 但是…
16	-6	**不能定向**	**不能定向**
20	1	…*klass*)。	…*klasse*)。
24	8	…流形。所謂…	…流形。[7] 所謂…
50	-6	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}^n$
68	-10	**匀齊的**	**匀齊的**
103	-1	矩陣四種	矩陣的四種
208	7	這 r 個紐	這 r 條紐
307	11	**球** $\mathfrak{S}^3$) **中**。	**球** $\mathfrak{S}^3$) **中**。

勘誤表二

頁	行	誤	正
328	9至10	{例如，有一個單純複合形 $\mathfrak{R}^n$ (n>3)，他的任一點處的同調羣與 n—1 維球的相同。}	例如，$\mathfrak{R}^n$ 是一個高於三維的單純複合形，有一個確定的單純剖分，而且有勻齊性。我們就無方法推斷他的一個頂點的 n—1 維鄰域複合形與 n—1 維球的同胚。
474	-13右	零調	同調
475	19右	*in ein*……在 R^3 中	*in den* $\mathfrak{R}^3$……在 $\mathfrak{R}^3$ 中
477	-13左	道路的自由同倫	自由同倫的道路
478	-16右	不變性	拓撲不變性
479	-5右	))	)
482	9右	)	))
483	19右	流形	假流形
483	21右	流形	假流形
487	-6左	餘數類	餘數類 $\breve{0}$ 與 $\breve{1}$
491	12右	點集	複合形
493	18右	連通數	連通數 q^h

第八章 覆疊複合形

複合形的基本羣與複合形的覆疊形 (*Überlagerung*) 有密切的關係。設想一個單位半徑的圓環 (*Ring*, 有限高的圓柱面) 在平面上滚轉，他所滚轉過的平面域是一條無窮的長條(圖 98)。我們能用這長條(如同用帶子一樣) 纏繞圓環無窮多次，使他覆疊 (*Überlageren*) 圓環無窮多次，圓環滚轉的時候，他的閉道的起點 O 在這長條上印出許多點；這些點循環的出現，每隔 2π 單位距離出現一次。反之，這長條上連接這種的兩個點的一條道路，印 (*durchdrücken*) 到圓環上去，就是纏繞圓環若干次的一條閉道。而圓環的基本羣的每一元都由這種的一條閉道代表。從另一觀點說，這長條上的所有連接兩個固定點的道路都互相同倫；所以若是對於同倫的道路不加以區別，這長條上的一條道路就可以用起點與終點代表，因此也可以用由起點到終點的一個直移 (*Verschiebung*) 代表。若是起點與終點都是 O 在這長條上所印出的點，這些直移就組成這長條的"升騰羣" (*Deckbewegungsgruppe*)。所以這長條的基本羣與升騰羣間有一個一一的同構對應。每一個複合形的基本羣因此也就可以看作是一個確定的覆疊形——萬有 (*unirersal*) 覆疊複合形——的升騰羣。複合形的其他的無支點的覆疊形——我們只討論無支點的覆疊形——都與基本羣的子羣對應；因此我們能從基本羣，得着關于可能的覆疊複合形的一個概括的智識。

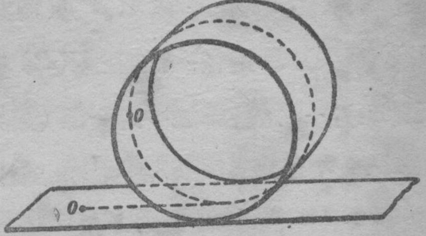


圖 98

§53 無支點的覆疊形

設 $\mathfrak{K}$ 與 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是有限的或無窮的連通複合形。若是有一個換 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 成 $\mathfrak{K}$ 的綿續變換 G 存在，適合下列條件，我們就說 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 覆疊 $\mathfrak{K}$，或說 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 是 $\mathfrak{K}$

的覆疊形：

$(\ddot{U}l_1)$ $\mathfrak{K}$ 的每一個點 P 至少是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的一個點 $\widetilde{P}$ 的像點。$\widetilde{P}$ 就說是在 P 之上，P 就說是 $\widetilde{P}$ 的底點 (*Grundpunkt*)。

$(\ddot{U}l_2)$ 若是 $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \cdots$ 是所有的在 P 之上的點，就有有如次性質的"特出的鄰域" $\mathfrak{U}(P)$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_2), \cdots$ 存在；G 拓樸的變換 $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_2), \cdots$ 成 $\mathfrak{U}(P)$ (無支點的條件)。

