

21

世纪高等院校教材

概率论与数理统计

(第二版)

四川大学数学学院 组编
刘晓石 陈鸿建 何腊梅 编著

 科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

(第二版)

四川大学数学学院 组编

刘晓石 陈鸿建 何腊梅 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要针对理工类非数学专业和管理科学类大学生学习概率统计的需要而编写. 内容包括: 随机事件和概率, 离散型随机变量和分布, 连续型随机变量和分布, 数字特征, 大数定律与中心极限定理, 抽样分布, 参数估计, 假设检验, 方差分析与回归分析等. 每章末设综合例题并附有相当数量的练习题, 层次有浅有深, 以供选用. 书后有一系列数值表及习题答案.

本书可作为高等学校非数学专业的理工、管理科学类概率统计课的教材, 亦可作为工程技术人员和大学生考研复习的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘晓石, 陈鸿建, 何腊梅编著. —2版. —北京: 科学出版社, 2005

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-014012-5

I. 概… II. ①刘… ②陈… ③何… III. ①概率论-高等院校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 088771 号

责任编辑: 杨 波 姚莉丽 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005年1月第 二 版 印张: 19 3/4

2005年1月第八次印刷 字数: 374 000

印数: 24 301—32 300

定价: 22.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

第二版前言

本书自 2000 年出第一版以来,经过几年的使用,使我们积累了不少经验,也发现了一些不足之处.在广泛征求读者意见的基础上,结合近年来考研大纲的要求,我们对本书又做了不少修订,努力使本教材体系更加完整,概念更加通俗易懂,例题更加丰富,更有利于教学.具体地,与第一版比较,第二版做了以下修改:

1. 更换和新增了一些例题(比如例 2.2.2,例 2.6.3,例 4.4.7 等),以利于学生掌握概率统计的思维方式及解题技巧;
2. 在第 2 章中明确了对几何分布的介绍以及在第 3 章中增加了对两个随机变量之差的分布公式及例题;
3. 重新编写了矩估计一节,以便于初学者掌握这种估计法的基本思想;
4. 订正了第一版的一些疏漏之处.

根据我们的经验,讲授本书 1~8 章内容约需 50 个学时,若再加上必要的习题课,约需 60 个学时.

编者

2004 年 9 月

第一版前言

概率论与数理统计是高等学校理工及管理科学类大学生的一门必修的基础课程,它在自然科学及社会科学的各个方面有着极其广泛的应用.本书是以教育部最新颁布的高等学校非数学专业类的数学课程教学的基本要求为依据编写的,是对四川大学概率统计教研室多年从事这方面教学工作的一个总结.

本书主要是作为高等学校非数学专业的理工及管理科学类概率统计课的教材,亦可作为工程技术人员以及大学生考研复习的参考用书.

为加强学生数学素质的培养,本书在内容安排上作了以下处理:(1)尽力以实际例子引入概率统计的基本概念、基本方法,理论推导力求简明扼要;(2)每章后安排综合例题并配以精心挑选的适量习题,以利于学生学习及基本运算能力的培养;(3)离散型及连续型随机变量分别单独列章讨论,便于初学者掌握;(4)尽力联系实际,注重提高学生运用概率统计方法解决实际问题的能力;(5)按照国家标准,采用规范的概率统计用语.

全书共分9章,由刘晓石主笔,陈鸿建、何腊梅参与编写.具体章节的编写人员是:刘晓石编写第1~6章,陈鸿建编写第7章,何腊梅编写第8~9章.刘晓石统稿.

概率统计的课程建设是四川省重点课程建设项目之一.在本书编写过程中,得到了四川大学教务处和数学学院领导的大力支持,同时,也得到马洪教授的热情帮助.在这里谨表示衷心的感谢.

限于编者的水平,书中难免有不妥之处,衷心欢迎读者批评指正.

