ZHEJIANGSHENG

十一五

浙江省重点教材建设项目

Mathematical Modeling

数学建模

陈光亭　裘哲勇　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

数学建模

Shuxue Jianmo

陈光亭　裘哲勇　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书根据作者多年的教学经验编写而成，主要内容包括数学规划与组合优化建模、方程建模、随机方法建模、模糊和灰色系统建模，以及常用数学软件与算法等，涵盖了数学建模常用的方法和工具。每部分内容安排上不追求知识的系统性和完整性，更多地以大量建模问题实例和涉及面较广的背景素材引出需要的方法，并在此基础上简要介绍相关基础知识和基本方法的使用。各部分内容之间具有相对独立性，有利于教师在教学中根据不同的需求以及教学时数的多少进行取舍。

本书可作为一般院校大学生"数学建模"课程的教材，也可作为指导大学生数学建模竞赛的培训参考书，以及供相关科技工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/陈光亭，裘哲勇主编．—北京：高等教育出版社，2010.2

ISBN 978-7-04-028567-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈…②裘… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 003618 号

策划编辑 李晓鹏 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 赵 阳
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 刘 莉
责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总　　机 010-58581000

经　　销 蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷 保定市中画美凯印刷有限公司

开　　本 787×960 1/16
印　　张 26.75
字　　数 500 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版　　次 2010年2月第1版
印　　次 2010年2月第1次印刷
定　　价 31.40元

物料号 28567-00

前言

随着现代科学技术的迅速发展,特别是计算机技术的迅速普及与发展,数学的应用范围在迅速扩大,已经从传统的物理、力学以及一般工程技术范围迅速扩展到医学、生态、气象、经济、社会科学等领域,数学已经成为关系国民经济技术基础和国家实力的重要学科。今日的数学已经不仅仅是纯粹的理论,同时还是一种普遍可行的关键技术,成为所有科学不可缺少的工具和高技术的核心成分。

用数学的方法去解决实际问题,必须运用定量分析的方法,在数学向技术转化的链条上,数学建模以及在此基础上的计算和模拟处于中心环节。建立一个恰当合理的数学模型,需要一定的数学工具,更需要运用数学工具的能力,需要一定的创新能力,更需要参与者有较高的综合素质。传统的以传授知识、强调演绎推理为主的数学教学很难满足时代的要求,数学建模课程的开设和大学生数学建模竞赛的开展正好弥补了传统数学教学的不足。数学建模教学是一种创新型人才培养的重要手段已经是不争的事实。

作为一所地方性高等院校,杭州电子科技大学开展数学建模活动始于1995年。学校最初开设数学建模课程只是为了让部分优秀学生参加大学生数学建模竞赛,但学校很快认识到这项活动对人才培养的重要意义,因此,陆续面向全校学生开设了有关数学建模的不同层次不同形式的系列课程,所开课程深受学生欢迎,修读数学建模课程的学生数量从最初的几十名、一两个班到目前全校每年多达2000名左右,组成十几个教学班,学生中形成了浓厚的数学建模氛围。学校在开设课程的基础上,面向全校组织数学建模竞赛,并选拔学生参加全国和美国建模竞赛。自参加全国和美国数学建模竞赛以来,我校在历年的竞赛中均取得了优异的成绩,得到了各方面的高度评价。

考虑到地方性高校学生的具体情况,我校数学建模教练组从1997年开始编写适用的数学建模入门教材在校内使用,在使用过程中多次修改更新,逐步形成了现在这本教材。本教材的内容安排主要考虑地方性普通高校学生的实际情况,首先补充建模常用的数学基础和方法,并把大小不同的建模案例和应用方法贯穿在每一章内容之中,以利于学生尽快熟悉数学建模,并掌握其基本方法。教材共分八章,内容上涉及简单优化模型、数学规划、组合优化、微分方程、随机方法、模糊数学与灰色系统等建模常用的方法和必要的基础知识,并在最后一章介绍建模常用的数学软件的使用方法以及一些应用实例。教材各块内容相对独立,使用时可以根据实际情况选取所需章节。教材中出现的案例,有的来自于其他已经出版的书籍或杂志并经作者加工整理,也有的直接来自于作者的科研成