$(\ddot{U}l_3)$ $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的任一點，在 $\mathfrak{U}(P)$ 中的一點之上的，至少屬於 $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_1)$, $\mathfrak{U}(\widetilde{P}_2), \cdots$ 這些鄰域中的一個 (無界點的條件)。

條件 $(\ddot{U}l_2)$ 表明變換 G 是局部的拓撲變換。因此，如同在球面上展開的 *Riemann* 面的疊線與支點，就不會在覆疊形上出現。我們只討論這種的無支點的覆疊複合形。——有了條件 $(\ddot{U}l_3)$，我們纔能證明 (見 §54)：在底複合形的每一條道路之上，都有一條覆疊道路 (*Überlagerungsweg*)。這並不是 $(\ddot{U}l_1)$ 與 $(\ddot{U}l_2)$ 的結論，我們可以用下述的例子表明。設底複合形是一個平環；另一個複合形是一個矩形的長條，含有兩個長邊，但不含有窄邊 a 與 b (圖 99)；而且，這換長條成平環的變換 G 使長條的開的兩端互相重疊。這例子滿足 $(\ddot{U}l_1)$ 與 $(\ddot{U}l_2)$ 這兩個條件，但在 a 或 b 之下的一個點 P 的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 就不能滿足 $(\ddot{U}l_3)$。給定了在平環上的一條道路，繞內圓周兩週的，矩形長條上就無一條道路存在，使他在這給定的道路之上，而且 G 換他成這給定的道路。

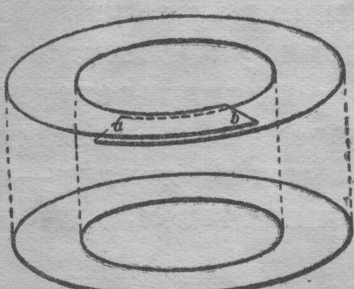


圖 99

因為變換 G 換一個點 $\widetilde{P}$ 的任一個鄰域成底點 P 的一個鄰域，我們可以應用 §8 中的定理；因此知道由疊合覆疊複合形上的有同一個底點的所有的點而成的空間就是底複合形。

環面是覆疊複合形的一個簡單的例子。設圖 100 中的正方形表示一個環面 $\mathfrak{K}$，圖 101 中的分成四個正方形的矩形表示一個環面 $\widetilde{\mathfrak{K}}$。若是我們把 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個正方形全合的 (*kon-*

gruent) 變換成 $\mathfrak{K}$ 這正方形，我們就有了 $\mathfrak{K}$ 的一個四層的覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$。我們也能換個看法，設想有四個全合的樣本或葉 (*Blatt*) 在 $\mathfrak{K}$ 之上，每一個都沿着一個經圓割開了 (圖 100 中的垂直邊)；這四個樣本沿着割開的經圓循環的連接起來，就是這個覆疊形 $\tilde{\mathfrak{K}}$ (圖 101)。若是設想環面是通常空間中的旋轉環面，這經圓就成為 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 上的一條穿透的閉曲線 (*Durchdringungskurve*)。但若是把 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 看作一個二維流形，不浸沒在一個空間中，這穿透的曲線上的點就與其他的點一樣，並無特異的地方。

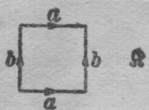


圖 100

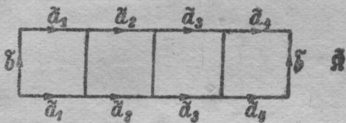


圖 101

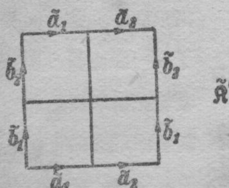


圖 102

若是兩個覆疊複合形間有一個拓撲對應，而且每兩個對應點在同一底點之上，這兩個覆疊形就當作相等。 兩個同胚的複合形即使是同一個底複合形的覆疊形，也可以不相等。

例：環面 $\mathfrak{K}$ 的四層的覆疊複合形，除去上文所說的 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 之外，還有一個 $\tilde{\mathfrak{K}}'$，與 $\tilde{\mathfrak{K}}$ 不相等。我們只要把這四葉都沿着經圓與緯圓割開，然後再把他們相間的沿着經圓與緯圓聯接起來，就得着 $\tilde{\mathfrak{K}}'$，圖 102 表明 $\tilde{\mathfrak{K}}'$ 分割成四個正方形，代表四個樣本，而且樣本上每四個全合 (*kongruent*) 點在 $\mathfrak{K}$ 上有同一個底點。

