全国工商管理硕士入学考试辅导教材

MBA 数学

（上 册）

张天德　王　玮　孙爱珍　编著

山东大学

前　言

自1997年工商管理硕士实行全国联考以来，报考人数逐年增加。为了帮助考生在短时间内系统地复习数学知识，掌握重点，熟悉联考命题的内容，掌握解题方法和技巧，应广大考生的要求，根据教育部新修订的全国工商硕士研究生入学考试数学考试大纲编写了这本书。

本书是根据编者近几年来从事MBA数学考前辅导的教学经验编写而成的。尤其是通过1999年在山东建筑工程学院举办的MBA考前辅导班及2000年在济南新起点学校MBA考前辅导班两届应考学生的使用，学生们数学单科成绩十分理想，从而印证了本书的针对性强、选材紧扣联考大纲，在MBA联考辅导书中属佼佼者。使本书无论是在基本内容的讨论，还是题目的选择上更趋成熟。

本书共四篇，分上、下两册。上册为初等数学和微积分；下册为线性代数和概率论。第一篇为初等数学，分为四章，内容包括：代数基础知识，方程(组)，不等式(组)，数列、排列、组合、二项式定理。第二篇为微积分，分为四章，内容包括：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微分学。第三篇为线性代数，分为四章，内容包括：行列式，矩阵，向量，线性方程组。第四篇为概率论，分为三章，内容包括：随机事件和概率，随机变

量及其分布，随机变量的数字特征。每章包括五部分：一、考试内容与要求；二、内容提要；三、例题；四、习题；五、习题答案及提示。书中典型例题是仿照考试试题的形式与结构而编选的，例题解法中注重思路、方法与技巧，并随时指出解题过程中容易出现的错误。

编写本书的目的有两个：一是作为报考 MBA 研究生入学数学的复习用书；二是本书也可供各类高等学校的教师从事科研和学生学习的参考用书。

本书由张天德、王玮、孙爱珍编著。在编写过程中得到了山东大学数学与系统科学学院有关领导和老师的支持与帮助，本书的出版得到济南新起点学校可真箴校长的大力支持，在此谨向他们表示衷心地感谢！

限于水平，书中难免有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 4 月

下　册

线 性 代 数

概　率　论

目　　录

第一篇　初等数学

第二篇　微　积　分

第三篇　线性代数

第四篇　概　率　论

第二章　矩　阵

矩阵理论是线性代数的重要组成部分，矩阵的运算法则是研究近代数学以及许多应用学科不可缺少的工具．本章的主要内容为矩阵的概念、理论及运算法则．

一、考试内容与要求

1．理解矩阵的概念．

2．掌握单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵和对称矩阵以及它们的性质．

3．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，并会计算方阵的幂、方阵乘积的行列式．

4．理解逆矩阵的定义，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件；了解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求矩阵的逆．

5．掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念．

6．理解矩阵秩的概念，会用各种方法讨论矩阵的秩．

7．掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法．

8．了解分块矩阵及其运算．

二、内容提要

（一）矩阵的概念与运算

1．矩阵的概念　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 按一定次序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵(m 行 n 列矩阵). a_{ij} 叫做矩阵的元素，矩阵可简记为

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } A = (a_{ij})$$

当 $m = n$ 时，即矩阵的行数与列数相同时，称 A 为 n 阶方阵.

当 $m = 1$ 时，矩阵只有一行，称为行矩阵，记为

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \cdots \quad a_{1n})$$

这样的矩阵也常称为 n 维行向量.

当 $n = 1$ 时，矩阵只有一列，称为列矩阵，记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

这样的列矩阵也常称为 m 维列向量.

A 中各元素变号得到的矩阵叫做 A 的负矩阵，记作 $-A$，即

$$-A = (-a_{ij})_{m\times n}$$

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\mathbf{0}$.