编者

2000年1月

目 录

第 1 章 随机事件及概率	1
1.1 随机事件及运算	1
1.2 频率与概率	5
1.3 等可能概型	9
1.4 条件概率	15
1.5 事件的独立性	21
1.6 综合例题	25
习题 1	28
第 2 章 离散型随机变量	32
2.1 随机变量	32
2.2 一维离散型随机变量	33
2.3 一维分布函数	42
2.4 二维离散型随机变量	43
2.5 条件分布与随机变量的独立性	48
2.6 随机变量函数的分布	52
2.7 综合例题	55
习题 2	61
第 3 章 连续型随机变量	64
3.1 一维连续型随机变量及其分布	64
3.2 几种常用的连续型随机变量	68
3.3 二维连续型随机变量及其分布	74
3.4 条件分布与随机变量的独立性	80
3.5 随机变量函数的分布	85
3.6 综合例题	97
习题 3	102
第 4 章 随机变量的数字特征	106
4.1 数学期望	106
4.2 方差	114
4.3 几个重要分布的数学期望与方差	117
4.4 矩、协方差及相关系数	120
4.5 分位点、众数及其他数字特征	131
4.6 综合例题	134

习题 4	138
第 5 章 大数定律与中心极限定理	143
5.1 切比雪夫不等式	143
5.2 大数定律	144
5.3 中心极限定理	147
5.4 综合例题	151
习题 5	153
第 6 章 数理统计基本知识	156
6.1 总体与样本	156
6.2 直方图、条形图及经验分布函数	157
6.3 统计量及三种常用分布	163
6.4 抽样分布定理	169
6.5 综合例题	175
习题 6	177
第 7 章 参数估计	179
7.1 点估计	179
7.2 估计量的评选标准	187
7.3 区间估计	193
7.4 综合例题	206
习题 7	210
第 8 章 假设检验	214
8.1 基本概念	214
8.2 一个正态总体参数的假设检验	217
8.3 两个正态总体参数的假设检验	223
8.4 $0-1$ 分布参数的假设检验	229
8.5 总体分布的 χ^2 检验法	230
8.6 综合例题	234
习题 8	237
第 9 章 方差分析与回归分析	240
9.1 单因素试验的方差分析	240
9.2 双因素试验的方差分析	246
9.3 一元线性回归	251
9.4 多元线性回归简介	262
9.5 综合例题	264
习题 9	267
习题答案	270
参考文献	283
附表 1 标准正态分布表	284

附表 2	泊松分布表	285
附表 3	t 分布表	287
附表 4	χ^2 分布表	289
附表 5	F 分布表	293
附表 6	相关系数检验的临界值表	305

第 1 章 随机事件及概率

在自然界及人类的社会活动中,可以观察到各种现象.这些现象大体上可以分为两种类型:一类是确定性现象,例如天体的运行,电荷的排斥与吸引,一定气压下液体的沸腾温度等等,只要在一定条件下进行观察或试验,其结果是确定的,是人们可以预知的.另一类现象则是不确定性现象,人们在未作观察或试验之前,并不能预知其结果.例如,向桌上抛一枚硬币,我们不能预知向上的是正面还是反面;随机地找一户家庭调查其收入情况,我们亦不能预知其收入是多少.但另一方面,对这些不确定性现象进行大量、重复的观察时,人们会发现,其结果会出现某种“统计规律性”:重复抛一枚硬币多次,出现正、反两面的次数大致会各占一半;调查多户家庭,其收入会呈现“两头小,中间大”的状况,即处于中间状态的是大多数.

这种在每次试验中呈现不确定性,而在大量重复试验中又呈现某种统计规律性的现象叫随机现象.概率统计就是研究随机现象并揭示其统计规律性的一个数学分支,它在自然科学及社会科学的诸多领域都有着广泛的应用.

1.1 随机事件及运算

1.1.1 随机试验

对随机现象进行研究时,人们通常要进行大量的观察、试验.如果试验具有以下三个特点则称之为**随机试验**:

- (i)可以在相同条件下重复进行;
- (ii)试验结果不止一个,且可以预知一切可能的结果的取值范围;
- (iii)试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验是一种含义较广的术语,它包括对随机现象进行观察、测量、记录或作科学实验等,以后简称为试验.下面是几个随机试验的例子.

例 1.1.1 掷一枚骰子,记录其点数.

例 1.1.2 记录某电话传呼台一小时内收到的呼叫数.