我們再說明兩個將來有用的覆疊複合形。設 $\mathfrak{K}$ 是一個雙環面，即通常空間中有兩個環柄的球面。設想有三個與 $\mathfrak{K}$ 全合的樣本在 $\mathfrak{K}$ 之上，他們的環

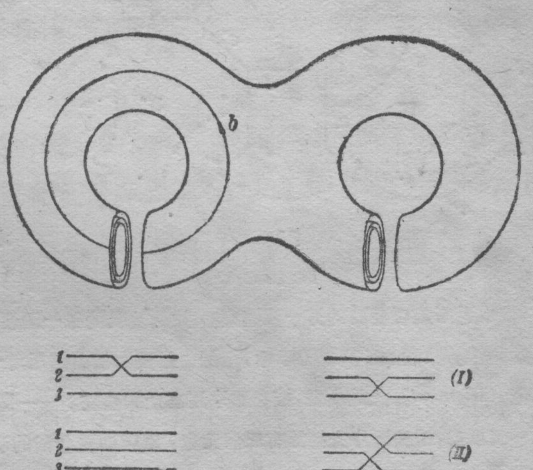
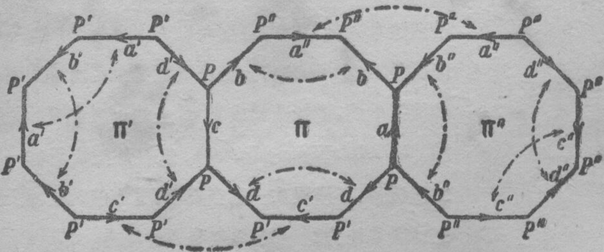


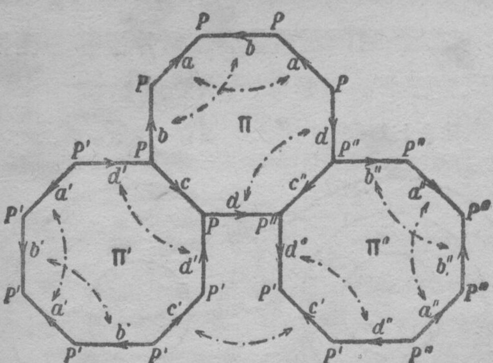
圖 103

柄都割開了。我們先沿着第一個與第二個的左環柄上的割痕(圖 103)把他們相間的聯接起來,把第三個樣本的左環柄上的割痕消去(即把第三個樣本的割開的左環柄再聯接起來,因此割痕不是穿透的曲線);再沿着第二個與第三個樣本的右環柄上的割痕把他們相間的聯接起來,把第一個樣本的右環柄上的割痕消去。這就做成了第一個覆疊形。但若是把這三個樣本的左環柄上的割痕都消去,而且把這三個樣本沿着他們的右環柄上的割痕循環的聯接起來,我們就得着第二個覆疊形。環柄上的未消去的經圓割痕是穿透的閉曲線;通過一條穿透的曲線的有兩個或全體三個樣本。圖 103 表示覆疊面在穿透的曲線處的剖面。



I

圖 104



II

圖 105

我們還可以把底面割開成基本多邊形 —— 八邊形,再把他與另兩個全合的樣本適當的聯接起來,做成這兩個覆疊面的另一種模型。如此做成的每一個覆疊面都是一個多邊形,他的邊成對的相抵。在圖 104 與圖 105 中,相抵頂點與相抵棱都用同一個字母表示,而且在同一個底元素 (*Element*) 上的頂點,棱與面片用右上撇區別。——這兩個覆疊面都能定向。因爲在每一個頂點,棱與面片上都恰有三個元素,這兩個覆疊面的示性數也都是底面的示性數的三倍: $\widetilde{N} = 3N = 6$。所以虧格都是 $h = 4$ (頁 197)。

§54 底道路與覆疊道路

若是 w 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的一條道路 $\widetilde{W}$ 的原底,而且 $\widetilde{T}$ 是這換 w 成 $\widetilde{W}$ 的變換, $T = G\widetilde{T}$ 就綿續的變換 w 到 $\mathfrak{K}$,因此也確定了 $\mathfrak{K}$ 上的一條道路 W。我們說,W 是屬於 $\widetilde{W}$ 的底道 (*Grundweg*), $\widetilde{W}$ **覆疊** W。我們現在要證明,不但是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的每一條道路 $\widetilde{W}$ 印成 $\mathfrak{K}$ 上的一條確定的底道 W, 底複合形的每一條道路 W 也印到覆疊複合形上去, 並且按照 W 的起點 A 之上有多少覆疊點, W 就恰有多少覆疊道路。