果，有关参考文献全部列于书末。

本教材的编写由杭州电子科技大学数学建模教学团队集体完成，其中第1章由陈光亭编写，第2、5两章由裘哲勇编写，第3章由李炜编写，第4章由沈灏编写，第6章由程宗毛编写，第7章由李承家编写，第8章由张智丰编写，并由陈光亭最后统稿完成。数学建模课程不同于其他课程，在内容的选取和安排上很难有统一做法，教材的编写难度较大。我们的教材虽然在校内使用多年，但由于编者水平和能力所限，错误与不当之处在所难免，此次出版，也是希望能得到专家和读者的批评指正，以利于我们进一步修订。

在本书即将正式出版之时，作者要特别感谢杭州电子科技大学最早参加数学建模教学工作的张皓、王祖越、包立平等老师，他们的工作为杭州电子科技大学数学建模工作以及本书的编写奠定了良好基础。

本书的完成得到了杭州电子科技大学校领导、教务处、理学院以及浙江省教育厅高教处的大力支持，全国大学生数学建模竞赛组委会秘书长、清华大学数学系谢金星教授对书稿进行了审阅，并提出了诸多宝贵意见和建议，高等教育出版社数学分社李艳馥社长对该书的出版也给予大力支持和帮助，在此对他们表示衷心感谢。

编者

2009年8月

郑重声明

目　录

第1章 绪 论

1.1 什么是数学建模

工厂要定期订购各种原料,存在仓库里供生产之用;车间一次加工出一批零件供装配线每天生产之需;商店成批购进各种商品,放在货柜里以备零售.这些情形中,若货物贮存量过大,则贮存费用太高,造成资金积压;贮存量太小,则可能无法及时满足生产或经营需求.所以这里有一个货物贮存量多大才合适的共同问题.要解决这类问题,不能光凭经验拍脑袋,而应该根据生产上的一些实际数据,利用合理的数学方法和工具进行量化计算,才能取得一个合适的结果.

游泳队要从所有队员中选出4人参加游泳接力赛,每人一种泳姿,而且4人的泳姿各不相同,问选哪4人按什么次序组成接力队可以使游泳成绩最好?也许有人会提出用穷举的方法选出最佳搭配,但是计算量可能会很大.如果队中共有10名队员,则可能的选择有5040种,这显然不是一个好方法.对于这个问题,可以根据队员平时各项目的成绩以及接力赛的有关规定建立起一个整数规划问题来进行计算求解.

上面所提到的问题的实际背景来自不同领域,但有一个共同点,就是问题来自于现实世界,都有一个明确的目的,为了解决这些实际问题,我们需要一些数学工具和方法,先把问题翻译成一个数学问题,然后用数学方法甚至计算机工具来加以求解.这实际上就是一个数学建模的过程.

一般而言,所谓数学建模,就是对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据实际问题的内在规律,进行一些必要的简化和抽象,然后运用适当的数学语言、方法和工具,把现实问题描述为一种数学结构,并对之用数学方法加以求解.用来描述实际问题的数学结构,称为数学模型(Mathematical Model),而建立数学模型并加以求解的整个过程称为数学建模(Mathematical Modeling),简称为建模.

数学建模这个词出现的时间并不是很长,大概也就是三十来年时间,但数学建模本身并不是什么新东西.可以说,自从有了数学并要用数学去解决实际问题,就有了数学建模过程.两千多年以前创立的欧几里得几何,17世纪发现的牛顿万有引力定律,都是科学发展史上数学建模的成功范例.数学建模过程中一般都要用证明或计算等技术手段求解数学问题,并通过与实际情形比对来验证所得结果,必要时要对数学模型进行反复的修改完善.建模过程中大量的计算往往

是不可缺少的,过去由于没有高性能计算机,使得计算能力受到局限,在一定程度上限制了数学建模这一强有力方法的应用和发展.随着计算机技术的发展和超级计算机的出现(特别是从20世纪80年代开始),使数学建模这一方法获得了如虎添翼般的飞速发展.

数学建模在现实社会中的重要意义日益明显,数学的应用正在向一切领域渗透,各行各业日益依赖于数学,甚至可以说当今社会正在日益数学化.传统工程技术领域的信息化改造以及大量新工艺、新技术的涌现,使数学建模大有用武之地,数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键手段;高新技术领域,数学建模是必不可少的工具,有人说"高技术本质上是一种数学技术";数学向诸如经济、人口、生态等学科领域的渗透,产生了计量经济学、人口控制论和数学生态学等新兴交叉学科.