例 1.1.3 掷二枚硬币,记录正、反面出现情况.

例 1.1.4 一天中任取一时刻,记录下当时的气温.

例 1.1.5 把一尺之棰任截成三段,记录各段长度.

1.1.2 样本空间及随机事件

既然随机试验的结果不止一个,且能知道一切可能的结果的取值范围,我们就可以把一切可能的结果用集合的形式写出,记为 Ω ,称之为样本空间;组成样本空间的元素称为样本点,记为 ω . 对应于前面几个随机试验,可分别写出样本空间如下:

在例 1.1.1 中, $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

在例 1.1.2 中, $\Omega_2 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

在例 1.1.3 中, $\Omega_3 = \{(-, -), (-, +), (+, -), (+, +)\}$, 这里“-”表示出现反面,“+”表示出现正面,“(-, -)”表示第一枚硬币出现反面,第二枚也出现反面,其余类似.

在例 1.1.4 中, 设当天最低气温为 $a^\circ\text{C}$, 最高气温为 $b^\circ\text{C}$, 则 $\Omega_4 = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 或 $\Omega_4 = [a, b]$.

在例 1.1.5 中, $\Omega_5 = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0 \text{ 且 } x + y + z = 1\}$.

从上面这些例子可以看到,样本空间可以是有限集或无穷集,可以是一维点集或多维点集,可以是离散点集亦可以是欧氏空间的某个区域. 有时候,为了数学处理方便,还可以把样本空间作适当扩大. 例如,例 1.1.4 中,可以取 $\Omega_4 = (-273^\circ\text{C} (\text{绝对零度}), +\infty)$, 若有必要,甚至可以取成 $(-\infty, +\infty)$.

在实践中,人们常需要研究由样本空间中满足某些条件的样本点组成的集合,即关心于满足某些条件的样本点在试验后是否会出现. 例如,在汛期,水文站关心的是江河水位是否达到或超过警戒水位 H_0 ; 抽查产品时,检验人员关心的是产品某方面指标是否达到合格标准,等等. 我们称样本空间 Ω 中满足某些条件的样本点构成的子集为**随机事件**,简称**事件**. 通常用 A, B, C, \dots 表示. 若试验后的结果 $\omega \in A$, 则称事件 A 发生, 否则称 A 不发生. 只含有一个样本点 ω 的事件叫**基本事件**, 记为 $\{\omega\}$.

样本空间 Ω 也是它自己的子集,因而也是事件,它叫**必然事件**; 空集 \emptyset 中不含 Ω 中任何元素,它叫**不可能事件**. 例如,在例 1.1.1 中, 设 A 表示“掷一枚骰子,出现的点数 ≤ 6 ”, 则 $A = \Omega$, 是必然事件; 设 B 表示“出现 8 点”, 则 B 是 Ω 中空子集, 因而不可能事件; 设 C 表示“出现偶数点”, 则 $C = \{2, 4, 6\}$, 若实际掷出 2 点, 我们便说事件 C 发生了; 设 D 表示“掷出 2 点”, 则 $D = \{2\}$ 是基本事件. 显然,一切事件均可分解为若干基本事件的并集,而基本事件则不可再分.

1.1.3 事件之间关系及运算

随机事件是一个集合,因此事件之间关系及运算可以按集合论中的知识

处理,但应根据“事件发生与否”给出它们在概率论中的提法.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生,则导致事件 B 发生,即 A 中每个样本点都属于 B ,则称 A 含于 B 或 B 包含 A ,记为 $A \subset B$.若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

易知 $A \subset B$ 的等价说法是:若 B 不发生,则 A 必不发生.对于任何事件,有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

2. 事件的和(并)

设 A, B 为两事件,则事件“ A 发生或者 B 发生”记为 $A \cup B$,称为 A 与 B 的和(并)事件.它是由 A, B 中一切样本点共同组成的集合.

一般地, n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$,可列个事件 A_1, A_2, \dots 的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,它们都表示所列诸事件中至少有一个发生.

3. 事件的积(交)

设 A, B 为两事件,则事件“ A 与 B 都发生”记为 $A \cap B$ 或 AB ,称为 A 与 B 的积(交)事件.它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.