定理 I: 設 W 是 $\mathfrak{K}$ 上的從 A 到 B 的一條道路,而且 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的 $\widetilde{A}$ 是在 A 之上的一個點。 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上就恰有一條以 $\widetilde{A}$ 爲起點的覆疊 W 的道路 $\widetilde{W}$。

證明: 我們取定向的單位線段 w $(0 \leqq s \leqq 1)$ 做 W 的原底,設 T 是這換 w 成 W 的變換。若是任一綿續變換 $\widetilde{T}'$ 換 w 成 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的 $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}$ 是 W 的覆疊道路的充要條件, 就是 $G\widetilde{T}'$ 換 w 成 W,也就是 w 有一個自身的拓撲變換 S, 使 T 換 s 與 $G\widetilde{T}'$ 換 $S(s)$ 成 $\mathfrak{K}$ 上的同一點: $T(s) = G\widetilde{T}'S(s)$。但是根據道路相等的定義,$\widetilde{T}'$ 與 $\widetilde{T}'S = \widetilde{T}$ 界說 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上同一條道路。因此,若是有一個綿續變換 $\widetilde{T}$ 換 w 成 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的 $\widetilde{W}$,而且 $G\widetilde{T} = T$, $\widetilde{W}$ 就是 W 的最普遍的覆疊道路。 $G\widetilde{T}=T$ 的意義是說: 對於 w 上的任一點 s, $\widetilde{T}(s)$ 這點總在 $T(s)$ 這點之上。 所以只要能證明下述的預備定理,定理 I 就證明了:

預備定理: 設 T 綿續的變換 $0 \leqq s \leqq 1$ 這單位線段到 $\mathfrak{K}$,而且 $\widetilde{\mathfrak{K}}$

上的點 $\widetilde{A}$ 在 $A=T(0)$ 之上。則恰有一個綿續變換 $\widetilde{T}$ 存在，使 $\widetilde{T}(0)=\widetilde{A}$，而且每一點 $\widetilde{T}(s)$ 在 $T(s)$ 之上。

證明：$a)$ $\widetilde{T}$ **的存在**。相當於 $\mathfrak{K}$ 上的每一點 P，我們任取一特出的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 與他對應。把這單位線段分成 n 個相等的子線段 $r_1, r_2, \cdots, r_n$。根據頁 41 中的匀綿續定理 IV（用每一點 P 的特出的鄰域 $\mathfrak{U}(P)$ 當作這定理中的 $\mathfrak{U}^*(P|\mathfrak{B})$），我們還能設想 n 已如是之大，使每一子線段的像集 $T(r_i)$ 完全屬於（一點的，但不必注意究竟是那一點的）一特出的鄰域 $\mathfrak{U}_i$。現在再取一個在 $\mathfrak{U}_1$ 之上的，含有點 $\widetilde{A}$ 的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$。因爲 $(\ddot{U}l_3)$，$\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 存在。因爲 G 拓撲的變換 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 成 $\mathfrak{U}_1$，而且因爲 $T(r_1)$ 屬於 $\mathfrak{U}_1$，$\widetilde{\mathfrak{U}}_1$ 中有 $T(r_1)$ 的一個拓撲的像集。因此，有一個變換 $\widetilde{T}_1$ 存在，換第一個子線段 r_1 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_1$，換 r_1 的起點 $s=0$ 成 $\widetilde{A}$。再同樣的討論 r_2。設特出的鄰域 $\mathfrak{U}_2$ 含有 $T(r_2)$；設特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_2$ 在 $\mathfrak{U}_2$ 之上，而且含有 r_1 的終點的像點 $T_1\left(\frac{1}{n}\right)$。$\widetilde{\mathfrak{U}}_2$ 既然含有 $T(r_2)$ 的拓撲像集，因此有一個綿續變換 $\widetilde{T}_2$ 存在，換 r_2 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_2$，而且 $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right)=\widetilde{T}_2\left(\frac{1}{n}\right)$。如此繼續進行，結果我們求得一串分別換 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的變換 $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \cdots, \widetilde{T}_n$，而且 $\widetilde{T}_i\left(\frac{i}{n}\right)=\widetilde{T}_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)$。這些子線段的變換聯合成換這單位線段到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的一個具有應有的性質的變換。