2. 几类特殊矩阵

(1) 单位矩阵　主对角线上元素都是 1，其余元素均为零的方阵称为单位矩阵，记为 E(或 I)，即

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 对角矩阵　主对角线上元素为任意常数，而主对角线

外的元素均为零的矩阵． 若对角矩阵的主对角线上的元素相等，则称为数量矩阵．

（3）三角矩阵　主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角矩阵；主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角矩阵．上、下三角矩阵统称为三角矩阵．

（4）对称矩阵　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵．

（5）反对称矩阵　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵．

（6）正交矩阵　对方阵 $\boldsymbol{A}$，如果有 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵．

3. 矩阵的运算

（1）矩阵的相等　设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$$

如果 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

（2）矩阵的加、减法　设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.
则称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和（或差），记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$.

（3）数与矩阵的乘法　设 k 为一个常数

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=ka_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.
则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积，简称数乘，记为 $k\boldsymbol{A}$.

（4）矩阵的乘法　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 C 为矩阵 A 与 B 的乘积，记为 AB，即 $C = AB$.

(5) 方阵的幂运算　对 n 阶方阵 A，定义

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k\text{个}}\text{，称为 } A \text{ 的 } k \text{ 次幂}.$$

特别的，若存在正整数 m，使 $A^m = 0$，称 A 为幂零矩阵.

(6) 矩阵的转置　把矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换而得到的矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为 A 的转置矩阵，记为 A^T（或 A'）.

(7) 方阵的行列式　方阵 A 的元素按原来的位置构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记为 $|A|$.

若 $|A| = 0$，称 A 为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵.

4. 矩阵的运算规律

设 A,B,C 为矩阵，λ,μ 为数，m,n 为整数，且假定运算都是有意义的，则

(1) $A + B = B + A$　　(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$　　(4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$　　(6) $(AB)C = A(BC)$

(7) $A(B + C) = AB + BC$　　(8) $(B + C)A = BA + CA$

(9) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

(10) $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$　　(11) $(A^m)^n = A^{mn}$

(12) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$　　(13) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(14) $(AB)^T = B^T A^T$　　(15) $|A^T| = |A|$

(16) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$　　(17) $|AB| = |A||B|$

注　(1) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，E_m 和 E_n 分别为 m 阶和 n 阶单位矩阵，则有

$$E_m A = AE_n = A;$$

(2) $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$，从而 $AB = AC \nRightarrow B = C$；但 $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$，这里 A,B 为方阵；

(3) $AB = BA$ 一般不成立.

（二）逆矩阵

1．逆矩阵的概念

对于一个 n 阶方阵 A，如果有一个 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，则称 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

2．逆矩阵的性质

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 唯一；

（2）若 A 为可逆阵，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$；

（3）若 A 为可逆阵，则 A^T，A^{-1} 均可逆，且有 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$，$(A^{-1})^{-1} = A$；

（4）若 A、B 为同阶可逆阵，则 AB 也可逆，且有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

（5）若 A 可逆，且 $k \neq 0$，则 kA 也可逆，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

（6）若 $AB = E$ 或 $BA = E$，则 $B = A^{-1}$.

3．逆矩阵的求法

（1）利用伴随矩阵求逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

且 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则称矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 .

当 A 为可逆阵,即 $|A| \neq 0$ 时,有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

一般来说,当 A 为低阶矩阵时($n \leqslant 3$),利用 A^* 求 A 的逆矩阵比较方便、可行.

伴随矩阵的性质:

① 若 A 可逆,则 $A^* = |A|A^{-1}$;

② $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$,$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$(若 A 可逆);

③ $(AB)^* = B^*A^*$;

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

⑤ $|A^*| = |A|^{n-1}(n \geqslant 2)$.

(2) 利用初等变换求逆矩阵

$$[A \vdots E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E \vdots A^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

当 A 的阶数 $n \geqslant 3$ 时,一般用初等变换的方法求逆矩阵.

(3) 利用分块矩阵求逆

若矩阵 A 含“0”元素比较多,且可分块为以下类型:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

可考虑使用分块矩阵的逆矩阵公式求逆.