一般地, n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 之积记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$;可列个事件 A_1, A_2, \dots 之积记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,它们都表示所列诸事件全都发生.

4. 事件的差

设 A, B 为两事件,则事件“ A 发生但 B 不发生”记为 $A - B$,称为 A 与 B 之差,这是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合.

例如,参军体检中,设 A 表示“身高合格”, B 表示“血压合格”,则 $A - B$ 表示“身高合格但血压不合格”.

5. 互斥(不相容)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \emptyset$,则称 A 与 B 为互斥事件,或不相容事件,这时 A 与 B 没有公共的样本点.显然,不同的基本事件是互不相容的.

6. 互逆(对立)事件

设 A, B 为两事件,若 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$,则称 A 与 B 为互逆事件,或对立事件,这时 B 叫 A 的逆事件,记为 \bar{A} ,即 A 不发生.显然,这时有 $B = \bar{A}$, $A = \bar{B}$,于是易知,若 A, B 是任意两事件,则

$$A\bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega, A - B = A\bar{B}, \overline{\bar{A}} = A.$$

例如,设 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{2, 4, 6\}$,则 A 与 B 互逆, A 与 C 互斥,且易知 $B - C = B\bar{C} = \{8, 10\}$.

为了直观,人们还常用图形法表示事件的运算,如果用平面上的矩形区域表示样本空间 Ω ,用圆形区域表示事件 A, B ,则它们之间的关系及运算可表示如图 1.1.

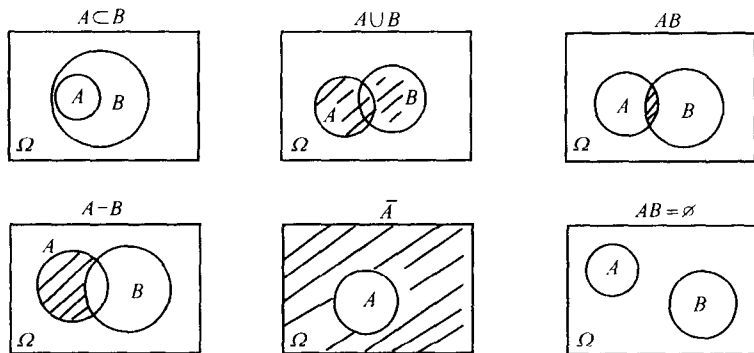


图 1.1

和集合论中运算一致,事件间的运算有以下性质:

- 1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.
- 2) 结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
- 3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- 4) 德·摩根(De Morgan)律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

对于任意多个事件,有

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i.$$

例 1.1.6 某灯泡厂取样检查出厂灯泡的寿命,设 A 表示“灯泡寿命大于 1500 小时”, B 表示“灯泡寿命在 1000 到 2000 小时之间”,请用集合形式写出下列事件: $\Omega, A, B, A \cup B, AB, A - B, B - A$.

解 $\Omega = [0, +\infty), A = \{x | x > 1500\} = (1500, +\infty),$
 $B = \{x | 1000 \leq x \leq 2000\} = [1000, 2000], A \cup B = [1000, +\infty),$
 $AB = (1500, 2000], A - B = (2000, +\infty),$
 $B - A = [1000, 1500].$

例 1.1.7 甲、乙、丙三人各向靶子射击一次,设 A_i 表示“第 i 人击中靶子”, $i = 1, 2, 3$. 试用事件的运算关系表示下列事件:(1)仅有乙未击中靶;(2)

甲、乙至少一人击中而丙未击中靶子；(3)至少两人击中靶；(4)靶上仅中一弹。

解 (1)仅有乙未击中靶： $A_1 \bar{A}_2 A_3$ ；

(2)甲、乙至少一人击中，而丙未击中靶： $(A_1 \cup A_2) \bar{A}_3$ ；

(3)至少二人击中靶： $A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$ ；

(4)靶上仅中一弹： $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 。

例 1.1.8 一工人生产了 n 个零件，设 A_i 表示“第 i 个零件是正品”($i = 1, 2, \dots, n$)。试用文字叙述下列事件：(1) $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ，(2) $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$ ，(3) $\bigcup_{i=1}^n [\bar{A}_i \cap (\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n A_k)]$ 。