$b)$ $\widetilde{T}$ **的唯一性**。設 $\widetilde{T}'$ 是這單位線段的另一個綿續變換，滿足預備定理的條件。設在參數的一值 s^* $(\geqq 0)$ 以前，$\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 符合。因爲變換的綿續性，他們在 s^* 點處也符合。點 $\widetilde{T}(s^*)=\widetilde{T}'(s^*)$ 所以有一個特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$，$G$ 把他換成底點 $T(s^*)$ 的一個特出的鄰域 $\mathfrak{U}^*$。又

因爲 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 的綿續性，有一個有如次性質的正數 ε：若是 s 與 s^* 的差不大於 ε，所有的點 $\widetilde{T}(s)$ 與 $\widetilde{T}'(s)$ 都屬於 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$。現在 $\widetilde{T}(s)$ 與 $\widetilde{T}'(s)$ 既然都在 $\mathfrak{U}^*$ 中的同一底點 $T(s)$ 之上，根據 $\mathfrak{U}^*$ 與 $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ 的一一對應，$\widetilde{T}(s)=\widetilde{T}'(s)$。所以 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 在 $s^*+\varepsilon$ 以前也符合。所以 $\widetilde{T}$ 與 $\widetilde{T}'$ 完全符合，這就證明了我們的預備定理。

我們現在應用定理 I，去界說覆疊複合形的葉數 (*Blätterzahl*)。

設 P 與 Q 是 $\mathfrak{K}$ 上的二點，W 是從 P 到 Q 的一條道路。我們能在 P 之上的點與在 Q 之上的點間規定一個一一對應如下：若是 $\widetilde{P}_i$ 是在 P 之上的任一點，我們就說從 $\widetilde{P}_i$ 點起始的，在 W 之上的道路的終點與 $\widetilde{P}_i$ 對應。反之，若是 $\widetilde{Q}_k$ 是在 Q 之上的任一點，我們就說，從 $\widetilde{Q}_k$ 起始的，在 W^{-1} 之上的道路的終點與 $\widetilde{Q}_k$ 對應。根據定理 I，這些道路存在而且是唯一的。後一種對應恰是前一種的逆對應，所以在 P 之上的點與在 Q 之上的點間有一個一一的關係。**$\mathfrak{K}$ 的每一個點之上都有同樣多的覆疊點。若是 $\mathfrak{K}$ 的每一點之上恰有 g 點，g 就叫做這覆疊形的層數或葉數。**他可以有限，也可以無窮。

有了定理 I 纔能比較底複合形上的與覆疊複合形上的道路；同樣的要有了下述的定理 II，纔能比較他們的道路類。定理 II 告訴我們，覆疊複合形上的一條道路的變狀能印到底複合形上去，反之亦然。

定理 II：設 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 是 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的從 $\widetilde{A}$ 到 $\widetilde{B}$ 的兩條道路，W_0 與 W_1 是他們的從 A 到 B 的底道。若是 $\widetilde{W}_0$ 能變狀成 $\widetilde{W}_1$，W_0 就也能變狀成 W_1。——反之，若是 W_0 與 W_1 是 $\mathfrak{K}$ 上的從 A 到 B 的，能互

相變狀的兩條道路，$\widetilde{A}$ 是在 A 之上的一點，而且 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 是從 $\widetilde{A}$ 起始的覆疊道路，$\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 的終點就是同一個在 B 之上的點 $\widetilde{B}$，而且 $\widetilde{W}_0$ 與 $\widetilde{W}_1$ 也能互相變狀。