数学建模所面临的实际问题是多种多样的,所用到的数学方法也是五花八门,没有定律的.问题不同,目的不同,所用的分析方法就会不同,所用到的数学方法也就不同,建立起来的数学模型也不同.数学模型可以按照不同的分类方法分成多种类型.按照模型的应用领域分类,数学模型可以分成人口模型、交通模型、环境模型、生物数学模型、数量经济学模型等.按照建立模型所用数学方法分类,可以分为初等模型、几何模型、微分方程模型、统计模型以及最优化模型等.按照模型中变量的表现特性分类,可以分成确定性模型、随机性模型、模糊性模型,或者静态模型、动态模型,或者离散模型、连续模型.

数学建模课程的学习不同于其他数学课程的学习.它没有完整的理论和固定的内容,仅有一些纲要的引导和常用方法介绍,不同的教材在内容上也可以有很大差异.学习数学建模,就是要学会**到什么地方,找到什么样的数学方法,来解决什么样的实际问题**.这看起来是容易的,但实际上也正是数学建模的困难所在.学习数学建模,不仅要注意培养自己理解实际问题的能力、抽象分析的能力,而且还要训练自己应用各种知识、方法和技能的能力.

1.2　怎样建立一个完整的数学模型

一个好的数学模型应该具有几个特点.首先,好的模型对所给问题有比较全面的考虑.在全面考虑影响所研究问题的各种因素基础上,选取主要因素计入模型,并考虑根据其他因素对模型进行修正.在全面考虑的基础上,善于在主要因素和次要因素之间,在简单与复杂之间取得适当的平衡.其次,好的模型应有一定的创新.无论是采用现成的模型还是自己创造的新模型,创新始终是建立模型的灵魂.第三,所得结果应具备合理性.数学模型是对实际问题的数学描述,其结果又要应用到实际问题中去,与实际情况必须相符,经得起实践的检验.

数学建模需要经过哪些步骤,并没有一个固定模式,但一般而言,建立一个完整的数学模型,大致上有以下过程.

了解背景,澄清问题. 数学建模所要解决的问题都来自于实际问题,在建立模型之前,应当了解实际背景知识,明确建模目的,搜集必要的信息,弄清对象的主要特征,抓住问题的本质.在此基础上,初步确定用哪种类型的模型,大致明确要用到的数学方法.

如美国数学建模竞赛1993年A题是有机混合物合成堆肥问题,要求判别堆肥速率和有机物组成(生菜、碎食物、废报纸)是否有一定的关系.该题显然是一个统计分析方面的问题,但如果一开始就直接用相关分析等方法进行显著性检验,其结果不会有很大说服力,因为真菌的生长活力(决定堆肥速率)与碎食物、生菜和废报纸之间的配比并无直接关系,直接做统计分析所得到的结果只是一个数学结果,而实际意义并不明确.事实上,微生物学知识告诉我们,真菌的生长繁殖与原料中C、N元素含量比、环境温度湿度等有密切关系,充分了解这些背景知识,就能以各种元素的含量为中间桥梁把有机混合物组成和真菌生长活力联系起来,在此基础上找出决定堆肥速率的真正因素.

数学模型应当是对问题本质的一般性描述,建立模型首先要分析问题的本质,抓住了本质的东西,建立的模型才具有合理性.

分析因素,合理假设. 数学建模所面临的问题是完完全全的实际问题,其中总会有多种因素与所研究对象关联,但这些因素有主次之分.在建立合理的模型之前,必须分析清楚哪些是主要的、本质的因素,哪些是次要的、非本质的因素.实际问题往往非常复杂,为了能够建立数学模型,需要进行一定的理想化或者简化.进行假设的目的,就是抓住主要因素和最本质的因素,忽略非本质因素,使问题简化以便进行数学描述.

全国数学建模竞赛2000年A题为DNA序列的分类问题,DNA序列中碱基的含量是其重要特征之一,为了简化问题,这里可以假设特定的一种生物的碱基含量服从正态分布.又如美国数学建模1992年的B题为应急设施的最佳选址问题,为了应急系统设计的方便,这里可以假设:从派遣中心到事故发生地点的距离以两地横坐标之差和纵坐标之差的和为度量,修理队总以每小时30千米的平均速度行驶,而且修理队在紧急情况下随时可以正常出发.这里的假设都是一种理想化、简单化的约定,实际情况肯定要复杂得多,但如果要完全真实地考虑实际情形,则可能根本无法建立模型,而且这样的简化,基本上也已经抓住了问题的本质.