解 (1) $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ： n 个零件全是正品；

(2) $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ ：至少有一个零件不是正品；

(3) $\bigcup_{i=1}^n [\bar{A}_i \cap (\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n A_k)]$ ：仅有一个零件不是正品。

1.2 频率与概率

1.2.1 频率及其性质

一个随机试验有多个可能的结果，但人们在实践中常常发现，各种可能的结果出现的机会并不尽相同。就是说，在多次重复试验中，有些结果出现的次数明显要多些，有些则要少些，它们具有统计规律性。例如，我国人口中具有 O 型血的人数明显地高于其他血型。为了揭示这种规律性，我们在下面给出一个定量的描述。

定义 1.2.1 在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 k 次，则称 k 为事件 A 发生的频数，称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A) = \frac{k}{n}$ 。

由这个定义，易知频率具有以下性质：

(i) $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ；

(ii) $f_n(\Omega) = 1$ ；

(iii) 若 A_1, A_2, \dots, A_r 为 r 个两两不相容事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^r A_i) = \sum_{i=1}^r f_n(A_i).$$

这最后一条性质叫频率的有限可加性，它在定义概率时起到重要作用。我们在这里仅就这一条性质给出一个简单证明：

设两事件 A, B 不相容, 又设在 n 次试验中, $A, B, A \cup B$ 发生的频数分别为 $n_A, n_B, n_{A \cup B}$. 由于 A 与 B 不能同时发生, 故有 $n_{A \cup B} = n_A + n_B$, 从而

$$f_n(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B).$$

频率的大小反映了事件 A 发生的频繁程度. 频率越大则意味着事件在试验中发生的可能性就越大. 但是, 用频率来表示一个事件发生的可能性的 size 却是行不通的. 这是因为频率具有波动性, 即使在相同条件下重复作多个 n 次试验, 其频率值亦可能大不相同. 但是, 人们在实践中发现, 随着试验次数 n 的逐渐增加, 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 一般会逐渐稳定在一个常数 p 附近, n 越大, 摆动的幅度会越小. 请看下面“抛硬币”试验的实例, 见表 1.1.

该实验表明, 尽管频率随试验不同而改变, 但当次数 n 越来越大时, 它就愈益趋于稳定于 0.5 这个常数附近. 这种在多次重复试验中出现的频率稳定性, 通常称之为随机事件的统计规律性, 它就是概率这一概念的经验基础. 我们称这个频率稳定值为随机事件 A 发生的概率, 记为 $P(A)$.

表 1.1 抛硬币试验

实验者	投掷次数 n	出现正面次数 k	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

事件的频率稳定性是一个客观存在, 它不断地为人们的实践所证实. 例如, 多年医学研究表明, 初生婴儿性别的数量比约为男:女 = 1.06:1; 我国人群中各血型人数比约为 O:A:B = 36.5%:27.5%:32.3% (见上海医科大学《实用内科学》编辑委员会, 《实用内科学》(第 8 版), 人民卫生出版社, 1988 年). 又如, 统计表明, 汉语文献中, 99% 左右的用字出自 3000 余个常用汉字中, 而其他汉字的使用频率约占 1%. 英语也有类似情况, 字母 E, T, A 出现的频率要明显高于其他字母. 因此, 在实际生活中, 人们常用统计频率作为概率的近似值.

1.2.2 概率的公理化定义及基本性质

上面我们用频率的稳定值来定义概率. 但在实际问题中, 有时不可能作大量重复试验, 而且, 一切事件的频率稳定值各等于多少, 也是无法一一加以检

验的. 因此, 为了理论分析及实际计算的需要, 我们从频率的三条性质出发, 将其略加改造, 总结出三条公理, 用以定义概率, 这就是概率的公理化定义.

定义 1.2.2 设 Ω 为一个随机试验的样本空间, 对 Ω 中任一事件 A , 规定一个实数 $P(A)$. 如果这样的集函数 $P(\cdot)$ 满足以下三条件, 则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率:

- (1) 非负性: $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可列可加性: 设 A_1, A_2, \dots 是可列个两两不相容事件, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \quad (1.1)$$

由概率的上述三条公理, 可以推出概率的一些基本性质如下:

1) $P(\emptyset) = 0$.