因爲變換 G 的綿續性，根據頁 219 上的討論，定理的第一部分成立。

雖然定理的第二部分也同樣的明顯，却比較不容易證明。因爲要證明第二部分，我們必須從底複合形的變狀矩形得着覆疊複合形的變狀矩形；但是我們現在只有在一個（特出的）鄰域中的拓撲變換，並無全局的單值綿續變換。——W_0 能變狀成 W_1 的意義是說，有一個綿續變換 T 存在，換變狀矩形 $\mathfrak{R}$（他的點的坐標由 $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ 給定，圖 106）到 $\mathfrak{K}$，使二定向邊 $t=0,\ t=1$ 分別換成道路 W_0 與 W_1，其他二邊 $s=0$ 與 $s=1$ 分別換成點 A 與 B。我們現在要求得一個換 $\mathfrak{R}$ 到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的綿續變換 $\widetilde{T}$，使相當於 $\mathfrak{R}$ 中任一點 (s, t) 的 $\widetilde{T}(s, t)$ 都在 $T(s, t)$ 之上，而且特別使 $\widetilde{T}(0, 0)=\widetilde{A}$。有了這樣的一個 $\widetilde{T}$ 之後，$t=0$ 這單位線段上就有一個綿續變換，換相當於每一值 s 的點 $\widetilde{T}(s, 0)$ 在 $T(s, 0)$ 之上，而且 $\widetilde{T}(0,0)=\widetilde{A}$。根據上文證明的預備定理，這線段恰換成在 W_0 之上的，從 $\widetilde{A}$ 起始的道路 $\widetilde{W}_0$。同樣的我們知道 $\widetilde{T}$ 分別換

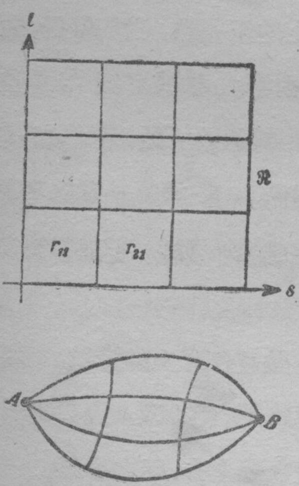


圖 106

單位線段 $s=0$ 與 $s=1$ 成 $\widetilde{A}$ 與 $\widetilde{W}_0$ 的終點 $\widetilde{B}$; 而且最後換邊 $t=1$ 成覆疊道路 $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_1$ 的終點也必定是 $\widetilde{B}$。這就證明了 $\widetilde{W}_0$ 能變狀成 $\widetilde{W}_1$。

要求得 $\widetilde{T}$, 我們先用 n 條等距的水平線與 n 條等距的垂直線把變狀矩形 $\mathfrak{R}$ 分成 n^2 個子矩形 r_{ik}:

$$\frac{i-1}{n}\leqq s\leqq\frac{i}{n},\quad \frac{k-1}{n}\leqq t\leqq\frac{k}{n},$$

然後設想 n 已如是之大,使每一矩形的像域 $T(r_{ik})$ 完全屬於(一個適當的點的)一個特出的鄰域 $\mathfrak{U}_{ik}$。根據匀綿續定理,這是可能的。我們現在把子矩形一個一個的變換到 $\widetilde{\mathfrak{R}}$, 再一步一步的求 $\widetilde{T}$ 。我們從 r_{11} 起始,選一個在 $\mathfrak{U}_{11}$ 之上的,含有 $\widetilde{A}$ 的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$; 根據 $(\dot{U}l_3)$, 這種鄰域存在 。因為 $T(r_{11})$ 完全屬於 $\mathfrak{U}_{11}$, $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$ 所以含有 $T(r_{11})$ 的像域。我們因此得着一個換 r_{11} 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{11}$ 的綿續變換 $\widetilde{T}_{11}$,使 $\widetilde{T}_{11}(0,0)=\widetilde{A}$, $\widetilde{T}_{11}(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上。然後我們選一個在 $\mathfrak{U}_{21}$ 之上的,含有點 $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},0\right)$ (r_{11} 的右下角的頂點的像點)的特出的鄰域 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{21}$, 拓撲的變換 $T(r_{21})$ 到 $\widetilde{\mathfrak{U}}_{21}$。$\widetilde{T}_{11}$ 與 $\widetilde{T}_{21}$ 這二變換在 r_{11} 與 r_{21} 的共邊上完全符合。因為這二變換換這邊的起點 $\left(\frac{1}{n},0\right)$ 成同一點,而且既然 $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},t\right)$ 與 $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},t\right)$ 在同一點 $T\left(\frac{1}{n},t\right)$ 上, 根據預備定理, $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},t\right)=\widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},t\right)$。現在再同樣的求得綿續變換 $\widetilde{T}_{31}$ 換下一個子矩形 r_{31} 到 $\widetilde{\mathfrak{R}}$, 使 $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{2}{n},0\right)=\widetilde{T}_{31}\left(\frac{2}{n},0\right)$, 而且證明 $\widetilde{T}_{21}$ 與 $\widetilde{T}_{31}$ 同樣的變換 r_{21} 與 r_{31} 的共邊。經過 n 步就求得 $r_{11}, r_{21}, \cdots, r_{n1}$ 所組成的全個的長條的一個綿續變換 $\widetilde{T}_1$,使 $\widetilde{T}_1(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上,而且變換邊 $s=0, 0\leqq t\leqq\frac{1}{n}$ 成 $\widetilde{A}$。同樣的求其餘的長條 $r_{1i}, r_{2i}, \cdots, r_{ni}$ $(i=2,3,\cdots,n)$的