分析问题,建立模型. 模型的建立是整个数学建模中最关键也是最核心的部分.根据建模的对象和目的,分析问题的本质,找出所有相关因素,抓住主要方面,采用合适的数学方法进行定量研究.数学建模中常用的数学方法有最优化方

法、微分方程、统计分析、数值计算和插值拟合等方法.此外,在处理一些复杂问题时,计算机模拟以及神经网络等也是比较常用的建模工具.

面对一个实际问题,究竟用什么样的方法来建立数学模型,并没有一个绝对的标准.不同的人可能会用不同的方法,同时,同一个问题,可能要用几个阶段来完成模型,不同阶段则用到不同的方法,组合起来形成完整模型.数学模型的形式可以是多种多样的,可以是表格的形式,也可以是图形的形式,不一定非得有数学公式才算是数学模型.

建立起来的数学模型是否能够符合实际,也就是是否合理,是至关重要的,一个模型的优与劣,最根本的是在于是否采用了恰当的方法,合理地描述了实际问题,而不在于是否用到了高深的数学工具.

求解模型,分析检验.有了数学模型以后,当然就要求解模型.求解过程中,若是问题数据量比较大,则还需要用计算机工具,在使用计算机求解时可以自己编写算法程序,也可以采用一些现成软件包,这应当根据问题本身来决定.

求解模型,得到数学结果之后,问题并未完全解决.数学建模的过程是一个"实际—数学—实际"的过程,在建立模型的过程中我们往往进行了一些简化或者近似,而且模型求解中一般仅仅用到了问题中给出的数据,因此模型的结果是否能够符合实际情况,则需要经过仔细的分析检验.

分析检验可以从几个方面入手.

模型对数据的稳定性和敏感性分析.数学模型依据已有的数据和相关其他信息建立,其作用在于能够从已知信息预测和推断未知的东西,因此,一个好的数学模型的结果对数据应该有较好的稳定性,这样才能使模型有广泛的适用性.比如,全国数学建模竞赛1993年B题是要求根据12支足球队的一组比赛成绩来给出球队排名,用某种方法依据现有数据给出排名结果后,可以随意改变一两场比赛结果,然后求出新数据下的排名情况,观察排名变化情况,如果变动很小,说明模型对原始数据的稳定性比较好.数据分析的另一个方面是对模型中所包含各种参数的敏感性进行考虑.通过参数敏感性考虑可以分析各种因素对结果影响的显著程度,同时也有利于分析模型跟实际情况的符合度或者模型的合理性.

统计检验和误差分析.数学模型是对实际问题的一个近似描述,因此数学模型所预测的结果与实际数据会有或多或少的偏差,这种偏差可能来源于实验观测,也可能来源于模型的不完善.为搞清楚偏差的来源,应该对残差,即模型的计算结果与实验数据的偏差的分布进行统计分析.如果残差服从均值为0且方差很小的正态分布,则说明模型与实际情况很吻合,如果残差分布的均值不为0,则说明模型可能还需要进一步改进和修正.另外,数据测量中不可避免地存在各种因素造成的误差,由于误差的传递和积累,依赖于测量数据的模型所得到的结

果必然有一定的不准确度，因此，有必要利用误差估计方法来估计结果的误差范围.

不同模型间的对比分析. 数学建模是根据实际问题提出新的模型或在原来一般模型基础上提出新的模型，提出的模型可能是一个模型，也可能是几个不同的模型. 模型分析时，可以对不同模型进行比较，判断最新模型是否具有更大的合理性和优越性. 如前面提到的球队排名问题，可以用计算机反复模拟，对几种不同排名方法的结果与事先设定的强弱顺序进行比较，从而确定什么方法更具有优越性.

模型分析中还应当考虑每个模型的适用条件、模型与实际问题之间的适用性和可行性，分析什么样的模型有更广泛的适用性. 如人口模型是一个典型的微分方程数学模型，最初的 Malthus 模型，是在人口增长率不变的假设下得到的，用较长时期的人口数据稍做分析，即可以发现这个假设的不合理性，为了克服这种不合理性，有了 Logistic 模型，这个模型假设人口增长率随着人口总数的增加而出现下降. Logistic 模型比 Malthus 模型更具有合理性，但是这两个模型都是建立在人口增长率由人口总数决定这样一个假设之下，而数据分析可以发现，人口增长率不仅仅决定于人口总数，更重要的是与人口年龄分布和性别分布有密切关系，因此，又有了考虑人口年龄分布的 Leslie 模型.