证明 由于 $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, 由(1.1)式得

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots,$$

而 $P(\emptyset) \geq 0$, 故必有 $P(\emptyset) = 0$.

2) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为有限个两两不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.2)$$

这一条叫概率的有限可加性.

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, 由(1.1)式有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (1.3)

证明 因为 $A \cup \bar{A} = \Omega, A \bar{A} = \emptyset$, 由(1.2)式得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

即得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

4) 若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且有

$$P(A) \geq P(B). \quad (1.4)$$

证明 因为 $A = B \cup (A - B)$ 且 $B(A - B) = \emptyset$, 由(1.2)式得

$$P(A) = P(B) + P(A - B),$$

从而

$$P(A - B) = P(A) - P(B);$$

又因为 $P(A - B) \geq 0$, 故得 $P(A) \geq P(B)$.

5) 对于任意事件 A , 有 $P(A) \leq 1$.

证明 由 $A \subset \Omega$ 及(1.4)式知 $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

6) 设 A, B 是任两个事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.5)$$

证明 易知 $A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \emptyset, AB \subset B$, 由(1.2)及(1.4)式得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

这个式子可以推广到更多事件上去, 例如

$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ &\quad - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

一般地, 对任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

这一条通常叫概率的加法公式.

例 1.2.1 已知 $P(AB) = 0.5$, $P(C) = 0.2$, $P(ABC) = 0.4$, 求 $P(AB \cup \bar{C})$.

$$\begin{aligned} \text{解 } P(AB \cup \bar{C}) &= 1 - P(AB \cup \bar{C}) \\ &= 1 - [P(AB) + P(\bar{C}) - P(ABC)] \\ &= 1 - (0.5 + 0.8 - 0.4) = 0.1. \end{aligned}$$

例 1.2.2 某城市共发行 A, B, C 三种报纸, 调查表明居民家庭中订购 C 报的占 30%, 同时订购 A, B 两报的占 10%, 同时订购 A, C 及 B, C 两报的各占 8%, 5%, 三报都订的占 3%. 今在该城中任找一户, 问该户(1)只订 A, B 两报; (2)只订 C 报的概率各为多少?

解 设 A, B, C 分别表示居民订购 A, B, C 报, 由题设知

$$\begin{aligned} P(\text{只订 } A \text{ 及 } B \text{ 报的}) &= P(AB - C) = P(AB - ABC) \\ &= P(AB) - P(ABC) = 0.1 - 0.03 = 0.07; \\ P(\text{只订 } C \text{ 报的}) &= P(C - (A \cup B)) = P(C - C(A \cup B)) \\ &= P(C) - P(AC \cup BC) = P(C) - [P(AC) + P(BC) - P(ABC)] \\ &= 0.3 - (0.08 + 0.05 - 0.03) = 0.2. \end{aligned}$$

1.3 等可能概型

等可能概型是指在一次试验中, 样本空间的每个样本点被取到的可能性相等的随机试验类型, 这是一种最简单的概率类型.

1.3.1 古典概型

在概率论的发展史上, 人们最早研究的随机试验是“抛硬币、掷骰子”之类问题的概率计算. 这些试验的共同特点是:

- (i) 试验的全部可能的结果是有限个, 即样本空间是一个有限集;
- (ii) 每次试验中, 各样本点出现的可能性相同, 即每个基本事件发生的概率相等.

我们称具有以上两个特点的随机试验所对应的概率模型为古典概型. 例如, 掷一枚均匀的骰子, 每一面出现的概率都是 $\frac{1}{6}$; 一袋中装有 n 个大小相同的小球, 从中任取一球, 则每个球被取到的概率都是 $\frac{1}{n}$.

定理 1.3.1 在古典概型中, 设样本空间 Ω 有 n 个样本点, A 是 Ω 中事件且 A 中有 k 个样本点, 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n}. \quad (1.7)$$

证明 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 由题设知 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$. 由于各基本事件是两两互斥的, 于是有

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_i\}),$$

即得