變換 $\widetilde{T}_i$, 使 $\widetilde{T}_i(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上,而且 $\widetilde{T}_i(0,t)=\widetilde{A}$。既然 $\widetilde{T}_i$ 與 $\widetilde{T}_{i+1}$ 同樣的變換第 i 個與第 $i+1$ 個長條的共邊單位線段(仍根據預備定理),所以我們求得這全個的變狀矩形 $\mathfrak{R}$ 的一個綿續變換 $\widetilde{T}$, 使 $\widetilde{T}(s,t)$ 在 $T(s,t)$ 之上,而且 $\widetilde{T}(0,0)=\widetilde{A}$。

§55 覆疊形與基本羣的子羣

在底複合形 $\mathfrak{K}$ 上選一個定點 O 做閉道的起點,在覆疊複合形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上選一個在 O 之上的點 $\widetilde{O}_1$ 做閉道的起點。根據頁 219,綿續變換 G 使 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 的每一個道路類與 $\mathfrak{K}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的道路類對應。這對應是換 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 成 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的子羣 $\mathfrak{H}_1$ 的一個同構變換。

§54 中的定理 II 的第二部分已表明,與 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 中兩個非同倫的道路對應的,也是 $\mathfrak{F}$ 中非同倫的道路。這就是說,這換 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 成 $\mathfrak{H}_1$ 的同構變換並且是一一的同構變換。

覆疊複合形的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 所以與底複合形的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的一個確定的子羣 $\mathfrak{H}_1$ 一一的同構。$\mathfrak{H}_1$ 就是 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 在底複合形上印出的子羣。

但是我們要注意這子羣 $\mathfrak{H}_1$ 並非已經由覆疊複合形完全確定了。我們就要說明起點 $\widetilde{O}_1$ 的選擇對於這子羣的影響。設

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_1\{F_{12}\}+\mathfrak{H}_1\{F_{13}\}+\cdots$$

是 $\mathfrak{F}$ 按照 $\mathfrak{H}_1$ 的剖分。這裏的 $\{F_{1i}\}$ 如同頁 216 上的一樣,表示道路 F_{1i} 的道路類。若 H_1 是 $\mathfrak{H}_1$ 中的任一道路,而且 $\widetilde{H}_1$ 是在 $\widetilde{O}_1$ 點起始的覆疊道路,$\widetilde{H}_1$ 就也是閉道。因此可知,一確定的剩餘類 $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 中

的道路的覆疊道路，從點 $\widetilde{O}_1$ 起始的，都有同一終點 $\widetilde{O}_i$；這終點 $\widetilde{O}_i$ 就是在 F_{1i} 之上的，從 $\widetilde{O}_1$ 起始的道路 $\widetilde{F}_{1i}$ 的終點。所以每一剩餘類確定一個在 O 之上的點 $\widetilde{O}_i$。不同的剩餘類 $\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 與 $\mathfrak{H}_1\{F_{1j}\}$ 確定不同的點 $\widetilde{O}_i \neq \widetilde{O}_j$。因爲，否則 $\widetilde{F}_{1i}\,\widetilde{F}_{1j}^{-1}$ 是閉道，是 $\mathfrak{H}_1$ 中的一元，這却與剩餘類 $\{F_{1i}\}$ 與 $\{F_{1j}\}$ 不同的假設矛盾。既然道路 $\widetilde{F}_{11}, \widetilde{F}_{12}, \cdots$ 的終點必包括所有的在 O 之上的點，所以 $\mathfrak{H}_1$ 的右剩餘類必與在 O 之上的點成一一對應。因此，特別知道，覆疊形的葉數等於 $\mathfrak{H}_1$ 在 $\mathfrak{F}$ 中的指數 (*Index*)。