为了检验模型对实际情形的适用性，可以用计算机模拟的方法，产生大量模拟数据，用所给出方法进行求解，将得到的结果与实际情形进行比较，观察结果的合理性，确定模型是否适用于实际问题.

改进模型，分析推广. 把模型求解与检验分析的结果翻译到实际问题，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际情形不符，则需要对模型进行改进. 模型结果与实际不符，问题常常出在模型的假设上，可能由于假设了过于苛刻的条件，或者忽略了一些不该忽略的因素，使所建立模型与实际相差较远，这时需要对模型进行修改、补充、完善. 模型的改进和完善对于模型是否真的在实际当中有用是非常关键的，有时还可能需要多次反复才能达到比较满意的程度.

模型的推广，是针对模型的适用性而言的. 一个好的模型不应该对题中所给出数据的结构有过多的依赖性，而应该是对一般问题本质的描述. 另一方面，数学模型的应用价值取决于其广泛适用性，因此，模型推广是扩大模型的应用范围，从而提高其使用价值.

对已经建立的模型，还应该进行优缺点分析，这是对模型特性和本质的更深刻认识. 在进行优缺点分析时，可以从模型的精确性、实用性，以及对各种因素的考虑等方面对模型进行分析评价. 一般来说，所得模型仅依靠问题所给数据和信息，不合理性是难以避免的，阐明这些不合理之处，正是表明对问题本质有着比较清醒的认识.

1.3 关于大学生数学建模竞赛

教育的任务是要教给学生最基本的知识和应用的能力，特别是要教给学生在今后的学习和工作中能展现其智慧和能力的思想、方法和顽强的意志力. 数学科学对经济竞争力至关重要，数学是一种关键的，普遍适用并授人以能力的技术，数学除了能够锻炼人们敏锐的理解力和分析能力以外，还具有训练能全面考虑科学系统的头脑的开发功能. 数学的重要地位已经得到人们的普遍认同，但传统的数学教育还不能够完全适应社会、经济、科技的迅速发展和变化的形势，学生不能充分了解数学对其今后一生的事业和生活的重要性，许多学生学习数学的积极性下降了. 数学建模教育在很大程度上能够弥补传统数学教育的这种不足，数学建模的教学和竞赛也就应运而生了.

大约在20世纪70年代末、80年代初，英国著名的牛津、剑桥等大学专门为研究生开设了数学建模课程，并创设了牛津大学与工业界研究合作的活动. 差不多同时，欧美一些工业发达国家开始把数学建模的内容正式列入研究生、大学生甚至中学生的教学计划，并于1983年开始举行两年一次的“数学建模和应用的教学国际会议”(International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications, ICTMA).

除了数学建模教学，人们注意到竞赛实际上也是一种培养学生的很好的教学活动，能否通过举行竞赛来适应学生的这种需要，同时又能推动数学教学的改革？1983年，美国有些大学教授提出创办一个和传统的数学竞赛不同的应用数学类型的竞赛，经过一年多的讨论，教授们的建议得到了认可，并得到美国科学基金会的资助，于1985年在美国创办了一个名为“数学建模竞赛”(Mathematical Competition in Modeling 后改名为 Mathematical Contest in Modeling，缩写均为MCM)的一年一次的大学水平的竞赛. 我国大学生从1989年开始就组队参加美国的MCM，参赛规模不断扩大，并取得了优异的竞赛成绩. 1990年前后国内开始组织地区性大学生数学建模竞赛，1992年起我国工业与应用数学学会开始创办全国性的大学生数学建模竞赛，特别是到了1994年，教育部把全国大学生数学建模竞赛确定为少数几项全国大学生课外学科性竞赛活动之一，并得到了各级教学行政领导、广大师生以及企业界的积极响应和支持. 从那时开始，全国大学生数学建模竞赛发展迅速，参赛规模越来越大，已经成为每年最重要的大学生学科性竞赛之一.

和传统数学竞赛彻底闭卷的个人的竞赛方式完全不同，MCM是一种完全开放的团队比赛. MCM每年的竞赛题是若干个来自不受限制的任何领域的实际问题(美国数学建模竞赛的竞赛题最初分为A、B两个题目，一般其中一个为偏连