(三) 矩阵的初等变换

1. 矩阵初等变换的有关定义

(1) 初等变换　矩阵的如下三种变换称为初等行(列)变换:

① 对调矩阵的两行(列);

② 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行(列)中的所有元素;

③ 把某一行(或列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对

应元素中去.

(2) 矩阵等价　若矩阵 A 经过有限次初等变换得到矩阵 B，则称 A 与 B 等价，记为 $A \cong B$.

(3) 初等矩阵　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

2. 矩阵初等变换的性质

(1) 对矩阵 A 作一次初等行(列)变换，相当于在矩阵 A 的左(右)边乘以相应的初等矩阵.

(2) 若 A 是可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

(3) 设 A,B 均为 $m \times n$ 矩阵，A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ = B$.

(四) 矩阵的秩

1. 基本概念

(1) 矩阵的 k 阶子式　在 $m \times n$ 矩阵 A 中任选 k 行与 k 列($k \leqslant \min(m,n)$)，位于这些行列交叉处的元素按原来的次序构成一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

(2) 矩阵的秩　若矩阵 A 中存在不为零的 r 阶子式，而所有的 $r+1$ 阶子式全为零，则称矩阵 A 的秩为 r，记为 $r(A)$.

2. 矩阵秩的理论

(1) 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D_r \neq 0$，而所有含有 D_r 的 $r+1$ 阶子式(若存在的话)都为零，则 $r(A) = r$；

特别地，若 A 中有一个 r 阶子式不等于零，则 $r(A) \geqslant r$；若 A 中所有 r 阶子式全为零，则 $r(A) < r$.

(2) $r(A) = A$ 的行秩 $= A$ 的列秩；

(3) 初等变换不改变矩阵的秩；

(4) $r(A \pm B) \leqslant r(A) + r(B)$；

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则

$$r(A)+r(B)-n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$$

特别地，若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B) \leqslant n$.

3. 矩阵求秩的方法

(1) 利用定义求秩；

(2) 利用初等变换求秩　把矩阵 A 用初等变换化为阶梯形矩阵，由阶梯形矩阵直接求出原矩阵 A 的秩；

(3) 化为 A 的行向量组或列向量组求秩；

(4) 利用矩阵秩的不等式求秩，常用不等式如下：设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则

① $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$；

② $r(A \pm B) \leqslant r(A)+r(B)$，$B$ 为 $m \times n$ 矩阵；

③ $r(A)+r(B)-n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$，$B$ 为 $n \times s$ 矩阵；

④ 当 $A \neq 0$ 时，$r(A) \geqslant 1$.

(五) 分块矩阵及其运算

1. 分块矩阵的概念　将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

2. 分块矩阵的性质

(1) 若将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 分块为 $A=(A_{pq})_{s\times t}$，$B=(B_{pq})_{s\times t}$，且它们的行列分法一致，则

$$A^T=(A_{qp}^T)_{t\times s};\quad kA=(kA_{pq})_{s\times t};$$

$$A \pm B=(A_{pq} \pm B_{pq})_{s\times t}$$

(2) 若将矩阵 $A_{m\times l}$，$B_{l\times n}$ 分块为 $A=(A_{pk})_{s\times r}$，$B=(B_{kq})_{r\times t}$，且矩阵 A 的行的分法与矩阵 B 的列的分法一致，则

$$AB=(C_{pq})_{s\times t}$$

其中　$C_{pq}=\sum_{k=1}^{r} A_{pk}B_{kq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pr}B_{rq}$

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$，且 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是方阵，则 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_k|$.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$，$A$ 可逆，且 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 可逆，则

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{bmatrix}.$$

(5) 设 A,B 均可逆，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

三、例　　题

(一) 填空题

1. 设 A 是 4 阶方阵，B 是 5 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-2$，则 $|-|A|B|=$ ________，$|-|B|A|=$ ________，$|2A^{-1}|=$ ________.