每一從 $\widetilde{O}_i$ 起始的閉道 $\widetilde{H}_i$ 都能變狀成如 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\,\widetilde{H}_1\,\widetilde{F}_{1i}$ 式的道路（例如 $\widetilde{H}_i$ 就能變狀成道路 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\cdot(\widetilde{F}_{1i}\,\widetilde{H}_i\,\widetilde{F}_{1i}^{-1})\cdot\widetilde{F}_{1i}$)；這裏的 $\widetilde{H}_1$ 是一條從 $\widetilde{O}_1$ 起始的閉道。$\widetilde{F}_{1i}^{-1}\,\widetilde{H}_1\,\widetilde{F}_{1i}$ 印成的道路是 $F_{1i}^{-1}\,H_1\,F_{1i}$，是 $\mathfrak{H}_1$ 的相配子羣 (*konjugierte Untergruppe*) $\mathfrak{H}_i = \{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$ 的一條道路。反之，$\mathfrak{H}_i$ 的每一道路都印成 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上從 $\widetilde{O}_i$ 起始的閉道。因爲如 $F_{1i}^{-1}\,H_1\,F_{1i}$ 式的道路都印成一條從 $\widetilde{O}_i$ 起始的覆疊道路 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\,\widetilde{H}_1\,\widetilde{F}_{1i}$；而且這覆疊道路也是閉道，因爲 $\widetilde{F}_{1i}^{-1}$ 從 $\widetilde{O}_i$ 到 $\widetilde{O}_1$，$\widetilde{H}_1$ 從 $\widetilde{O}_1$ 到 $\widetilde{O}_1$，$\widetilde{F}_{1i}$ 從 $\widetilde{O}_1$ 再回到 $\widetilde{O}_i$。既然 $\mathfrak{H}_i$ 的任一道路能變狀成 $F_{1i}^{-1}\,H_1\,F_{1i}$ 式的一條道路，既然這變狀能印到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上去，而且變狀時不改變道路的終點，所以 $\mathfrak{H}_i$ 的任一道路也有一從 $\widetilde{O}_i$ 起始的覆疊閉道。這就是說，若是用 $\widetilde{O}_i$ 替代 $\widetilde{O}_1$ 做 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上的閉道的起點，$\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的基本羣 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 就印成 $\mathfrak{H}_1$ 的相配子羣 $\{F_{1i}\}^{-1}\mathfrak{H}_1\{F_{1i}\}$；而且，若是 $\widetilde{O}_i$ 選擇得適當，我們就可以得着 $\mathfrak{H}_1$ 的任一個預先指定的相配子羣。所以 $\mathfrak{K}$ 的覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 確定 $\mathfrak{F}$ 的一個完

全的相配子羣類 (*eine ganze Klasse konjugierter Untergruppe*)。

現在我們要反轉來證明，每一類相配子羣也確定一個覆疊形。因此，作所有的 g 葉的覆疊形的問題就變成羣論中的下述的問題：求底複合形的基本羣的所有的指數等於 g 的相配子羣類。我們在 §58 中再說明關於有限複合形的有限葉數的覆疊形的作法。

存在的證明

I. $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的作法。設 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的任一子羣。*) 我們是要求得一個覆疊複合形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$，他的閉道的起點 $\widetilde{O}_1$ (在 O 之上的) 適當的選定之後，他的基本羣恰印成 $\mathfrak{H}$。我們能假設 O 是 $\mathfrak{K}$ 的一個單純剖分的頂點。因爲 O 若不是頂點，只需要重分 $\mathfrak{K}$ 一次，把 O 改成頂點。我們要使作出的覆疊形 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 有如下的一個單純剖分：這換 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 成 $\mathfrak{K}$ 的變換平直的換 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 的每一個單純形成 $\mathfrak{K}$ 的一個單純形。這單純剖分叫做從 $\mathfrak{K}$ 印到 $\widetilde{\mathfrak{K}}$ 上去的單純剖分。

我們用表格 (§11) 規定 $\widetilde{\mathfrak{K}}$，用某種道路類當作表格的元。

設 A 是 $\mathfrak{K}$ 的一個頂點。我們把從 O 到 A 的道路分成類，叫做 $\mathfrak{H}$ 類：若是這種的二道路 U 與 U' 所成的閉道 UU'^{-1} 屬於子羣 $\mathfrak{H}$，我們就說 U 與 U' 屬於同一個 $\mathfrak{H}$ 類。屬於 $\mathfrak{K}$ 的每一個頂點 A 有若干 $\mathfrak{H}$ 類，用

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \cdots$$

表示。子羣 $\mathfrak{H}$ 的道路組成這種的一個特別的 $\mathfrak{H}$ 類，"么 $\mathfrak{H}$ 類"。他屬

*) 爲簡單起見，現在用 $\mathfrak{H}$ 替代 $\mathfrak{H}_1$。